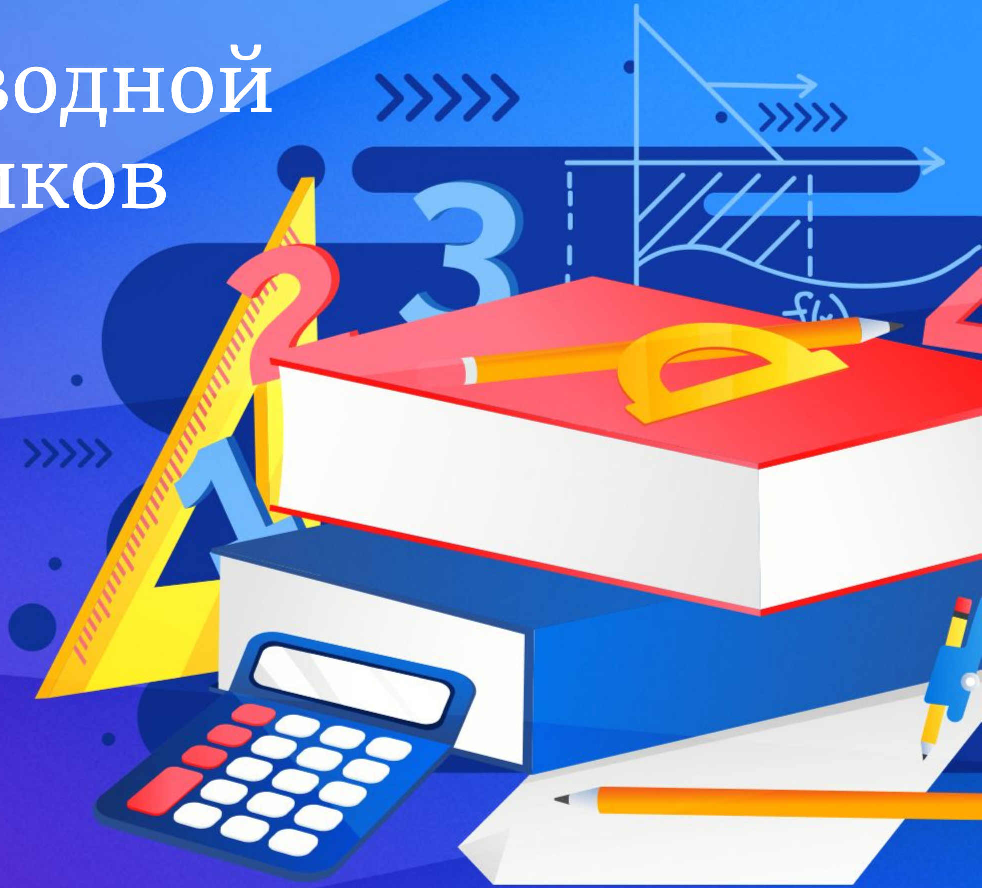
Применение производной к построению графиков функций



Применение производной
к исследованию функций

Сегодня на уроке

1. Приведём общую схему исследования свойств функции с помощью её производной.

2. Будем строить график функции, используя результаты исследования.

Чему равна производная функции $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$?

А $f'(x) = \cos x + 2\cos 2x$

В $f'(x) = \cos x + \cos 2x$

Б $f'(x) = 2\cos x$

Г $f'(x) = -\cos x - \cos 2x$

Чему равна производная функции $f(x) = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x$?

А $f'(x) = \cos x + 2\cos 2x$

В $f'(x) = \cos x + \cos 2x$

Б $f'(x) = 2\cos x$

Г $f'(x) = -\cos x - \cos 2x$

На каком из интервалов функция $f(x) = x^2 + 2x$ убывает?

А $(-\infty; -1)$

В $(0; +\infty)$

Б $(-1; +\infty)$

Г $(-\infty; 2)$

На каком из интервалов функция $f(x) = x^2 + 2x$ убывает?

А $(-\infty; -1)$

В $(0; +\infty)$

Б $(-1; +\infty)$

Г $(-\infty; 2)$

Найдите стационарные точки функции $f(x) = x^2e^{-x}$.

А $x_1 = -1, x_2 = 2$

В $x_1 = 0, x_2 = 2$

Б $x_1 = 1, x_2 = 0$

Г $x = 0$

Найдите стационарные точки функции $f(x) = x^2e^{-x}$.

А $x_1 = -1, x_2 = 2$

В $x_1 = 0, x_2 = 2$

Б $x_1 = 1, x_2 = 0$

Г $x = 0$

Вспомним

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ <u>возрастает</u> на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ <u>убывает</u> на этом промежутке.

Вспомним

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

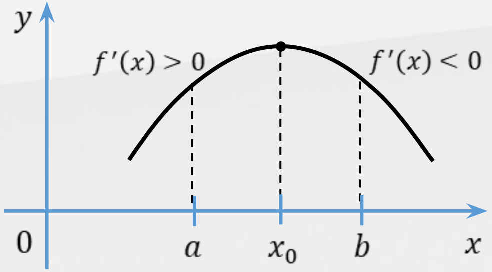
Вспомним

Достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума.

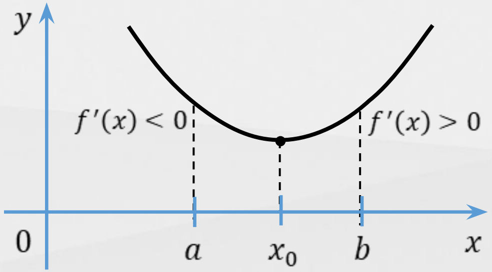
Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) = 0$.

Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «$+$» на «$-$», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0, то x_0 – точка <u>максимума</u> функции $f(x)$;



2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «$-$» на «$+$», то x_0 – точка <u>минимума</u> функции $f(x)$.



Вспомним

Найдём точки экстремума функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 7$ и значения функции в этих точках.

$f'(x) = (x^3 + 6x^2 - 15x + 7)' = 3x^2 + 12x - 15.$

$3x^2 + 12x - 15 = 0,$

$x^2 + 4x - 5 = 0,$

$x_1 + x_2 = -4,\ x_1x_2 = -5,$

$x_1 = -5,\ x_2 = 1$ – стационарные точки данной функции.

$x_1 = -5$ – точка максимума, $x_2 = 1$ – точка минимума.

Значение функции в точке максимума: $f(-5) = (-5)^3 + 6 \cdot (-5)^2 - 15 \cdot (-5) + 7 = 107.$

Значение функции в точке минимума: $f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 7 = -1.$

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

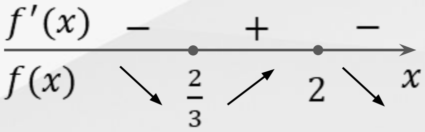
$f'(x) = (-x^3 + 4x^2 - 4x)' = -3x^2 + 8x - 4$.

$-3x^2 + 8x - 4 = 0,$

$D = 8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 64 - 48 = 16,$

$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)},$

$x_1 = \frac{2}{3},\ x_2 = 2.$



$x = 3: -3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4 = -7 < 0$

$x_1 = \frac{2}{3}$ – точка минимума, $x_2 = 2$ – точка максимума.

$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{32}{27},\ \ f(2) = -2^3 + 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 0.$

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$
		min		max	

Точки пересечения
с осью Ox:

$-x^3 + 4x^2 - 4x = 0,$

$-x(x^2 - 4x + 4) = 0,$

$-x(x-2)^2 = 0,$

$x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

$(0; 0), (2; 0).$

Точки пересечения
с осью Oy:

$f(0) = 0,$

$(0; 0).$

$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	↘		↗		↘
		min		max	

Точки пересечения с осью Ox:

$-x^3 + 4x^2 - 4x = 0,$

$-x(x^2 - 4x + 4) = 0,$

$-x(x-2)^2 = 0,$

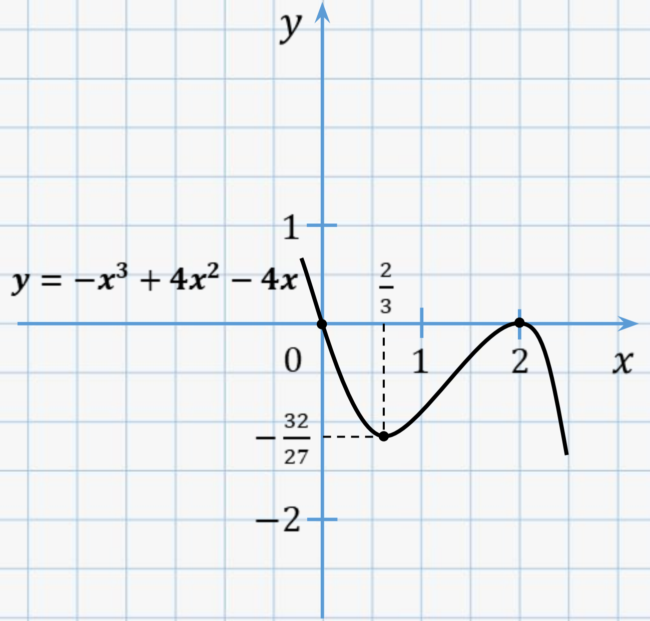
$x_1 = 0,\ x_2 = 2.$

$(0; 0), (2; 0).$

Точки пересечения с осью Oy:

$f(0) = 0,$

$(0; 0).$



Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	↘		↗		↘
		min		max	

Получается, что для построения графика функции сначала исследуют свойства этой функции с помощью её производной.

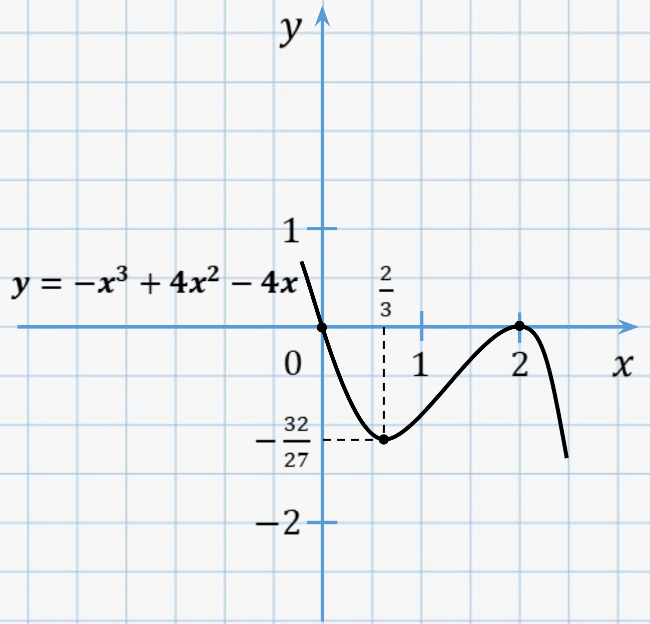


Схема исследования свойств функции с помощью её производной

При исследовании свойств функции надо найти:

1) область определения;

2) производную;

3) стационарные точки;

4) промежутки возрастания и убывания;

5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Для более точного построения графика обычно находят точки пересечения с осями координат.
Также можно найти координаты ещё нескольких точек графика.

Для построения графика чётной (нечётной) функции достаточно исследовать свойства и построить её график при $x > 0$, а затем отразить его симметрично относительно оси ординат (начала координат).

Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Область определения функции – множество $\mathbb{R}$.

Данная функция нечётная, т. к. $f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = -3x^5 + 5x^3 = -(3x^5 - 5x^3) = -f(x)$.

Исследуем эту функцию и построим её график при $\boldsymbol{x > 0}$.

$f'(x) = (3x^5 - 5x^3)' = 15x^4 - 15x^2$.

$15x^4 - 15x^2 = 0,$

$15x^2(x^2 - 1) = 0,$

$15x^2(x + 1)(x - 1) = 0,$

$x_1 = 0,\ x_2 = -1,\ x_3 = 1.$

$$\begin{array}{c|ccccc} f'(x) & & - & & + & \\ \hline f(x) & 0 & \searrow & 1 & \nearrow & x \end{array}$$

$x = 2\colon 15 \cdot 2^4 - 15 \cdot 2^2 = 180 > 0$

$x = 1$ – точка минимума.

$f(1) = 3 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^3 = -2.$

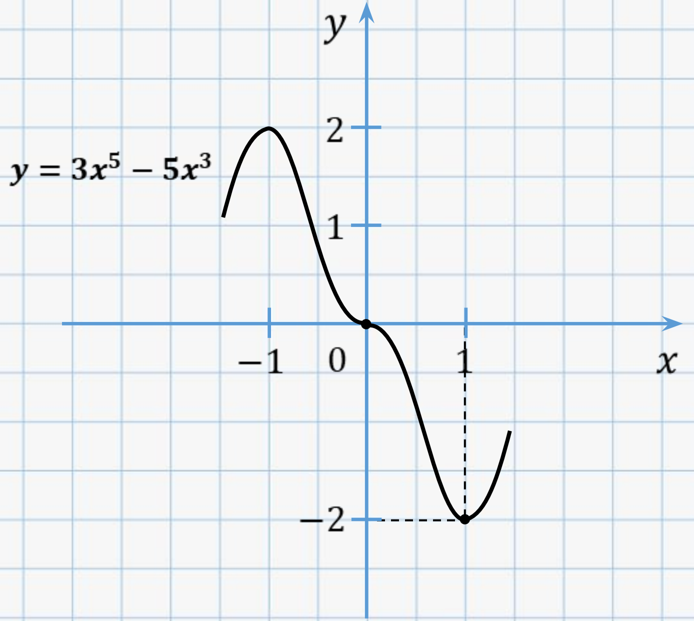
$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

	↘		↗
		min	

Найдём значение функции в точке $x = 0$:

$f(0) = 0$.



Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

Функция определена при всех x из данного отрезка.

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 8)' = 2x - 2.$$

$$2x - 2 = 0,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$

x	-1		1		2
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$x = 0: 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$

$x = 1{,}5: 2 \cdot 1{,}5 - 2 = 1 > 0$

$x = 1$ – точка минимума.

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 7,$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 11,\ f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4,$$

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 8 = 8,\ f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

		$\searrow$		$\nearrow$	
			min		

Точки пересечения с осью Ox:

$x^2 - 2x + 8 = 0,$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$

Точки пересечения с осью Oy:

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$

$(0; 8).$

Получается, что график функции не пересекает ось абсцисс.

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

		$\searrow$		$\nearrow$	
			min		

Точки пересечения с осью Ox:

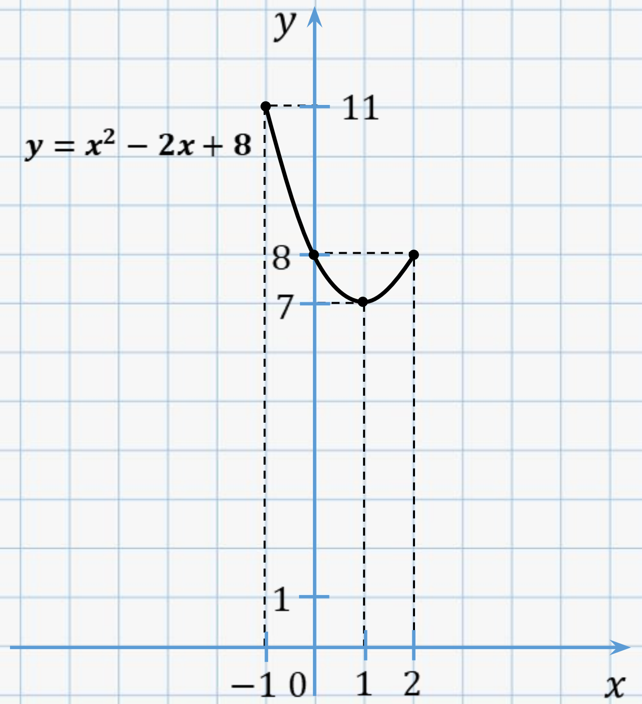
$x^2 - 2x + 8 = 0,$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$

Точки пересечения с осью Oy:

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$

$(0; 8).$



Итоги урока

Схема исследования свойств функции с помощью её производной

При исследовании свойств функции надо найти:

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

x	$\left(-\infty; \frac{2}{3}\right)$	$\frac{2}{3}$	$\left(\frac{2}{3}; 2\right)$	2	$(2; +\infty)$

Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

x	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2
$f'(x)$	-4	$-$	0	$+$	2
$f(x)$	11	↘	7	↗	8
			min		

Точки пересечения с осью Ox:

$x^2 - 2x + 8 = 0,$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$

Точки пересечения с осью Oy:

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$

$(0; 8).$

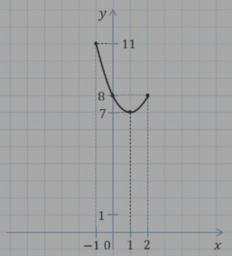


Схема исследования свойств функции

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

x	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2
$f'(x)$	-4	$-$	0	$+$	2
$f(x)$	11	↘	7	↗	8
			min		

Точки пересечения с осью Ox:

$x^2 - 2x + 8 = 0,$

$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$

Точки пересечения с осью Oy:

$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$

$(0; 8).$