

# Показательная функция

О, мир, пойми!  
Певцом – во сне открыты  
Закон звезды и формула цветка.

М. Цветаева.

# Порядок роста и убывания функции

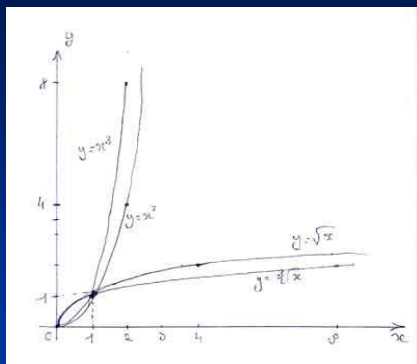
Функция – это основной математический инструмент для изучения связей, зависимостей между различными величинами. Чем большим запасом функций мы располагаем, тем шире и богаче наши возможности математического описания окружающего нас мира.

В 8-9 классах мы подробно изучали квадратичные зависимости. Так, путь при равноускоренном движении квадратично зависит от времени; энергия падающего тела квадратично зависит от его скорости; количество теплоты, выделяемое током, текущим по проводнику, квадратично зависит от силы тока и.т.д.

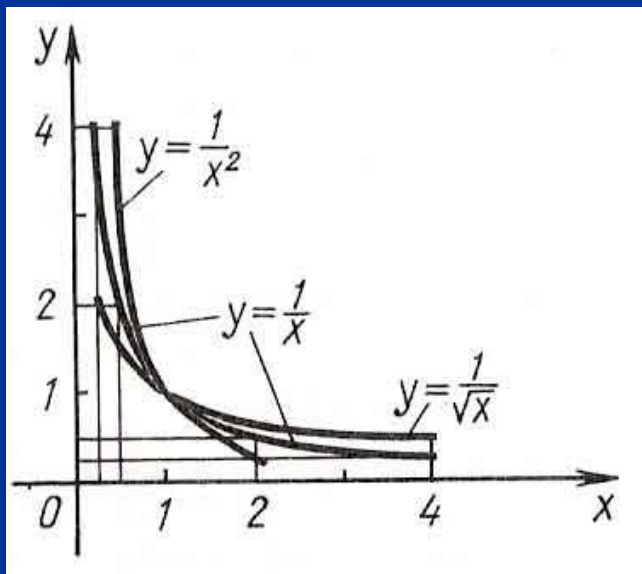
Степенные зависимости более высокого порядка также встречаются на практике. Например, по закону Стефана-Больцмана излучательная способность абсолютно чёрного тела пропорциональна четвёртой степени его температуры. Масса шара является кубической функцией его радиуса.

Функция вида  $y=x^k$

Графики степенной функции показывают рост различных процессов, чем больше Коэффициент  $k$ , тем быстрее растут эти функции.



Простейшая убывающая функция задается обратно пропорциональной зависимостью. Чем больше степень, тем быстрее убывают эти функции при больших значениях  $X$ .



В естествознании и технике встречаются процессы, рост или затухание которых происходят быстрее, чем у любой степенной функции. С примерами быстро растущих функций человек столкнулся уже давно. В древней легенде об изобретателе шахмат говорится, что он потребовал за первую клетку шахматной доски одно пшеничное зерно, а за каждую следующую – вдвое больше, чем за предыдущую. Человеку трудно представить себе порядок величины  $2^{64} - 1$  (общее число зёрен – плату за изобретение шахмат). Если грубо заменить  $2^{10} = 1024$  на  $10^3$ , то  $2^{64} = 24 \cdot 2^{60} \approx 16 \cdot 10^{18} = 1,6 \cdot 10^{19}$ . Достаточно сказать, что расстояние от Земли до Солнца в миллиметрах приблизительно равно  $1,5 \cdot 10^{14}$ , так что, считая диаметр зерна равным 1 мм, можно этим зерном 100000 раз уложить путь от Земли до Солнца.

Поразительное явление быстрого роста членов геометрической прогрессии, т. е. числа вида  $sq^n$ , отражено о многих старинных задачах. Однако лишь с конца XVII в. Стали систематически рассматриваться зависимости  $y = sq^n$ , в которых переменная  $x$  принимает не только целые значения. Такие функции называются показательными.

Показательные функции обладают замечательными свойствами: скорость их роста пропорциональна значению самой функции. Они как костёр, который, чем больше разгорается, тем больше в него надо подкладывать дров. Необходимость изучения функции, у которой производная пропорциональна самой функции, возникла в обнаружении различных законов естествознания, таких, как законы размножения, законы радиоактивного излучения.

# Показательная функция

## Исследование показательных уравнений

Некоторые наиболее часто встречающиеся виды трансцендентных функций, прежде всего показательные, открывают доступ ко многим исследованиям.

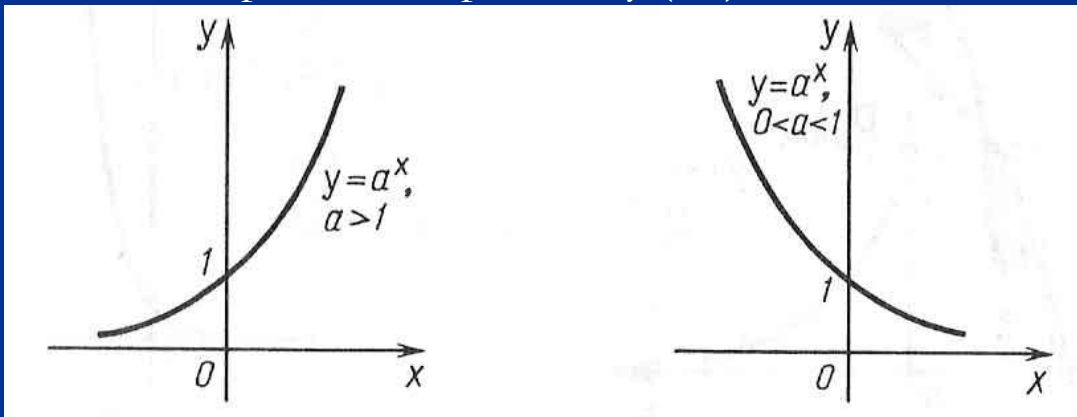
Л. Эйлер

Определение: Показательной функцией называется функция вида  $y=a^x$ , где  $a$  – заданное положительное число,  $a \neq 1$ .

Если  $a=0$ , то функция получается постоянной.

## Свойства:

1. Область определения – множество  $\mathbb{R}$  всех действительных чисел.
2. Множество значений – множество всех положительных чисел.
3. Монотонность:  
при  $a > 1$  функция строго возрастает;  
при  $a < 1$  функция строго убывает .
4. Всегда проходит через точку  $(0;1)$



Чем больше  $a$ , тем  
быстрее рост функции.

Чем больше  $a$ , тем  
медленнее рост функции

# Число e

e - иррациональное, трансцендентное число (не алгебраическое)

Число e можно представить как сумму:

$$e = 1 + \frac{1}{1} + \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n} + \dots$$

$$(n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n)$$

$$e = 2,71828182459045\dots$$

$y = e^x$  - экспоненциальная функция, экспонента.

$$y = e^{rx}$$

e - неперово число

$$e^x = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n$$

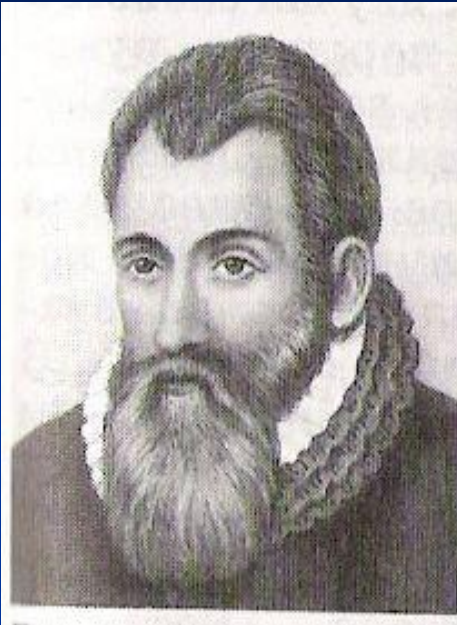
Показательная функция может быть разложена в степенной ряд:

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$



# Джон Непер

(16-17 вв.)



Шотландский математик, изобретатель логарифмов.  
Учился в Эденбургском университете. В построении  
«Удивительной таблицы логарифмов» (1616г.) изложил  
принципы вычисления таблиц.

# Понятен ли вам смысл распространённых выражений?

- «Численность бактерий растёт по экспоненте»
- «Сила тока затухает по экспоненте»
- «Его успехи растут по экспоненте»