«Комплексные числа и действия над ними»

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости xOy такой, что $x = Re\ z,\ y = Im\ z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$ (рисунок 1).

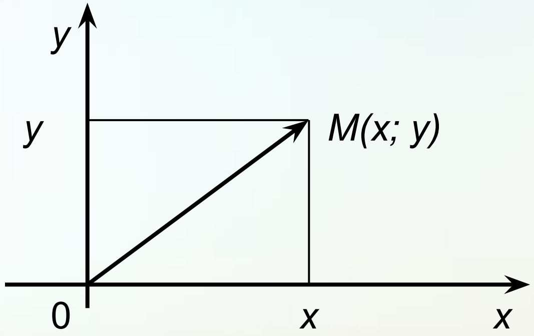

Рисунок 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется ***комплексной плоскостью*.**

Ось абсцисс называется ***действительной осью*,** так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i=x$.

Ось ординат называется ***мнимой осью*,** на ней лежат мнимые комплексные числа $z=0+yi=yi$.

содержание

Часто вместо точек на плоскости берут их *радиус-векторы* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$,

т.е. векторы, началом которых служит точка $O(0;0)$, концом $M(x;y)$.

Длина вектора $\vec{r}$, изображающего комплексное число z, называется ***модулем*** этого числа и обозначается $|z|$ или r.

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором $\vec{r}$, изображающим комплексное число, называется ***аргументом*** этого комплексного числа, обозначается $Arg\ z$ или φ.

Аргумент комплексного числа $z=0$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z\neq 0$ - величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k\ (k=0,-1,1,-2,2,..)$:

$$Arg\ z = arg\ z + 2\pi k,$$

где $arg\ z$ - ***главное значение аргумента****, заключенное в промежутке* $(-\pi, \pi]$.

содержание

Формы записи комплексных чисел

Запись числа в виде $z=x+iy$ называют ***алгебраической формой*** комплексного числа.

Из рисунка 1 видно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следовательно, комплексное $z=x+iy$ число можно записать в виде:

$$z = x + iy = r\cos\varphi + ir\sin\varphi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Такая форма записи называется ***тригонометрической формой записи*** комплексного числа.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos\varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin\varphi = \frac{y}{r}; \quad tg\varphi = \frac{y}{x}.$$

содержание

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \le \pi,$ то из формулы $tg\varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$\arg z = arctg\frac{y}{x}$ - для внутренних точек I, IV четвертей;

$\arg z = arctg\frac{y}{x} + \pi$ - для внутренних точек II четверти;

$\arg z = arctg\frac{y}{x} - \pi$ - для внутренних точек III четверти.

Пример 1. Представить комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме.

содержание

Решение. Комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r=\sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = arctg\dfrac{y}{x}$.

1) $z_1=1+i$ (число z_1 принадлежит I четверти), $x=1,\ y=1.$

$$r=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2},\quad \varphi = arctg\frac{1}{1}=arctg\,1=\frac{\pi}{4}.$$

Таким образом, $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right).$

2) $z_2=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ (число z_2 принадлежит II четверти) $x=-\dfrac{1}{2}, y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.$

$$r=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=1,\qquad \varphi = arctg\left(-\sqrt{3}\right)=-\frac{\pi}{3}.$$

Так как $z_2\in II$ ч., то $Arg\,z_2=\pi+\varphi=\pi-\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{2\pi}{3}.$

Следовательно, $z_2=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

Ответ: $z_1=\sqrt{2}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right),\ z_2=\left(\cos\dfrac{2\pi}{3}+i\sin\dfrac{2\pi}{3}\right).$

Рассмотрим показательную функцию $w=e^z$, где $z=x+iy$ - комплексное число.

Можно показать, что функция *w* может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x(\cos y + i\sin y)$$

Данное равенство называется ***уравнением Эйлера.***

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $$e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2};$$

2) $$e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}};$$

3) $(e^z)^m = e^{mz};$ где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i\sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i\sin y$$

содержание

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \dfrac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \dfrac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме

$$z=r(cos\varphi +isin\varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi}=cos\varphi+isin\varphi,$ то комплексное число можно записать в виде

$$z=r\, e^{i\varphi}$$

Полученное равенство называется ***показательной формой*** комплексного числа.

содержание

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2 , заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi), \quad z_2 = \rho(\cos\psi + i\sin\psi).$$

а) Произведение комплексных чисел

Выполняя умножение чисел z_1 и z_2 , получаем

$$z_1 \cdot z_2 = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\rho(\cos\psi + i\sin\psi) =$$

$$= r\rho(\cos\varphi\cos\psi + i\cos\varphi\sin\psi + i\sin\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) =$$

$$= r\rho((\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi)),$$

$$\boldsymbol{z_1 \cdot z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi))}$$

содержание

б) Частное двух комплексных чисел

Пусть заданы комплексные числа z_1 и $z_2 \neq 0.$

Рассмотрим частное $\dfrac{z_1}{z_2}$, имеем

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)} = \frac{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)(\cos\psi - i\sin\rho)}{\rho(\cos\psi + i\sin\psi)(\cos\psi - i\sin\psi)} =$$

$$= \frac{r}{\rho}\left(\frac{(\cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi) + i(\sin\varphi\cos\psi + \cos\varphi\sin\varphi)}{\cos^2\psi + \sin^2\psi}\right),$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho}\left(\cos(\varphi - \psi) + i\sin(\varphi - \psi)\right)$$

содержание

Пример 5. Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)$,

$z_2 = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right)$. Найдите $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

1) Используя формулу $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2)\left[\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 + \varphi_2)\right]$, получаем

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2\left(\cos\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3}\right)\right).$$

Следовательно, $z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{11\pi}{12} + i\sin\frac{11\pi}{12}\right)$.

2) Используя формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}\left[\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right]$, получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{\sqrt{2}}\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right)\right).$$

Следовательно, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

Ответ: $z = 2\left(\cos\frac{4\pi}{3} + i\sin\frac{4\pi}{3}\right)$, $\frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{12} + i\sin\frac{5\pi}{12}\right)$.

содержание

в) Возведение комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в n-ю степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi).$$

В общем случае получим:

$$\left(r(\cos\varphi + i\sin\varphi)\right)^n = r^n(\cos n\varphi + i\sin n\varphi) \qquad (2)$$

где n– целое положительное число.

Следовательно, *при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени*.

Выражение (2) называется ***формулой Муавра***.

содержание

Пример 6. Найти формулы $sin2\phi$ и $cos2\phi$.

Решение.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi - \sin^2\varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i\sin 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi + 2i\cos\varphi\sin\varphi$.

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2\varphi - \sin^2\varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2\sin\varphi\cos\varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

Извлечение корня n-ой степени из комплексного числа

Корнем n-ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w, удовлетворяющее равенству $w^n=z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n=z$.

Если положить $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, а $w = \rho(\cos\psi + i\sin\psi)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = w^n = \left[\rho(\cos\psi + i\sin\psi)\right]^n = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r, \quad n\psi = \varphi + 2\pi k, \quad k \in Z.$

То есть $\rho = \sqrt[n]{r}, \ \psi = \dfrac{\varphi + 2\pi k}{n}.$

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = w$ принимает вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right)$$

где $k = \overline{0,\ n-1}$ (т.е. от 0 до $n-1$).

Таким образом, *извлечение корня n-ой степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n-ой степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.*

Пример 7. Найти все значения $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

Решение.

Вначале представим число $z=1+i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

В данном случае $x=1$, $y=\sqrt{3}$, таким образом, $r=\sqrt{1+3}=\sqrt{4}=2$,

$$\varphi = arctg\frac{\sqrt{3}}{1} = arctg\sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно, $z = 2\left(\cos\frac{\pi}{3} + i\sin\frac{\pi}{3}\right).$

Используя формулу $\sqrt[n]{r(\cos\varphi + i\sin\varphi)} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi+2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi+2\pi k}{n}\right)$,

где $k=0,1,2,\dots,(n-1)$, имеем:

$$\sqrt[3]{z}=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}+i\sin\frac{\frac{\pi}{3}+2\pi k}{3}\right),\ k=0,\,1,\,2.$$

Запишем все значения $\sqrt[3]{z}$:

при $k=0,\ z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right);$

при $k=1,\ z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right);$

при $k=2,\ z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$

Ответ: $z_0=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{\pi}{9}+i\sin\frac{\pi}{9}\right);\ z_1=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{7\pi}{9}+i\sin\frac{7\pi}{9}\right);$

$z_2=\sqrt[3]{2}\left(\cos\frac{13\pi}{9}+i\sin\frac{13\pi}{9}\right).$

содержание