Теория принятия решений

Лекция 2.2:

Детерминированные нелинейные модели с непрерывными переменными

содержание

1. Текущий контроль знаний
2. Технологии исследования нелинейных математических моделей:

- аналитическое исследование методом множителей Лагранжа;
- численное исследование.

Текущий контроль знаний

- Решить графически задачу:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \to \max; \\ 5x_1 + x_2 \le 6; \\ 3x_1 + 11x_2 \le 15; \\ \forall i : x_i \ge 0. \end{cases}$$

- Перейти к двойственной задаче и решить ее графически:

$$\begin{cases} 7x_1 + 4x_2 - 5x_3 \to \max; \\ 9x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 5; \\ 3x_1 + 7x_2 + 0x_3 = 20. \end{cases}$$

Исследование моделей

Два класса технологий исследования нелинейных моделей с непрерывными переменными:

1. Аналитическое исследование моделей.
2. Численное исследование:

- рандомизированное;
- детерминированное.

Метод множителей Лагранжа

- Используется для решения однокритериальных задач на условный экстремум вида:

$$
\begin{cases}
f(\vec{x}) \to \min\ (\max); \\
\forall \mathrm{j} : \varphi_j(\vec{\mathrm{x}}) = b_j; \\
\vec{x} = \{x_1, x_2, \ldots., x_n\}; \\
\forall 1 \le i \le n : a_i \le x_i \le b_i.
\end{cases}
\qquad (1)
$$

Создание и исследование функции Лагранжа

Идея заключается в замене решения системы (1) поиском экстремума функции Лагранжа L вида:

$$L = f(\vec{x}) - \sum_j \lambda_j (b_j - \varphi_j(\vec{x})). \qquad (2)$$

Экстремум L отвечает решению системы:

$$\begin{cases} \forall i : \dfrac{\partial L}{\partial x_i} = 0; \\ \forall j : \dfrac{\partial L}{\partial \lambda_j} = 0. \end{cases} \qquad (3)$$

Пример: задача о консервной банке

Содержательная постановка: требуется выбрать такое соотношение между высотой и диаметром консервной банки, чтобы ее поверхность была минимальной при заданном объеме.

Формальная постановка:

$$\begin{cases} 2\pi r(h+r) \to \min; \\ \pi r^2 h = V; \\ r \geq 0;\ h \geq 0. \end{cases} \qquad (4)$$

Функция Лагранжа и ее исследование на экстремум

1. Функция Лагранжа:

$$L = 2\pi r(h + r) - \lambda(V - \pi r^2 h). \qquad (5)$$

2. Условия экстремума:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial r} = h + 2r - rh\lambda = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial h} = 2r - \lambda r^2 = 0; \\ \dfrac{\partial L}{\partial \lambda} = V - \pi r^2 h = 0. \end{cases} \qquad (6)$$

3. Результат решения системы (6):

$$\begin{cases} r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}; \\ \lambda = \dfrac{2}{r}; \\ h = 2r. \end{cases} \qquad (7)$$

Исследование экстремума

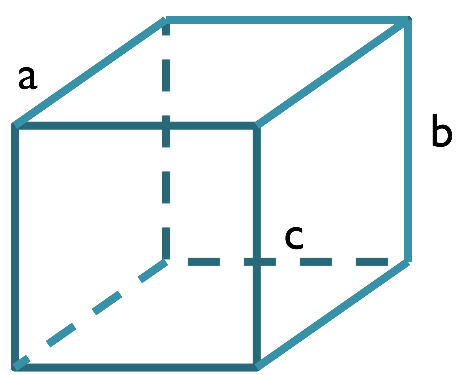
- Пусть новое значение радиуса банки равно r+Ɛ, где Ɛ>0, тогда из системы (4) следует, что площадь банки равна S*:

$$S^* = 2\pi\left[(r+\varepsilon)^2 + \frac{V}{\pi(r+\varepsilon)^2}\right].$$

Так как производная $\frac{\partial S^*}{\partial \varepsilon} > 0,$ то определяемые (7) значения r и h отвечают минимуму S.

САМОСТОЯТЕЛЬНО 1

1. Пользуясь описанной выше технологией, построить модель и определить оптимальные соотношения параметров прямоугольного параллелепипеда, изображенного ниже:



Достоинства и недостатки метода множителей Лагранжа

1. **Достоинства:**

- Глобально оптимальное решение.
- Ответ получается аналитически, т.е. не требует для определения численных значений больших ресурсов компьютера.

2. **Недостатки:**

- Возможность исследовать модель таким образом зависит от свойств полученной системы уравнений.