Потенциальное силовое поле.

Силовое поле – часть в пространства в котором на материальную точку действует сила, зависящая от ее координат и времени:

$$\bar{F} = \bar{F}(x, y, z, t).$$

Силовое поле называется ***стационарным***, если сила в явном виде не зависит от времени.

Стационарное силовое поле называется ***потенциальным***, если существует скалярная функция $U(x, y, z)$ такая, что проекции силы $\bar{F}$ на оси декартовой системы координат имеют вид:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

или $\quad \bar{F} = \overline{grad U};$

$$\overline{grad U} = \frac{\partial U}{\partial x}\bar{\imath} + \frac{\partial U}{\partial y}\bar{\jmath} + \frac{\partial U}{\partial z}\bar{k}.$$

Функция U называется ***силовой функцией***, а силы действующие в потенциальном поле называются потенциальными силами.

Поскольку для определения проекций силы на оси требуются только частные производные, то силовая функция определяется с точностью до аддитивной постоянной.

Свойства стационарного потенциального поля.

1) Элементарная работа стационарного потенциального поля равна полному дифференциалу силовой функции.

$$d'A(\bar{F}) = \bar{F}d\bar{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz = \frac{\partial U}{\partial x}dx + \frac{\partial U}{\partial y}dy + \frac{\partial U}{\partial z}dz = dU$$

$$U = \int_{M_0}^{M} d'A + C = \int_{M_0}^{M} F_x dx + F_y dy + F_z dz + C$$

Константа C может иметь любое значение, обычно определяется из условия $U_0 = 0$.

2) Полная работа силы стационарного потенциального поля не зависит от траектории, по которой перемещается точка, а зависит только от начального и конечного положений точки.

$$A(\bar{F}) = \int_{M_0}^{M} d'A = \int_{U_0}^{U} dU = U - U_0$$

3) Работы силы стационарного потенциального поля по любому замкнутому контуру равна нулю.

$$A(\bar{F}) = U - U_0\,; \quad U = U_0$$

$$\oint \bar{F}d\bar{r} = 0$$

Условие существования потенциального поля.

Для того, чтобы силовое поле было потенциальным, необходимо и достаточно, чтобы оно было безвихревым:

$$rot\bar{F} = 0$$

Доказательство (необходимость). Пусть поле потенциально, тогда $\exists\, U$:

$$F_x = \frac{\partial U}{\partial x};\quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y};\quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z};$$

$$rot\bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{\imath}\cancel{\left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)} + \bar{\jmath}\cancel{\left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)} + \bar{k}\cancel{\left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)} = 0$$

$$\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 U}{\partial z \partial y} = 0$$

Аналогично:

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} = 0;\quad \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad rot\bar{F} = 0.$$

Поверхности уровня потенциального силового поля.

Поверхность на которой силовая функция сохраняет свое значение постоянным, называется ***эквипотенциальной*** или ***поверхностью уровня***.

$$U(x, y, z) = C$$

Свойства поверхностей уровня.

1) Если начальная и конечная точки расположены на одной поверхности уровня, то работа сил стационарного потенциального поля по перемещению точки из начального в конечное положение равна нулю.

$$A(\bar{F}) = U - U_0\,; \quad U = U_0 = C \quad \Rightarrow \quad A(\bar{F}) = 0.$$

2) Сила $\bar{F}$ потенциального силового поля направлена по нормали к поверхности уровня в сторону возрастания силовой функции.

1. $d'A(\bar{F}) = \bar{F}d\bar{r} = dU$

   Зададим элементарное перемещение $d\bar{r}$ вдоль касательной к поверхности уровня.

   Т.к. на поверхности уровня $dU = 0$, то: $\bar{F}d\bar{r} = 0 \;\Rightarrow\; \bar{F} \perp d\bar{r}.$

   Т.е. сила перпендикулярна касательной к поверхности уровня, а значит направлена по нормали к ней.

2. Зададим элементарное перемещение вдоль нормали к поверхности уровня в сторону действия силы.

   Тогда $\bar{F}d\bar{r} = dU > 0.$ Т.е. в направлении действия силы силовая функция возрастает.

Силовые линии.

Силовой линией называют кривую, в каждой точке которой сила $\bar{F}$ стационарного силового поля направлена по касательной к этой кривой.

$$\bar{\tau} = \frac{d\bar{r}}{ds}; \qquad \bar{F} \parallel \bar{\tau} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\bar{r}}{ds} \times \bar{F} = 0, \quad \text{или} \quad d\bar{r} \times \bar{F} = 0$$

$$d\bar{r} \times \bar{F} = \begin{vmatrix} \bar{\imath} & \bar{\jmath} & \bar{k} \\ dx & dy & dz \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} = \bar{\imath}\left(dyF_z - dzF_y\right) + \bar{\jmath}(dzF_x - dxF_z) + \bar{k}\left(dxF_y - dyF_x\right) = 0$$

$$dyF_z = dzF_y; \qquad dzF_x = dxF_z; \qquad dxF_y = dyF_x.$$

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z}$$ – дифференциальное уравнение силовой линии стационарного силового поля.

Для потенциального поля: $$\frac{dx}{\frac{\partial U}{\partial x}} = \frac{dy}{\frac{\partial U}{\partial y}} = \frac{dz}{\frac{\partial U}{\partial z}}$$

Потенциальная энергия.

Потенциальной энергией материальной точки в рассматриваемой точке потенциального силового поля называется работа, которую совершают силы поля, действующие на материальную точку при перемещении ее из рассматриваемой точки поля в начальную, условно принятую за нулевую.

$$\Pi = A_{MM_0} = \int_M^{M_0} dU = U_0 - U; \quad d'A = dU = -d\Pi; \quad F_x = \frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{\partial \Pi}{\partial x}; \quad F_y = \frac{\partial U}{\partial y} = -\frac{\partial \Pi}{\partial y}; \quad F_z = \frac{\partial U}{\partial z} = -\frac{\partial \Pi}{\partial z};$$

$$A = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi.$$

Рассмотрим механическую систему, состоящую из точек M_k, массы m_k, $k = \overline{1, N}$ в стационарном потенциальном поле.

$$U = U(x_k, y_k, z_k); \qquad F_{kx} = \frac{\partial U}{\partial x_k}; \quad F_{ky} = \frac{\partial U}{\partial y_k}; \quad F_{kz} = \frac{\partial U}{\partial z_k}$$

$$\sum d'A_k = \sum (F_{kx} dx_k + F_{ky} dy_k + F_{kz} dz_k) = \sum \left(\frac{\partial U}{\partial x_k} dx_k + \frac{\partial U}{\partial y_k} dy_k + \frac{\partial U}{\partial z_k} dz_k\right) = dU$$

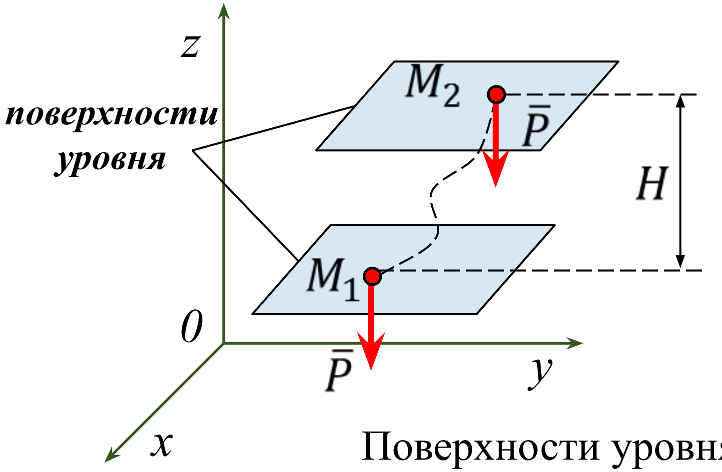
$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi$$

Потенциальной энергией потенциального силового поля для механической системы называется сумма работ сил поля при перемещении системы из произвольного положения в начальное положение, условно принятое за ноль.

Частные случаи потенциальных сил.

1) Однородное поле силы тяжести.

$$\bar{P} = m\bar{g} \qquad P_x = 0; \quad P_y = 0; \quad P_z = -mg$$



$$d'A = P_x dx + P_y dy + P_z dz = -mgdz = d(-mgz)$$

$$d'A = dU \quad \Rightarrow \quad U = -mgz + C$$

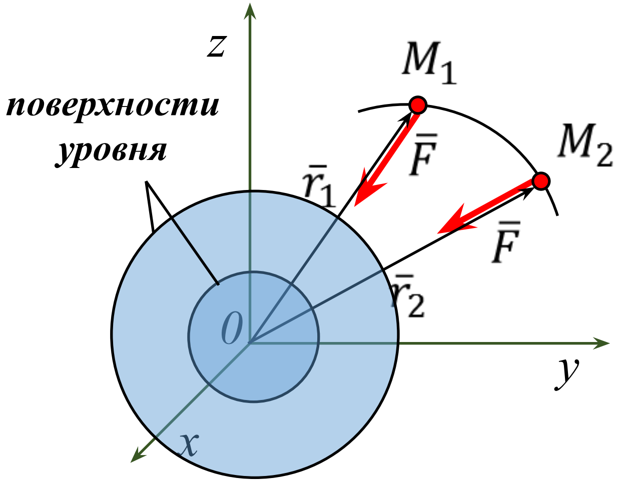
$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} d'A = -mg\int_{M_1}^{M_2} dz = -mg(z_2 - z_1) = -mgH$$

$$\Pi = A_{M_2M_1} = mgH$$

Поверхности уровня: $U = -mgz = const,\ z = const.$ Силовые линии – прямые, параллельные оси z.

2) Линейная сила упругости.

$$\bar{F} = -c\bar{r}; \qquad d'A(\bar{F}) = \bar{F}d\bar{r} = -c\bar{r}d\bar{r} = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right)$$



$$d'A = dU = d\left(-\frac{cr^2}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad U = -\frac{cr^2}{2} + C = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) + C$$

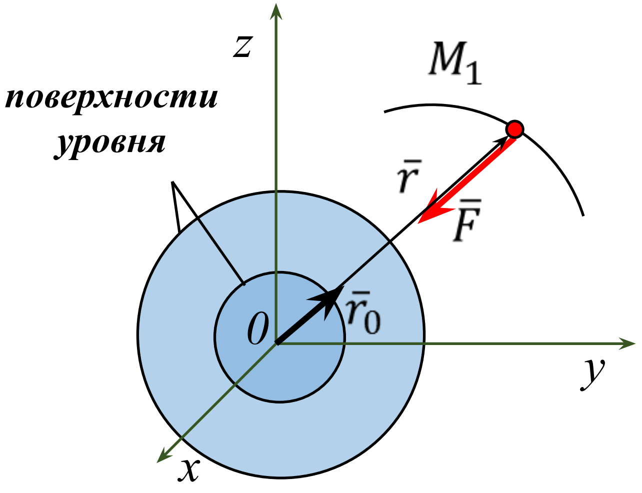
$$A_{M_1M_2} = \int_{M_1}^{M_2} d'A = -\int_{M_1}^{M_2} c\bar{r}d\bar{r} = -\frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2); \ \Pi = A_{M_2M_1} = \frac{c}{2}(r_2^2 - r_1^2)$$

Поверхности уровня: $U = -\frac{c}{2}(x^2 + y^2 + z^2) = const,\ (x^2 + y^2 + z^2) = const$

Силовые линии – прямые, проходящие через начало координат.

Частные случаи потенциальных сил.

3) Ньютоновское гравитационное поле.



$$F = \frac{k}{r^2}; \quad \bar{F} = -\frac{k}{r^2}\bar{r}_0; \quad \bar{r}_0 = \frac{\bar{r}}{r}; \quad \bar{F} = -\frac{k}{r^3}\bar{r}$$

$$F_x = -\frac{kx}{r^3}; \quad F_y = -\frac{ky}{r^3}; \quad F_z = -\frac{kz}{r^3}$$

$$d'A = F_x dx + F_y dy + F_z dz = -\frac{k}{r^3}(xdx + ydy + zdz) =$$

$$= -\frac{k}{r^3} r dr = -\frac{k}{r^2} dr$$

$$d'A = dU = -\frac{k}{r^2} dr \quad \Rightarrow \quad U = \frac{k}{r} + C; \quad \Pi = -\frac{k}{r} + C$$

Поверхности уровня: $U = \frac{k}{r} = const; \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = const$

Силовые линии – прямые, проходящие через начало координат.

Закон сохранения механической энергии.

$$T - T_0 = \sum A_k^{(e)} + \sum A_k^{(i)} = \sum A_k$$

При движении системы в стационарном потенциальном силовом поле:

$$\sum A_k = U - U_0 = \Pi_0 - \Pi$$

Тогда:

$$T - T_0 = \Pi_0 - \Pi \quad \text{или} \quad T + \Pi = \Pi_0 + T_0$$

$E = T + \Pi$ – полная механическая энергия системы

$\boxed{E = T + \Pi = const}$ – закон сохранения механической энергии системы.

Полная механическая энергия при движении системы в стационарном потенциальном силовом поле внешних и внутренних сил является постоянной величиной.

Механические системы, для которых выполняется закон сохранения механической энергии, называются ***консервативными***.