

«Комплексные числа и действия над ними»

Геометрическое изображение комплексных чисел

Всякое комплексное число $z=x+iy$ можно изобразить точкой $M(x;y)$ плоскости xOy такой, что $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. И, наоборот, каждую точку $M(x;y)$ координатной плоскости можно рассматривать как образ комплексного числа $z=x+iy$ (рисунок 1).

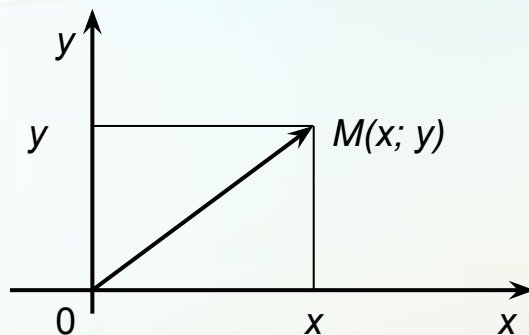


Рисунок 1

Плоскость, на которой изображаются комплексные числа, называется **комплексной плоскостью**.

Ось абсцисс называется **действительной осью**, так как на ней лежат действительные числа $z=x+0i=x$.

Ось ординат называется **мнимой осью**, на ней лежат мнимые комплексные числа $z=0+yi=yi$.

Часто вместо точек на плоскости берут их *радиус-векторы* $\vec{r} = \overrightarrow{OM}$, т.е. векторы, началом которых служит точка $O(0;0)$, концом $M(x;y)$.

Длина вектора \vec{r} , изображающего комплексное число z , называется **модулем** этого числа и обозначается $|z|$ или r .

Величина угла между положительным направлением действительной оси и вектором \vec{r} , изображающим комплексное число, называется **аргументом** этого комплексного числа, обозначается $Arg z$ или φ .

Аргумент комплексного числа $z=0$ не определен.

Аргумент комплексного числа $z \neq 0$ - величина многозначная и определяется с точностью до слагаемого $2\pi k$ ($k=0, -1, 1, -2, 2, \dots$):

$$Arg z = arg z + 2\pi k,$$

где $arg z$ - **главное значение аргумента**, заключенное в промежутке $(-\pi, \pi]$.

Формы записи комплексных чисел

Запись числа в виде $z=x+iy$ называют **алгебраической формой** комплексного числа.

Из рисунка 1 видно, что $x=r\cos\varphi$, $y=r\sin\varphi$, следовательно, комплексное $z=x+iy$ число можно записать в виде:

$$z = x + iy = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Такая форма записи называется **тригонометрической формой записи** комплексного числа.

Модуль $r=|z|$ однозначно определяется по формуле

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Аргумент φ определяется из формул

$$\cos \varphi = \frac{x}{r}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r}; \quad \operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}.$$

При переходе от алгебраической формы комплексного числа к тригонометрической достаточно определить лишь главное значение аргумента комплексного числа, т.е. считать $\varphi = \arg z$.

Так как $-\pi < \arg z \leq \pi$, то из формулы $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$ получаем, что

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$ - для внутренних точек I, IV четвертей;

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + \pi$ - для внутренних точек II четверти;

$\arg z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} - \pi$ - для внутренних точек III четверти.

Пример 1. Представить комплексные числа $z_1 = 1 + i$ и $z_2 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$ в тригонометрической форме.

Решение. Комплексное число $z=x+iy$ в тригонометрической форме имеет вид $z=r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x}$.

1) $z_1=1+i$ (число z_1 принадлежит I четверти), $x=1, y=1$.

$$r = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}, \quad \varphi = \operatorname{arctg} \frac{1}{1} = \operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}.$$

$$\text{Таким образом, } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right).$$

2) $z_2 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ (число z_2 принадлежит II четверти) $x = -\frac{1}{2}, y = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = 1, \quad \varphi = \operatorname{arctg}(-\sqrt{3}) = -\frac{\pi}{3}.$$

Так как $z_2 \in II$ ч., то $\operatorname{Arg} z_2 = \pi + \varphi = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$.

$$\text{Следовательно, } z_2 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

$$\text{Ответ: } z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right), \quad z_2 = \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right).$$

Рассмотрим показательную функцию $w=e^z$, где $z=x+iy$ - комплексное число.

Можно показать, что функция w может быть записана в виде:

$$w = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

Данное равенство называется **уравнением Эйлера**.

Для комплексных чисел будут справедливы следующие свойства:

1) $e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$;

2) $e^{z_1-z_2} = \frac{e^{z_1}}{e^{z_2}}$;

3) $(e^z)^m = e^{mz}$; где m – целое число.

Если в уравнении Эйлера показатель степени принять за чисто мнимое число ($x=0$), то получаем:

$$e^{iy} = \cos y + i \sin y.$$

Для комплексно – сопряженного числа получаем:

$$e^{-iy} = \cos y - i \sin y$$

Из этих двух уравнений получаем:

$$\begin{cases} \cos y = \frac{e^{iy} + e^{-iy}}{2}, \\ \sin y = \frac{e^{iy} - e^{-iy}}{2i}. \end{cases}$$

Этими формулами пользуются для нахождения значений степеней тригонометрических функций через функции кратных углов.

Если представить комплексное число в тригонометрической форме

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$$

и воспользоваться формулой Эйлера $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$, то комплексное число можно записать в виде

$$z = r e^{i\varphi}$$

Полученное равенство называется **показательной формой** комплексного числа.

Действия над комплексными числами, заданными в тригонометрической форме

Рассмотрим два комплексных числа z_1 и z_2 , заданных в тригонометрической форме

$$z_1 = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad z_2 = \rho(\cos \psi + i \sin \psi).$$

а) Произведение комплексных чисел

Выполняя умножение чисел z_1 и z_2 , получаем

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r(\cos \varphi + i \sin \varphi)\rho(\cos \psi + i \sin \psi) = \\ &= r\rho(\cos \varphi \cos \psi + i \cos \varphi \sin \psi + i \sin \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) = \\ &= r\rho((\cos \varphi \cos \psi - \sin \varphi \sin \psi) + i(\cos \varphi \sin \psi + \sin \varphi \cos \psi)), \end{aligned}$$

$$\mathbf{z_1 \cdot z_2 = r\rho(\cos(\varphi + \psi) + i \sin(\varphi + \psi))}$$

б) Частное двух комплексных чисел

Пусть заданы комплексные числа z_1 и $z_2 \neq 0$.

Рассмотрим частное $\frac{z_1}{z_2}$, имеем

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)}{\rho(\cos \psi + i \sin \psi)} = \frac{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)(\cos \psi - i \sin \psi)}{\rho(\cos \psi + i \sin \psi)(\cos \psi - i \sin \psi)} = \\ &= \frac{r}{\rho} \left(\frac{(\cos \varphi \cos \psi + \sin \varphi \sin \psi) + i(\sin \varphi \cos \psi - \cos \varphi \sin \psi)}{\cos^2 \psi + \sin^2 \psi} \right), \end{aligned}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r}{\rho} (\cos(\varphi - \psi) + i \sin(\varphi - \psi))$$

Пример 5. Даны два комплексных числа $z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)$,
 $z_2 = 2 \left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} \right)$. Найдите $z_1 \cdot z_2$, $\frac{z_2}{z_1}$.

Решение.

1) Используя формулу $z_1 \cdot z_2 = (r_1 r_2) [\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)]$,
получаем

$$z_1 \cdot z_2 = \sqrt{2} \cdot 2 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} + \frac{2\pi}{3} \right) \right).$$

$$\text{Следовательно, } z_1 \cdot z_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{11\pi}{12} + i \sin \frac{11\pi}{12} \right).$$

2) Используя формулу $\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} [\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)]$,
получаем

$$\frac{z_2}{z_1} = \frac{2}{\sqrt{2}} \left(\cos \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{2\pi}{3} - \frac{\pi}{4} \right) \right).$$

$$\text{Следовательно, } \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

$$\text{Ответ: } z = 2 \left(\cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} \right), \quad \frac{z_1}{z_2} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right).$$

в) Возведение комплексного числа, заданного в тригонометрической форме в n -ю степень

Из операции умножения комплексных чисел следует, что

$$z^2 = zz = r^2 (\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi).$$

В общем случае получим:

$$(r(\cos \varphi + i \sin \varphi))^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi) \quad (2)$$

где n – целое положительное число.

Следовательно, при возведении комплексного числа в степень модуль возводится в ту же степень, а аргумент умножается на показатель степени.

Выражение (2) называется **формулой Муавра**.

Пример 6. Найти формулы $\sin 2\phi$ и $\cos 2\phi$.

Решение.

Рассмотрим некоторое комплексное число $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$.

Тогда с одной стороны $z^2 = r^2(\cos^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi - \sin^2 \varphi)$.

По формуле Муавра: $z^2 = r^2(\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi)$.

Приравнивая, получим $\cos 2\varphi + i \sin 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi + 2i \cos \varphi \sin \varphi$.

Т.к. два комплексных числа равны, если равны их действительные и мнимые части, то

$$\cos 2\varphi = \cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi,$$

$$\sin 2\varphi = 2 \sin \varphi \cos \varphi.$$

Получили известные формулы двойного угла.

Извлечение корня n -ой степени из комплексного числа

Корнем n -ой степени из комплексного числа z называется комплексное число w , удовлетворяющее равенству $w^n = z$, т.е. $\sqrt[n]{z} = w$, если $w^n = z$.

Если положить $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, а $w = \rho(\cos \psi + i \sin \psi)$, то, по определению корня и формуле Муавра, получаем

$$z = w^n = [\rho(\cos \psi + i \sin \psi)]^n = r(\cos \varphi + i \sin \varphi).$$

Отсюда имеем $\rho^n = r$, $n\psi = \varphi + 2\pi k$, $k \in Z$.

То есть $\rho = \sqrt[n]{r}$, $\psi = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}$.

Поэтому равенство $\sqrt[n]{z} = w$ принимает вид

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right)$$

где $k = \overline{0, n-1}$ (т.е. от 0 до $n-1$).

Таким образом, извлечение корня n -ой степени из комплексного числа z всегда возможно и дает n различных значений. Все значения корня n -ой степени расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{|z|}$ с центром в нуле и делят эту окружность на n равных частей.

Пример 7. Найти все значения $\sqrt[3]{1+i\sqrt{3}}$.

Решение.

Вначале представим число $z = 1 + i\sqrt{3}$ в тригонометрической форме.

В данном случае $x=1$, $y = \sqrt{3}$, таким образом, $r = \sqrt{1+3} = \sqrt{4} = 2$,

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{3}}{1} = \operatorname{arctg} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}.$$

Следовательно,
$$z = 2 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right).$$

Используя формулу
$$\sqrt[n]{r(\cos \varphi + i \sin \varphi)} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right),$$

где $k=0, 1, 2, \dots, (n-1)$, имеем:

$$\sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{3} \right), \quad k = 0, 1, 2.$$

Запишем все значения $\sqrt[3]{z}$:

$$\text{при } k = 0, \quad z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right);$$

$$\text{при } k = 1, \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right);$$

$$\text{при } k = 2, \quad z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$

$$\text{Ответ: } z_0 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{\pi}{9} + i \sin \frac{\pi}{9} \right); \quad z_1 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{7\pi}{9} + i \sin \frac{7\pi}{9} \right);$$

$$z_2 = \sqrt[3]{2} \left(\cos \frac{13\pi}{9} + i \sin \frac{13\pi}{9} \right).$$