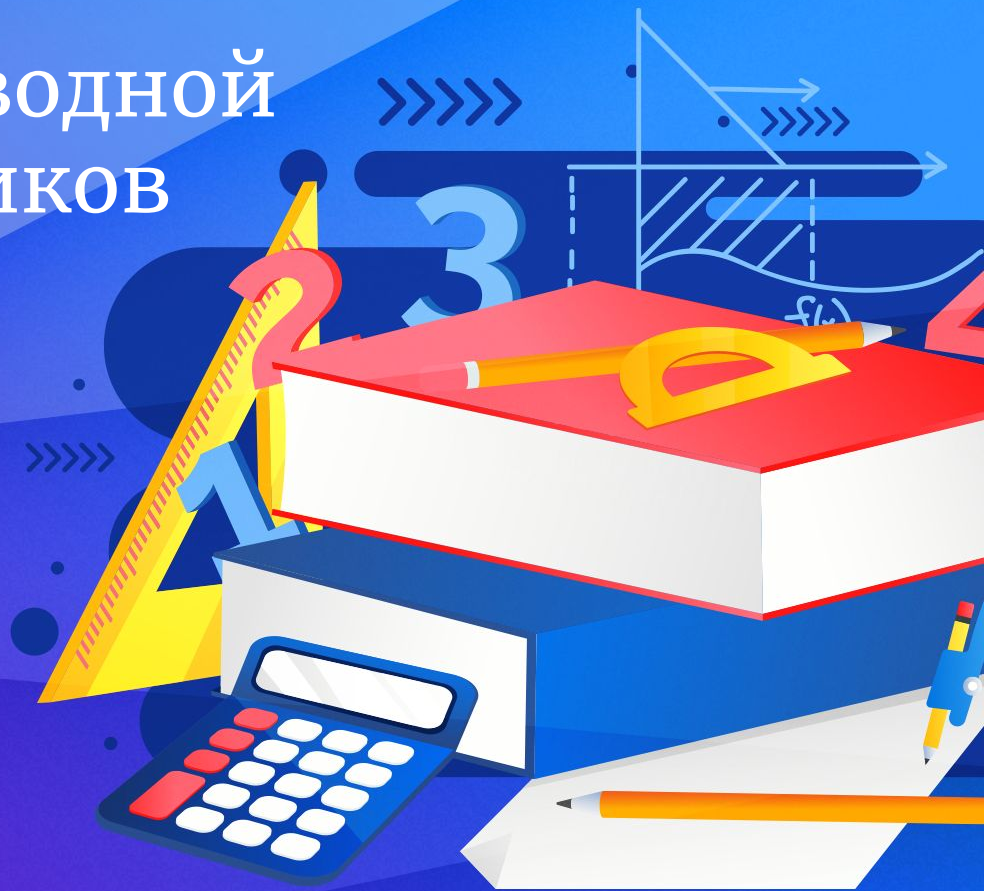


Применение производной к построению графиков функций

Применение производной
к исследованию функций



Сегодня на уроке

1. Приведём общую схему исследования свойств функции с помощью её производной.
2. Будем строить график функции, используя результаты исследования.

Чему равна производная функции $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$?

А $f'(x) = \cos x + 2 \cos 2x$

В $f'(x) = \cos x + \cos 2x$

Б $f'(x) = 2 \cos x$

Г $f'(x) = -\cos x - \cos 2x$

Чему равна производная функции $f(x) = \sin x + \frac{1}{2} \sin 2x$?

А $f'(x) = \cos x + 2 \cos 2x$

В $f'(x) = \cos x + \cos 2x$

Б $f'(x) = 2 \cos x$

Г $f'(x) = -\cos x - \cos 2x$

На каком из интервалов функция $f(x) = x^2 + 2x$ убывает?

А $(-\infty; -1)$

В $(0; +\infty)$

Б $(-1; +\infty)$

Г $(-\infty; 2)$

На каком из интервалов функция $f(x) = x^2 + 2x$ убывает?

A $(-\infty; -1)$

B $(0; +\infty)$

Б $(-1; +\infty)$

Г $(-\infty; 2)$

Найдите стационарные точки функции $f(x) = x^2 e^{-x}$.

А $x_1 = -1, x_2 = 2$

В $x_1 = 0, x_2 = 2$

Б $x_1 = 1, x_2 = 0$

Г $x = 0$

Найдите стационарные точки функции $f(x) = x^2 e^{-x}$.

А $x_1 = -1, x_2 = 2$

В $x_1 = 0, x_2 = 2$

Б $x_1 = 1, x_2 = 0$

Г $x = 0$

Вспомним

Если $f'(x) > 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ возрастает на этом промежутке.

Если $f'(x) < 0$ на промежутке, то функция $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Вспомним

Точка x_0 называется точкой максимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.

Точка x_0 называется точкой минимума функции $f(x)$, если существует такая окрестность точки x_0 , что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.

Вспомним

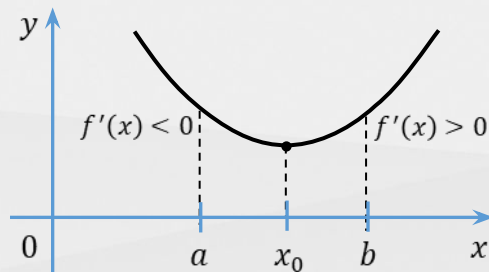
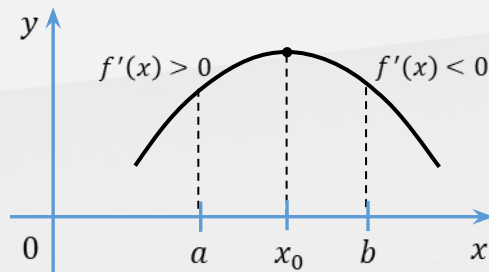
Достаточные условия того, что стационарная точка является точкой экстремума.

Пусть функция $f(x)$ дифференцируема на интервале $(a; b)$, $x_0 \in (a; b)$ и $f'(x_0) = 0$.

Тогда:

1) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «+» на «-», т. е. $f'(x) > 0$ слева от точки x_0 и $f'(x) < 0$ справа от точки x_0 , то x_0 – точка максимума функции $f(x)$;

2) если при переходе через стационарную точку x_0 функции $f(x)$ её производная меняет знак с «-» на «+», то x_0 – точка минимума функции $f(x)$.



Вспомним

Найдём точки экстремума функции $f(x) = x^3 + 6x^2 - 15x + 7$ и значения функции в этих точках.

$$f'(x) = (x^3 + 6x^2 - 15x + 7)' = 3x^2 + 12x - 15.$$

$$3x^2 + 12x - 15 = 0,$$

$$x^2 + 4x - 5 = 0,$$

$$x_1 + x_2 = -4, x_1x_2 = -5,$$

$x_1 = -5, x_2 = 1$ – стационарные точки данной функции.



$x_1 = -5$ – точка максимума, $x_2 = 1$ – точка минимума.

Значение функции в точке максимума: $f(-5) = (-5)^3 + 6 \cdot (-5)^2 - 15 \cdot (-5) + 7 = 107$.

Значение функции в точке минимума: $f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 - 15 \cdot 1 + 7 = -1$.

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

Область определения функции – множество \mathbb{R} .

$$f'(x) = (-x^3 + 4x^2 - 4x)' = -3x^2 + 8x - 4.$$

$$-3x^2 + 8x - 4 = 0,$$

$$D = 8^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-4) = 64 - 48 = 16,$$

$$x_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{16}}{2 \cdot (-3)},$$

$$x_1 = \frac{2}{3}, x_2 = 2.$$

$f'(x)$ - + -

$f(x)$ ↘ ↗ ↘

x $\frac{2}{3}$ 2

$x = 3: -3 \cdot 3^2 + 8 \cdot 3 - 4 = -7 < 0$

$x_1 = \frac{2}{3}$ – точка минимума, $x_2 = 2$ – точка максимума.

$$f\left(\frac{2}{3}\right) = -\left(\frac{2}{3}\right)^3 + 4 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} = -\frac{32}{27}, \quad f(2) = -2^3 + 4 \cdot 2^2 - 4 \cdot 2 = 0.$$

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	↘		↗		↘
		min		max	

Точки пересечения
с осью Ox :

$$\begin{aligned} -x^3 + 4x^2 - 4x &= 0, \\ -x(x^2 - 4x + 4) &= 0, \\ -x(x - 2)^2 &= 0, \\ x_1 &= 0, x_2 = 2. \end{aligned}$$

$(0; 0), (2; 0)$.

Точки пересечения
с осью Oy :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ (0; 0). \end{aligned}$$

$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	↘		↗		↘
		min		max	

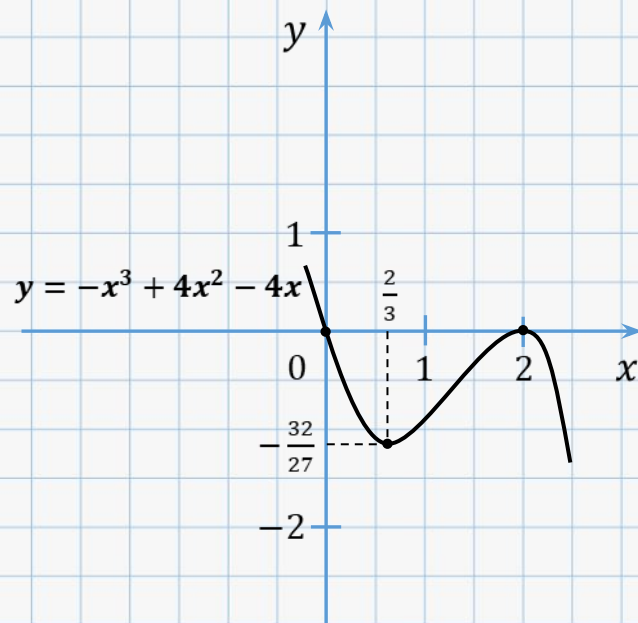
Точки пересечения
с осью Ox :

$$\begin{aligned} -x^3 + 4x^2 - 4x &= 0, \\ -x(x^2 - 4x + 4) &= 0, \\ -x(x - 2)^2 &= 0, \\ x_1 &= 0, x_2 = 2. \end{aligned}$$

$(0; 0), (2; 0)$.

Точки пересечения
с осью Oy :

$$\begin{aligned} f(0) &= 0, \\ (0; 0). \end{aligned}$$



Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

	↘		↗		↘
		min		max	

Получается, что для построения графика функции сначала исследуют свойства этой функции с помощью её производной.

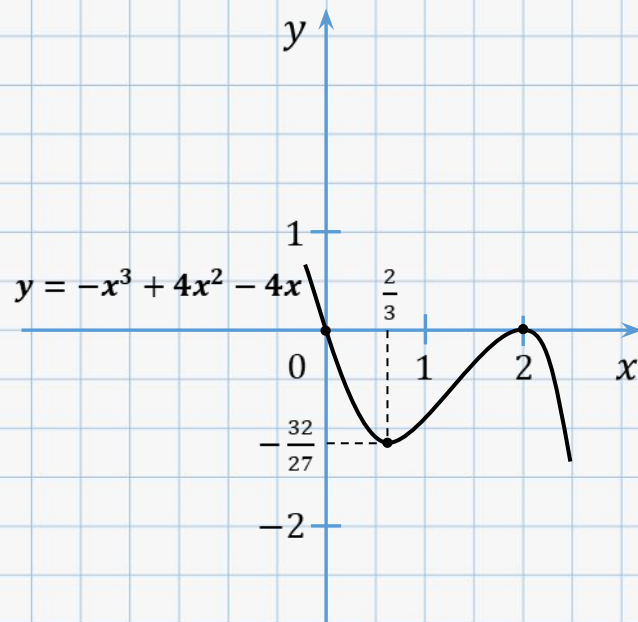


Схема исследования свойств функции с помощью её производной

При исследовании свойств функции надо найти:

- 1) область определения;
- 2) производную;
- 3) стационарные точки;
- 4) промежутки возрастания и убывания;
- 5) точки экстремума и значения функции в этих точках.

Для более точного построения графика обычно находят точки пересечения с осями координат.

Также можно найти координаты ещё нескольких точек графика.

Для построения графика **чётной (нечётной)** функции достаточно исследовать свойства и построить её график при $x > 0$, а затем отразить его симметрично относительно **оси ординат (начала координат)**.

Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

Область определения функции – множество \mathbb{R} .

Данная функция нечётная, т. к. $f(-x) = 3(-x)^5 - 5(-x)^3 = -3x^5 + 5x^3 = -(3x^5 - 5x^3) = -f(x)$.

Исследуем эту функцию и построим её график при $x > 0$.

$$f'(x) = (3x^5 - 5x^3)' = 15x^4 - 15x^2.$$

$$15x^4 - 15x^2 = 0,$$

$$15x^2(x^2 - 1) = 0,$$

$$15x^2(x + 1)(x - 1) = 0,$$

$$x_1 = 0, x_2 = -1, x_3 = 1.$$

$$\begin{array}{c} f'(x) \\ \hline f(x) \end{array} \begin{array}{c} \bullet \quad - \quad \bullet \\ \downarrow \quad \uparrow \\ 0 \quad 1 \quad x \end{array} \quad x = 2: 15 \cdot 2^4 - 15 \cdot 2^2 = 180 > 0$$

$x = 1$ – точка минимума.

$$f(1) = 3 \cdot 1^5 - 5 \cdot 1^3 = -2.$$

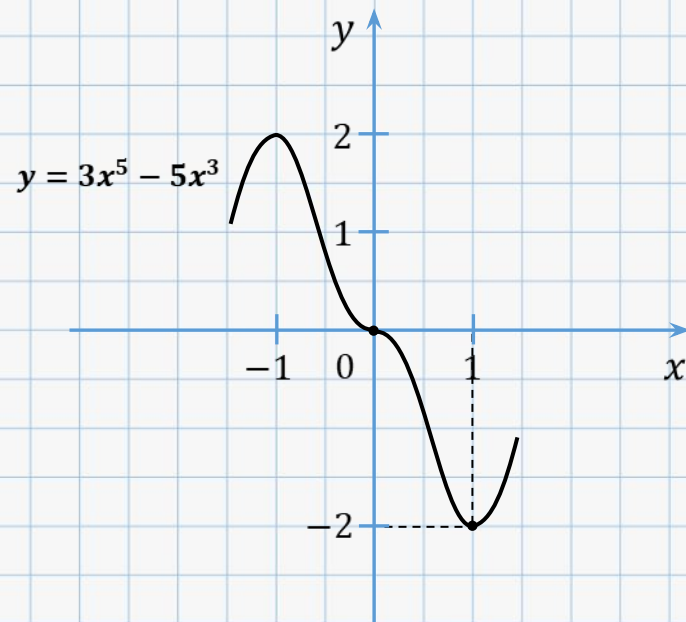
$$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$$

Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

	↙		↗
		min	

Найдём значение функции в точке $x = 0$:

$$f(0) = 0.$$



Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$
на отрезке $[-1; 2]$.

Функция определена при всех x из данного отрезка.

$$f'(x) = (x^2 - 2x + 8)' = 2x - 2.$$

$$2x - 2 = 0,$$

$$2x = 2,$$

$$x = 1.$$



$$x = 0: 2 \cdot 0 - 2 = -2 < 0$$

$$x = 1,5: 2 \cdot 1,5 - 2 = 1 > 0$$

$x = 1$ – точка минимума.

$$f(1) = 1^2 - 2 \cdot 1 + 8 = 7,$$

$$f(-1) = (-1)^2 - 2 \cdot (-1) + 8 = 11, \quad f'(-1) = 2 \cdot (-1) - 2 = -4,$$

$$f(2) = 2^2 - 2 \cdot 2 + 8 = 8, \quad f'(2) = 2 \cdot 2 - 2 = 2.$$

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$
на отрезке $[-1; 2]$.

		↙		↗	
			min		

Точки пересечения с осью Ox :

$$x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$$

Точки пересечения с осью Oy :

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$$

$(0; 8)$.

Получается, что график функции
не пересекает ось абсцисс.



Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

		↙		↗	
			min		

Точки пересечения с осью Ox :

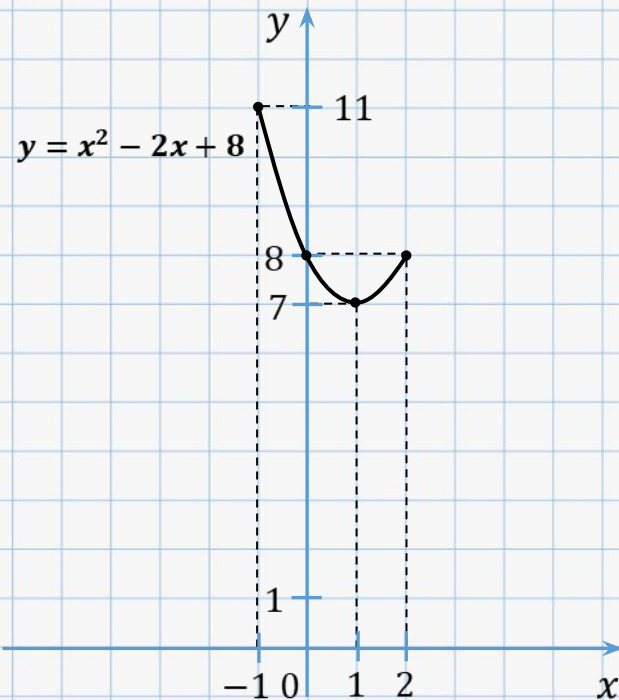
$$x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$$

Точки пересечения с осью Oy :

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$$

$(0; 8)$.



Итоги урока

Схема исследования свойств функции с помощью её производной

При исследовании свойств функции надо найти:

Постройте график функции $f(x) = -x^3 + 4x^2 - 4x$.

x	$(-\infty; \frac{2}{3})$	$\frac{2}{3}$	$(\frac{2}{3}; 2)$	2	$(2; +\infty)$
-----	--------------------------	---------------	--------------------	---	----------------

$y \uparrow$

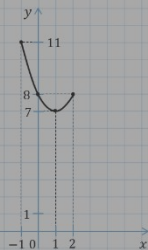
Постройте график функции $f(x) = 3x^5 - 5x^3$.

x	$(0; 1)$	1	$(1; +\infty)$
-----	----------	---	----------------

$y \uparrow$

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

x	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2
$f'(x)$	-4	-	0	+	2
$f(x)$	11	\searrow	7	\nearrow	8
			min		



Точки пересечения с осью Ox :

$$x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$$

Точки пересечения с осью Oy :

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$$

$$(0; 8).$$

Схема исследования свойств функции

Постройте график функции $f(x) = x^2 - 2x + 8$ на отрезке $[-1; 2]$.

x	-1	$(-1; 1)$	1	$(1; 2)$	2
$f'(x)$	-4	-	0	+	2
$f(x)$	11	\searrow	7	\nearrow	8
			min		

Точки пересечения с осью Ox :

$$x^2 - 2x + 8 = 0,$$

$$D = (-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 8 = -28 < 0.$$

Точки пересечения с осью Oy :

$$f(0) = 0^2 - 2 \cdot 0 + 8 = 8,$$

$$(0; 8).$$

