

Кривые второго порядка

Линейные уравнения $Ax + By + D = 0$

задают прямые на плоскости

Уравнения второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A, B, C, D, E, F - \text{const}$$

задают на плоскости **кривые второго порядка**

С помощью **поворота координатных осей** и

параллельного переноса системы координат можно

оси симметрии кривой сделать новыми осями координат, а новое начало координат поместить центр симметрии кривой второго порядка

Переход от старой системы к новой осуществляется с помощью **линейных функций**

В новой системе координат уравнение будет иметь **канонический вид**

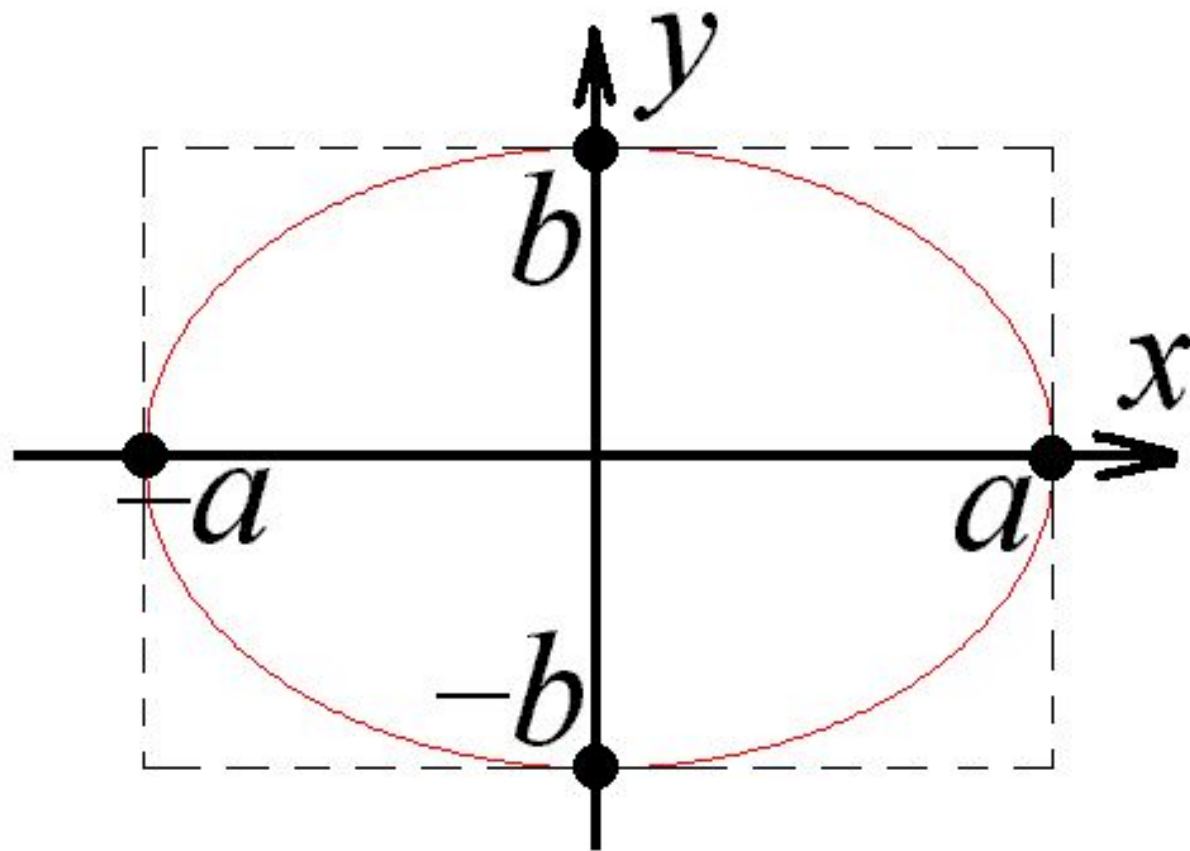
Если не вырожденный случай, то кривых второго порядка всего три:

эллипс : $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1; \quad a, b = \text{const} > 0, \quad a > b$

гипербола : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad a, b = \text{const} > 0$

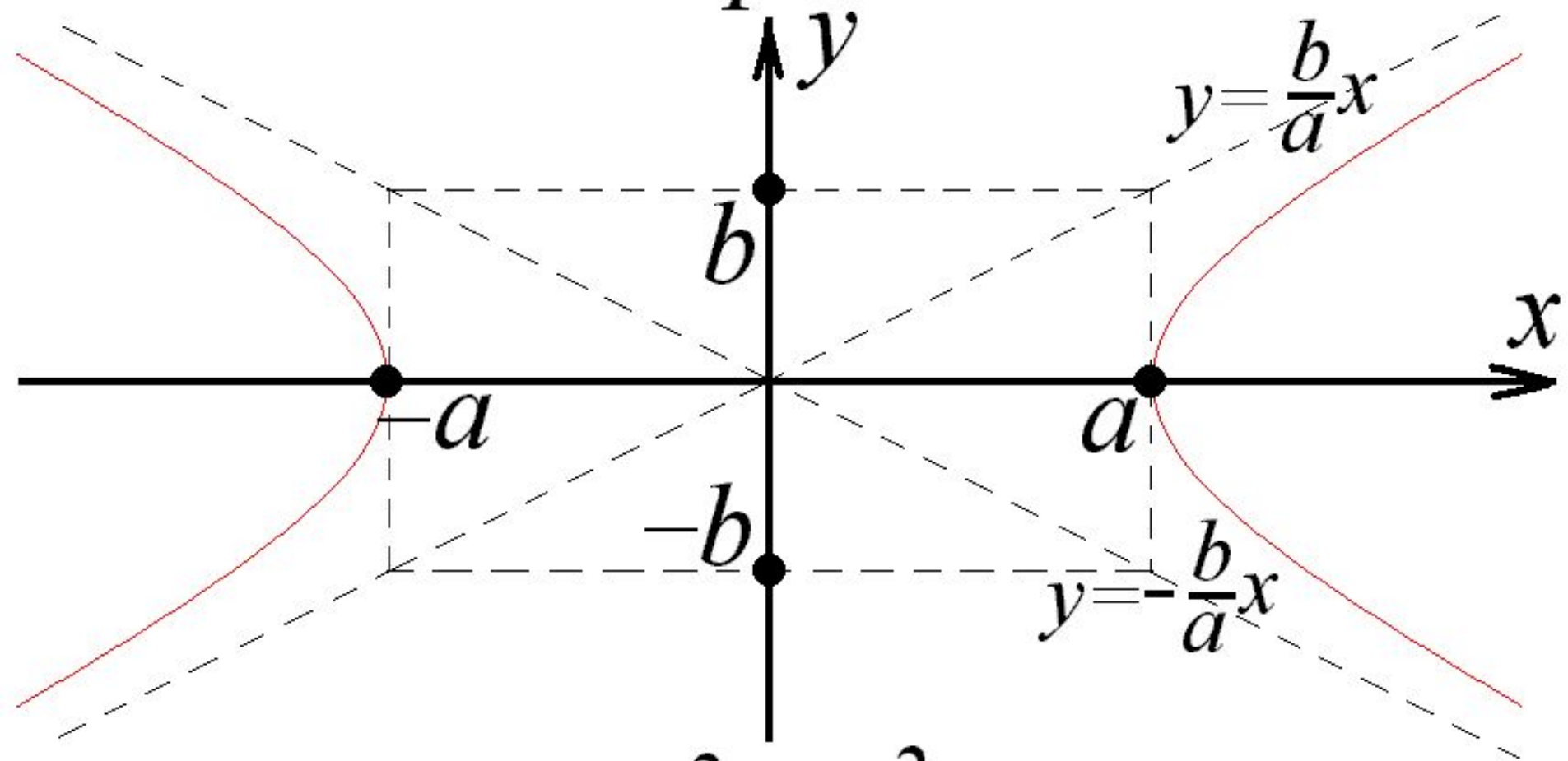
парабола : $y^2 = 2px, \quad p = \text{const} > 0$

Эллипс

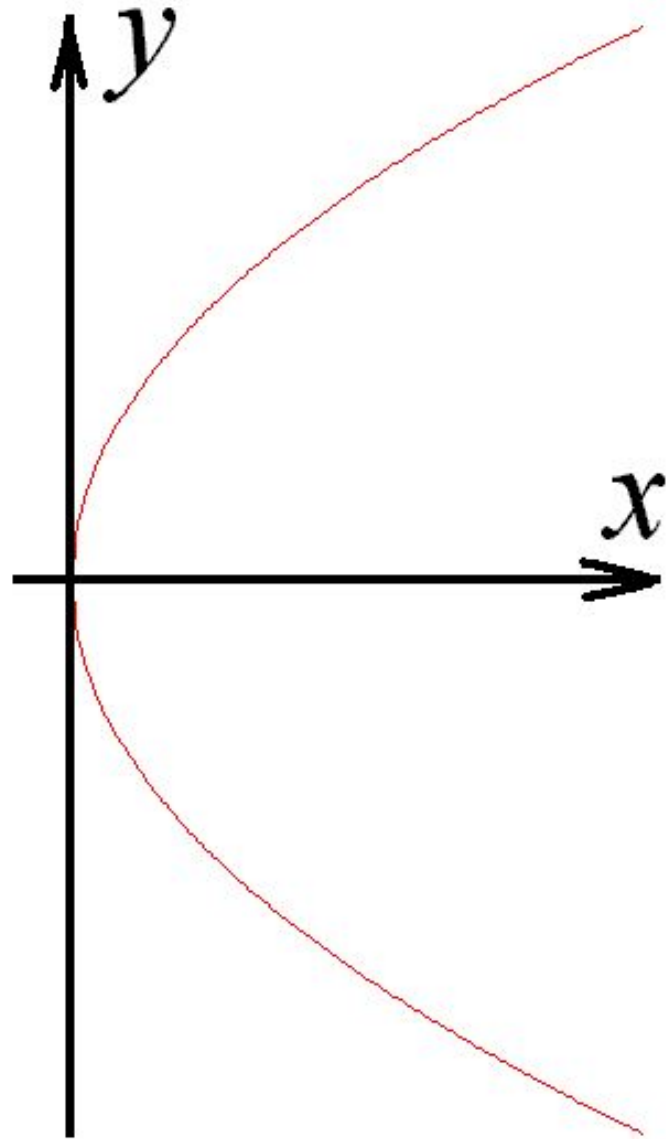


$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

гипербола



$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$



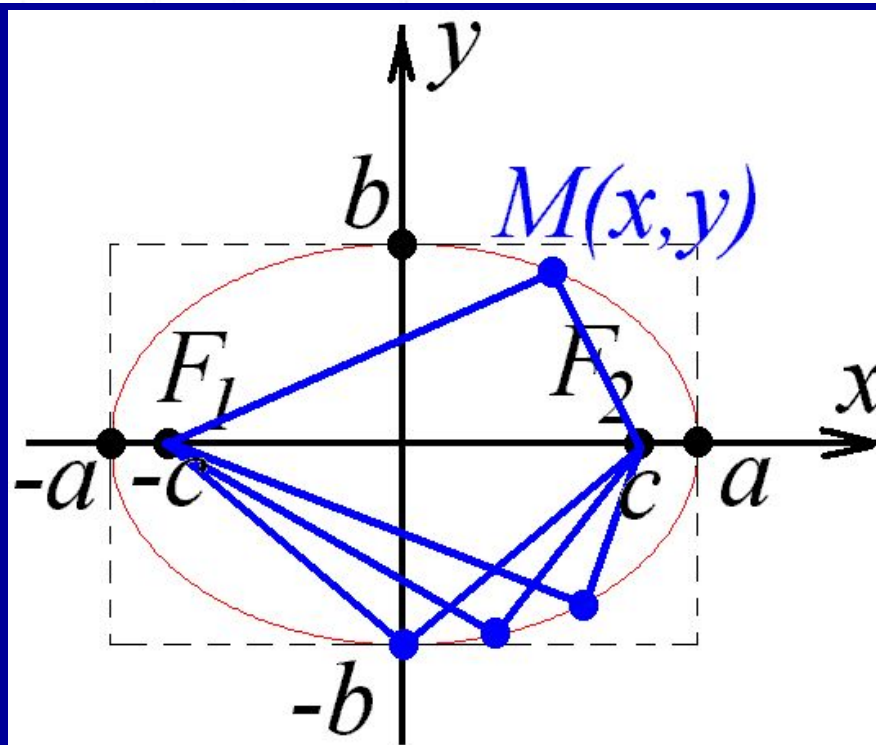
парабола

$$y^2 = 2px$$

Геометрические свойства кривых второго порядка

Сумма расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox , Oy – оси симметрии
 $(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ – вершины



$$b^2 = a^2 - c^2$$

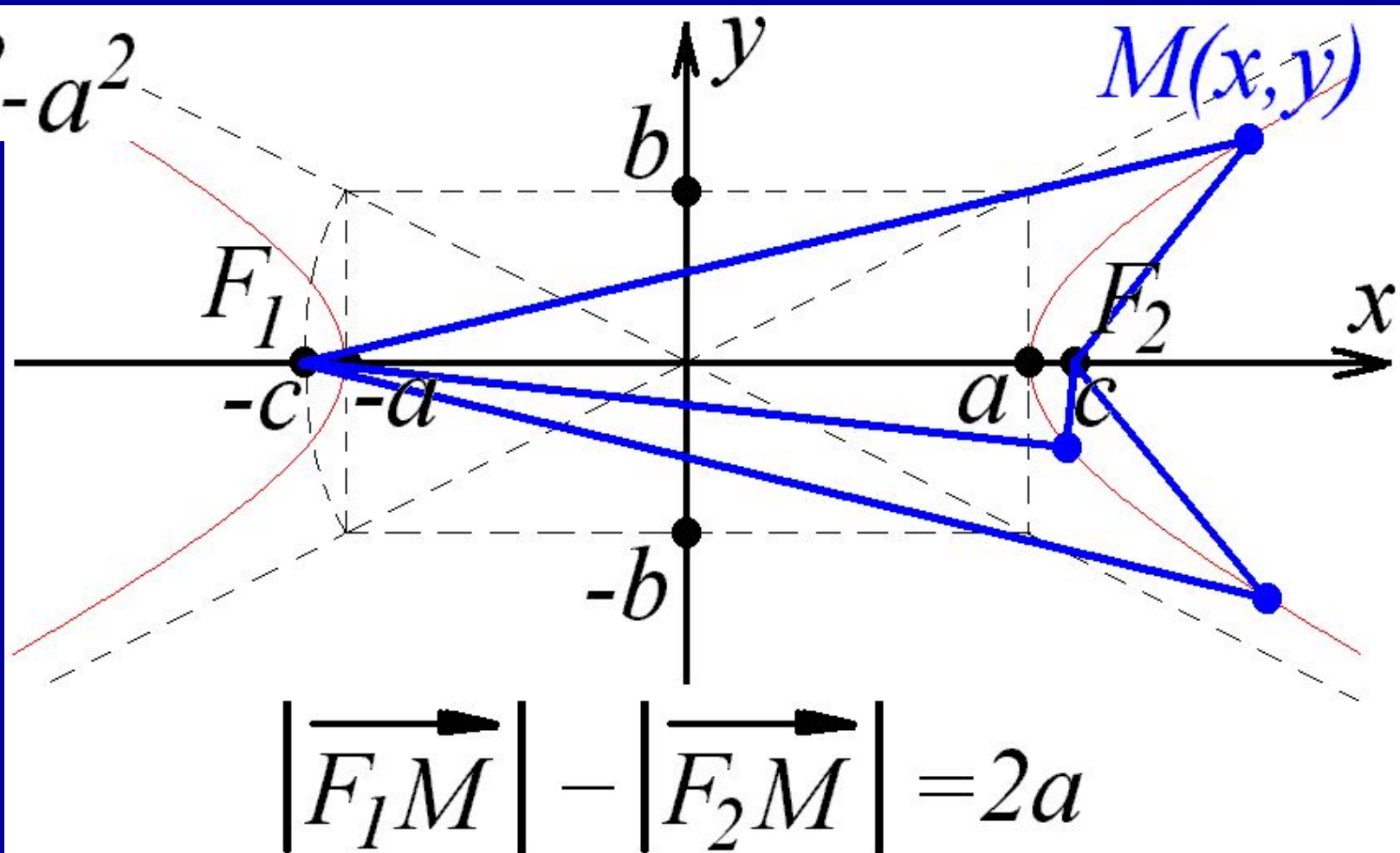
$$|\overrightarrow{F_1M}| + |\overrightarrow{F_2M}| = 2a$$

Разность расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

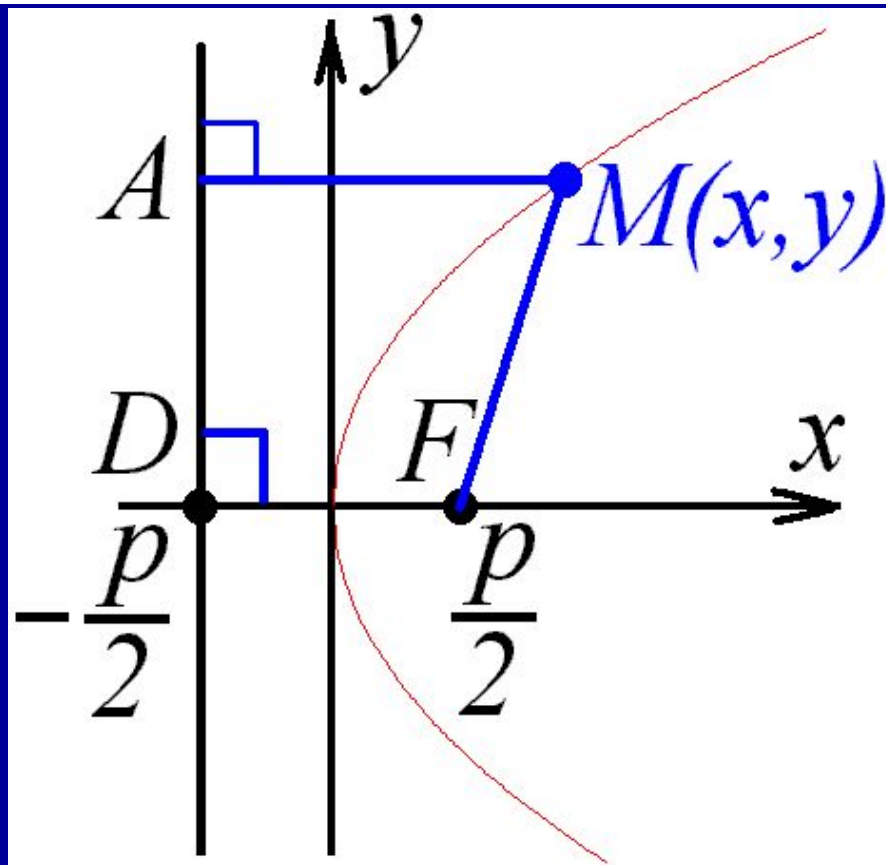
$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox , Oy – оси симметрии;

$(a, 0)$, $(-a, 0)$ – вершины

$$b^2 = c^2 - a^2$$



Расстояние от произвольной точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до директрисы параболы. $F(p/2, 0)$ – фокус, $x = -p/2$ – директриса, Ox – ось симметрии, $(0, 0)$ – вершина.



$$|\vec{FM}| = |\vec{AM}|$$

Различные представления эллипса

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}$$

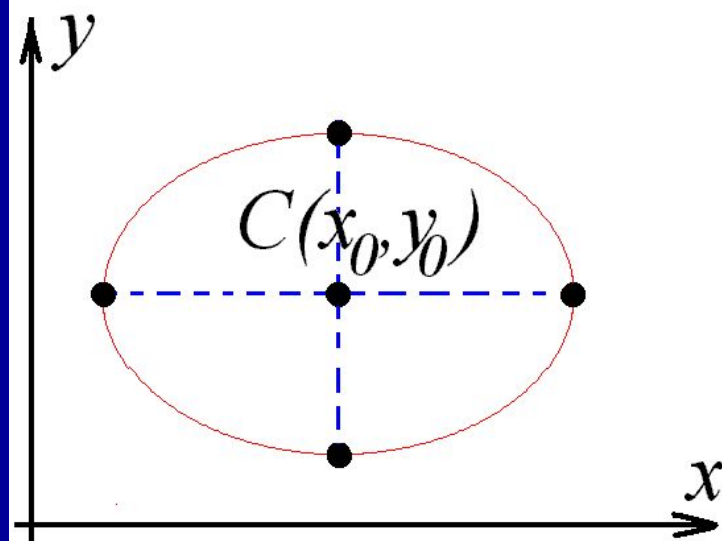
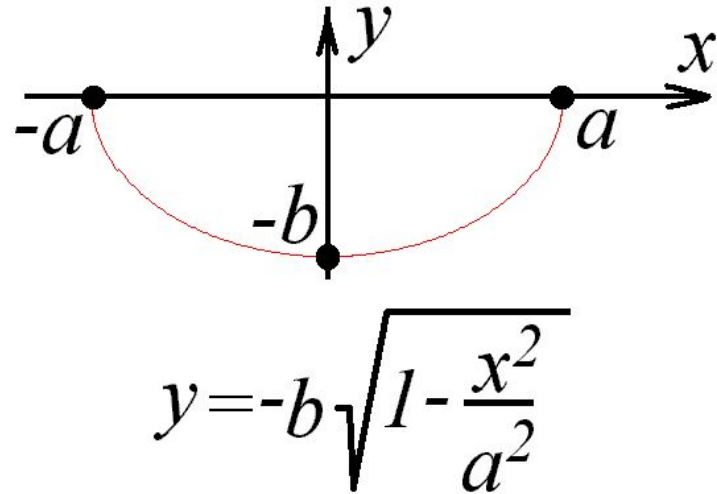
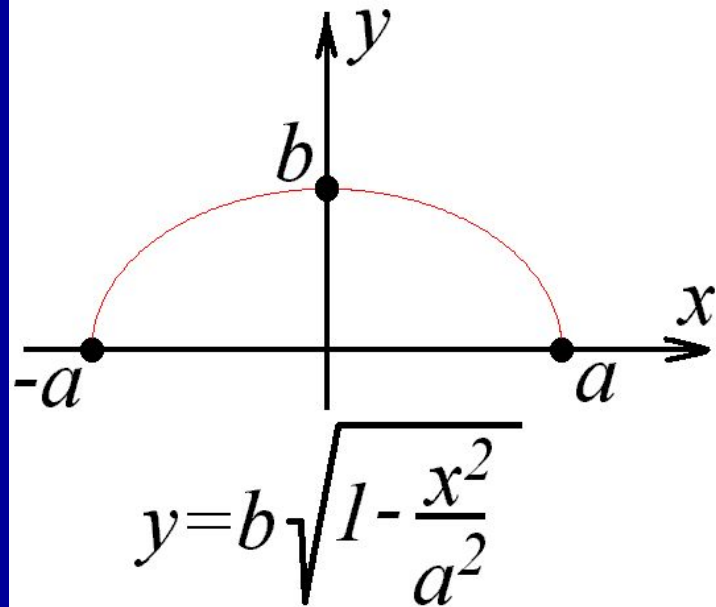
$$\frac{y}{b} = \pm \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad y = \pm b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$$

$$|x| \leq a, \quad -a \leq x \leq a$$

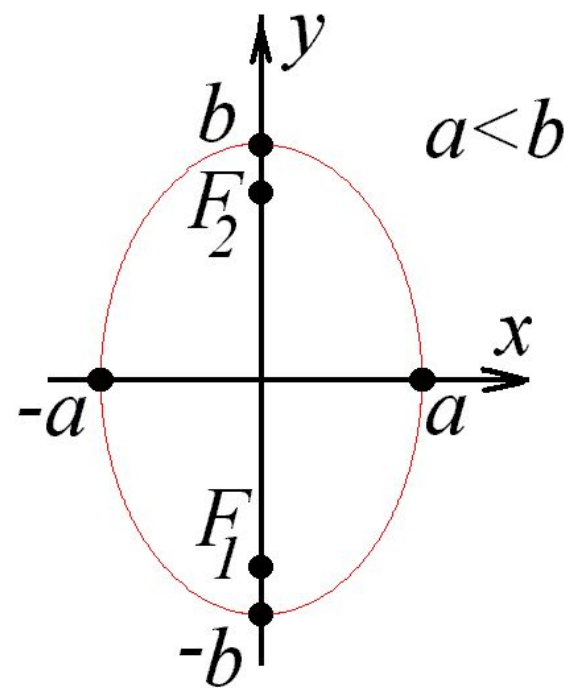
$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

$C(x_0, y_0)$ центр

Если $a < b$, то фокусы F_1, F_2 – на оси Oy



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} + \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



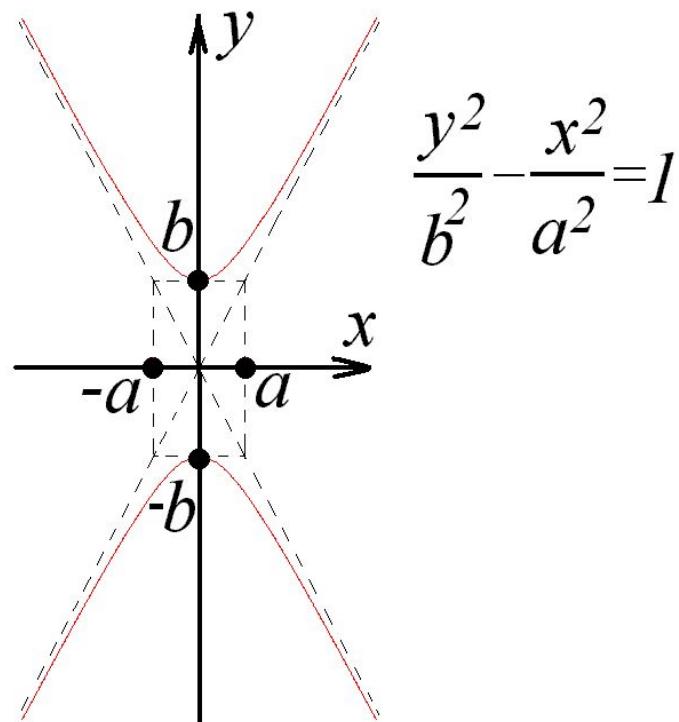
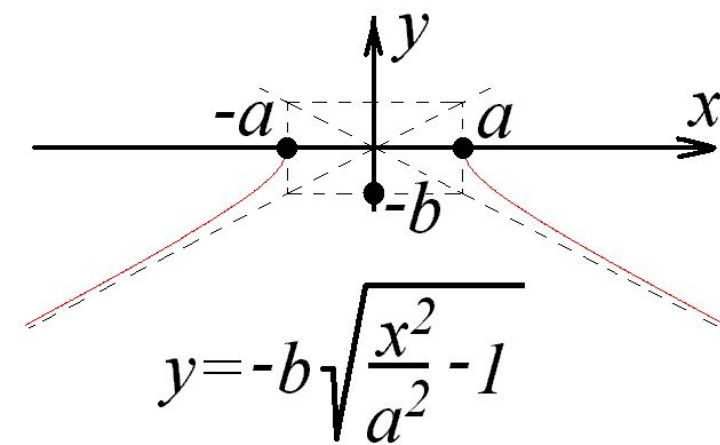
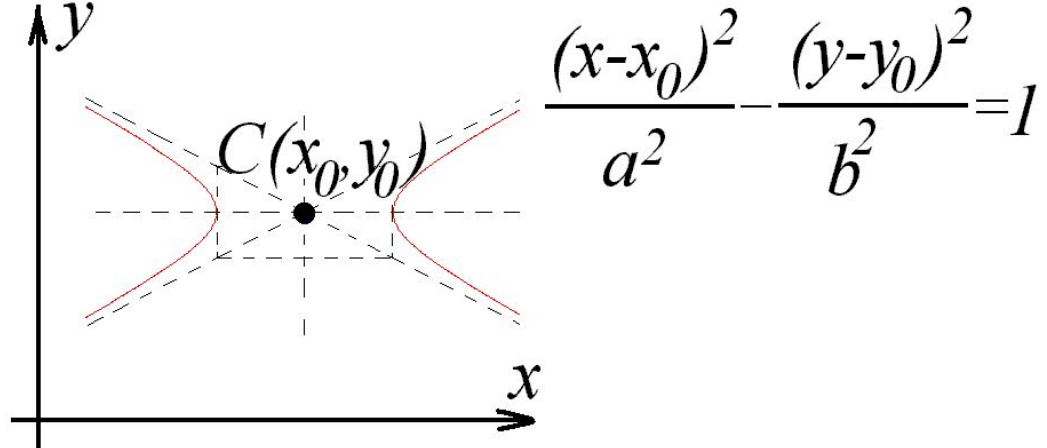
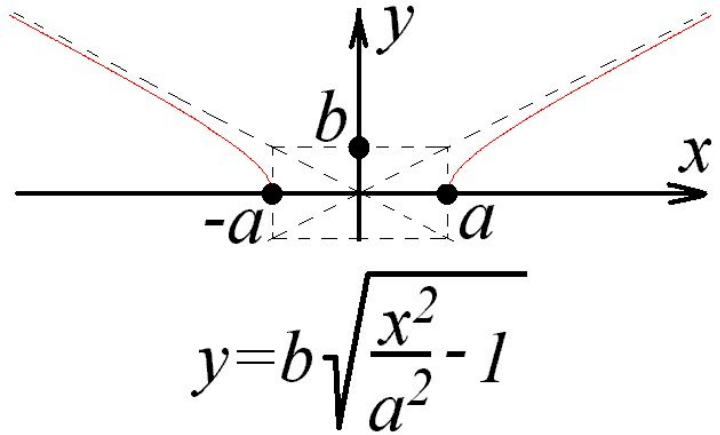
Различные представления гиперболы

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{y^2}{b^2} = \frac{x^2}{a^2} - 1, \quad \frac{y}{b} = \pm \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}, \quad y = \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$
$$|x| \geq a, \quad \text{т.е. } x \leq -a, \quad a \leq x$$

Если x очень большое по модулю, то

$$y \approx \pm b \sqrt{\frac{x^2}{a^2}} = \pm \frac{b}{a} x \quad - \text{асимптоты гиперболы}$$

$$\frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1, \quad C(x_0, y_0) \text{ центр}$$



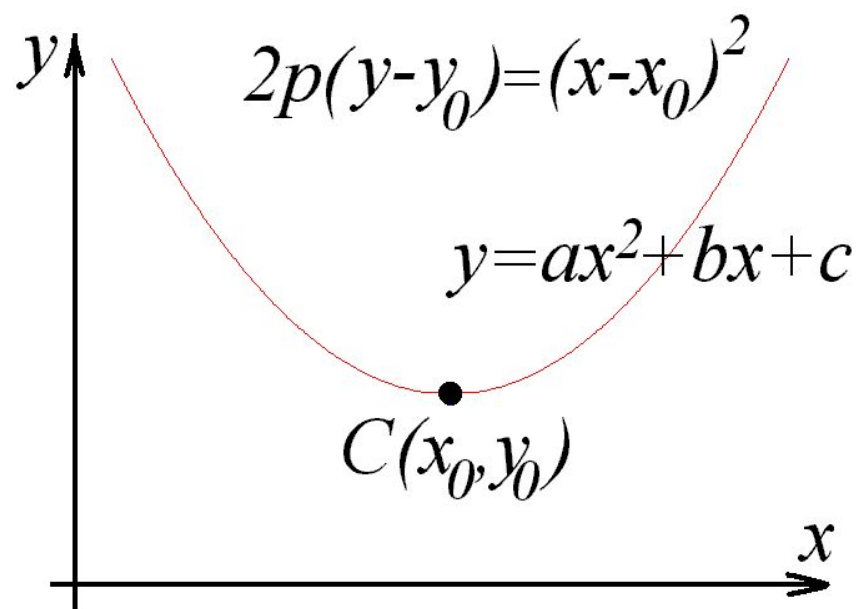
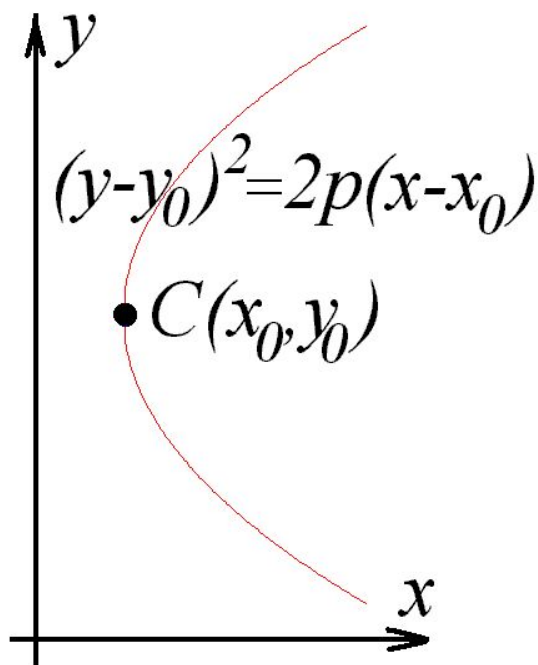
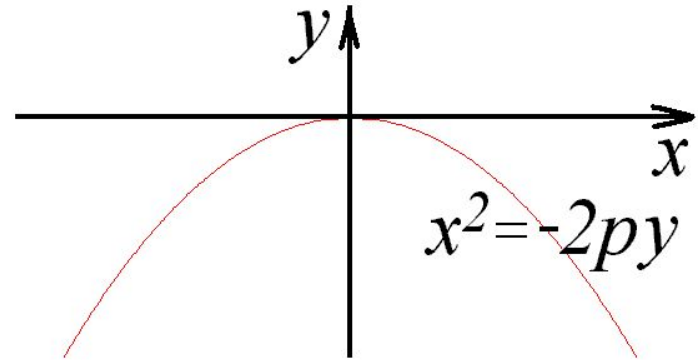
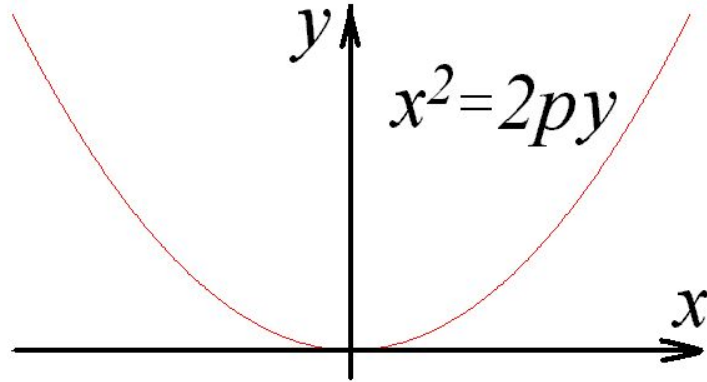
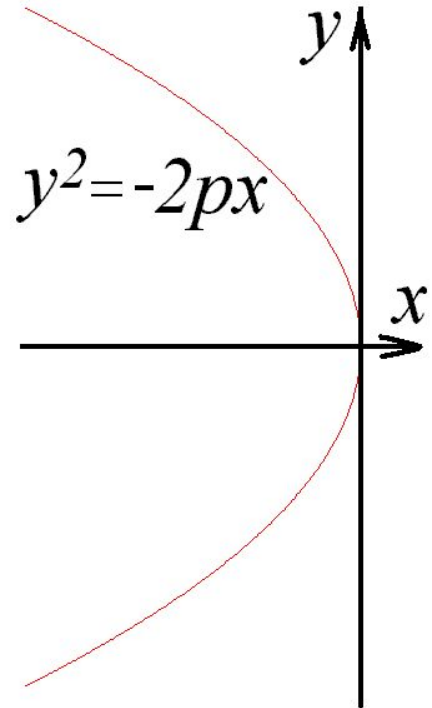
Различные представления параболы

$$y^2 = 2px, \quad x \geq 0; \quad y = \pm\sqrt{2px}$$

$$x^2 = 2py; \quad \forall x, \quad y \geq 0; \quad Oy \text{ – ось симметрии}$$

$C(x_0, y_0)$ – вершина параболы

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0); \quad (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0); \quad y = ax^2 + bx + c$$



Поверхность в трехмерном пространстве

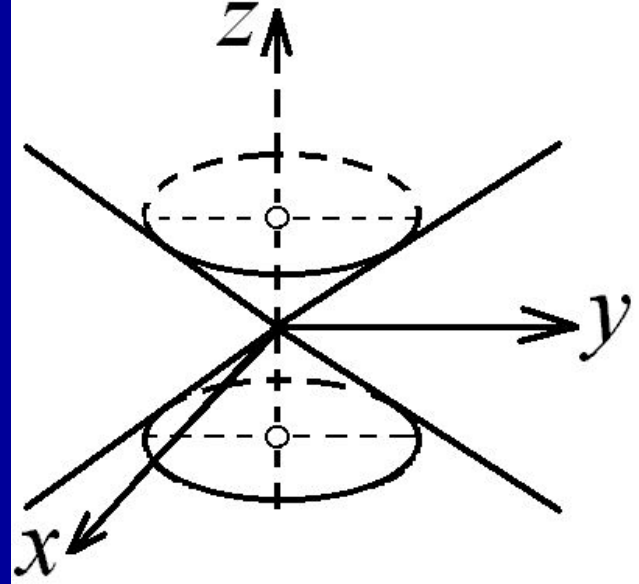
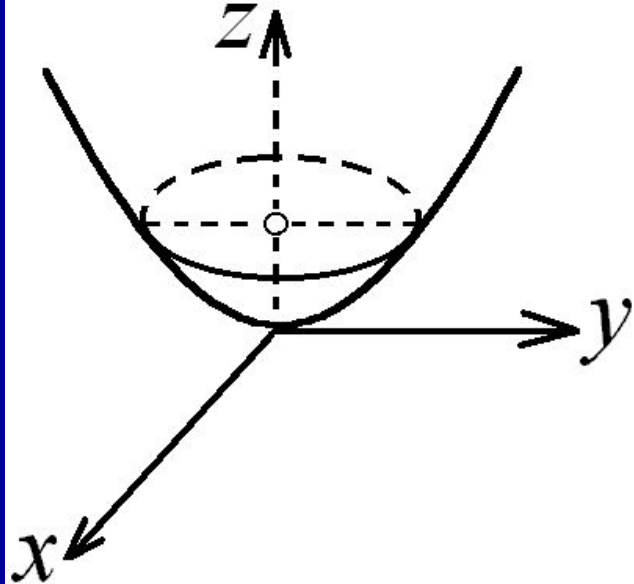
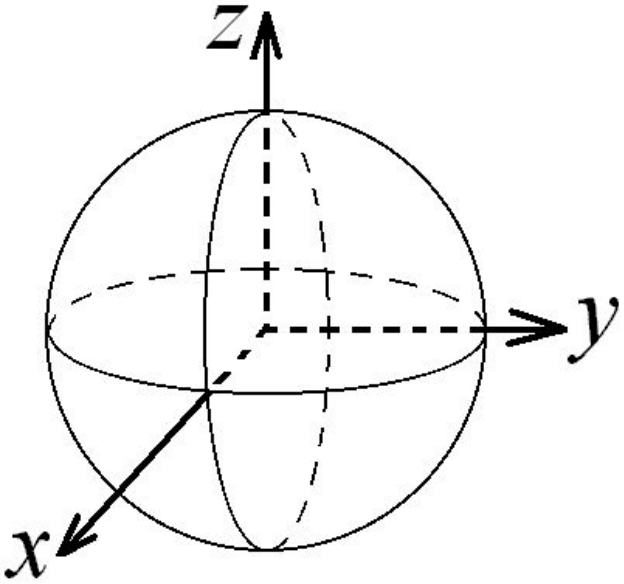
Поверхность (Π) в трехмерном пространстве задается уравнением:

$$(\Pi) : F(x, y, z) = 0$$

где $M(x, y, z)$ – произвольная (текущая) точка на поверхности (Π)

Точка принадлежит поверхности, если ее координаты обращают уравнение поверхности в тождество

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Pi) \iff F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$$



Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$, $x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Параболоид вращения: $z = x^2 + y^2$

Двухполостной конус: $z^2 = x^2 + y^2$

Плоскость в трехмерном пространстве

Теорема. Любая плоскость задается линейным уравнением

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

и наоборот: любое линейное уравнение задает плоскость и вектор $\vec{N} = \{A, B, C\}$ перпендикулярен этой плоскости

$$\vec{N} \perp (\Pi)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы для прямой на плоскости.

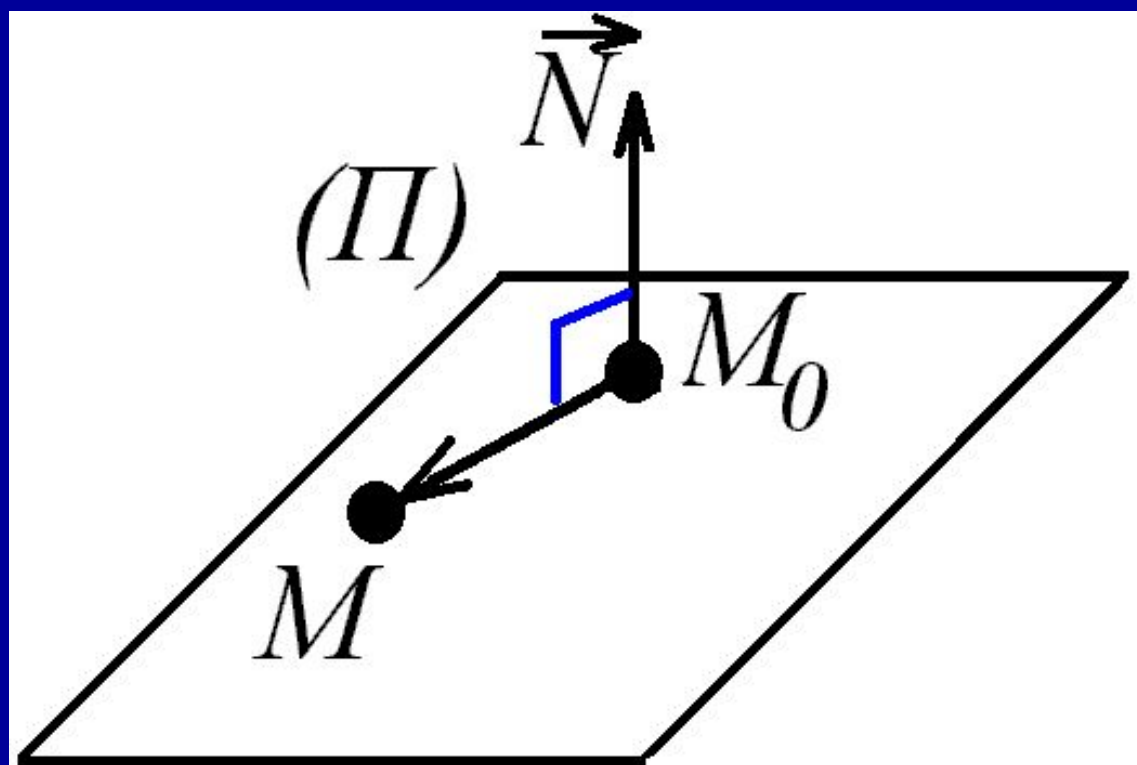
Другие виды задания плоскости

1. Плоскость, проходящая через заданную точку и имеющая заданный нормальный вектор:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Pi), \quad \vec{N} = \{A, B, C\} \perp (\Pi); \quad M(x, y, z) \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \subseteq (\Pi); \quad \overrightarrow{M_0M} \perp \vec{N}; \quad \overrightarrow{M_0M} \cdot \vec{N} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



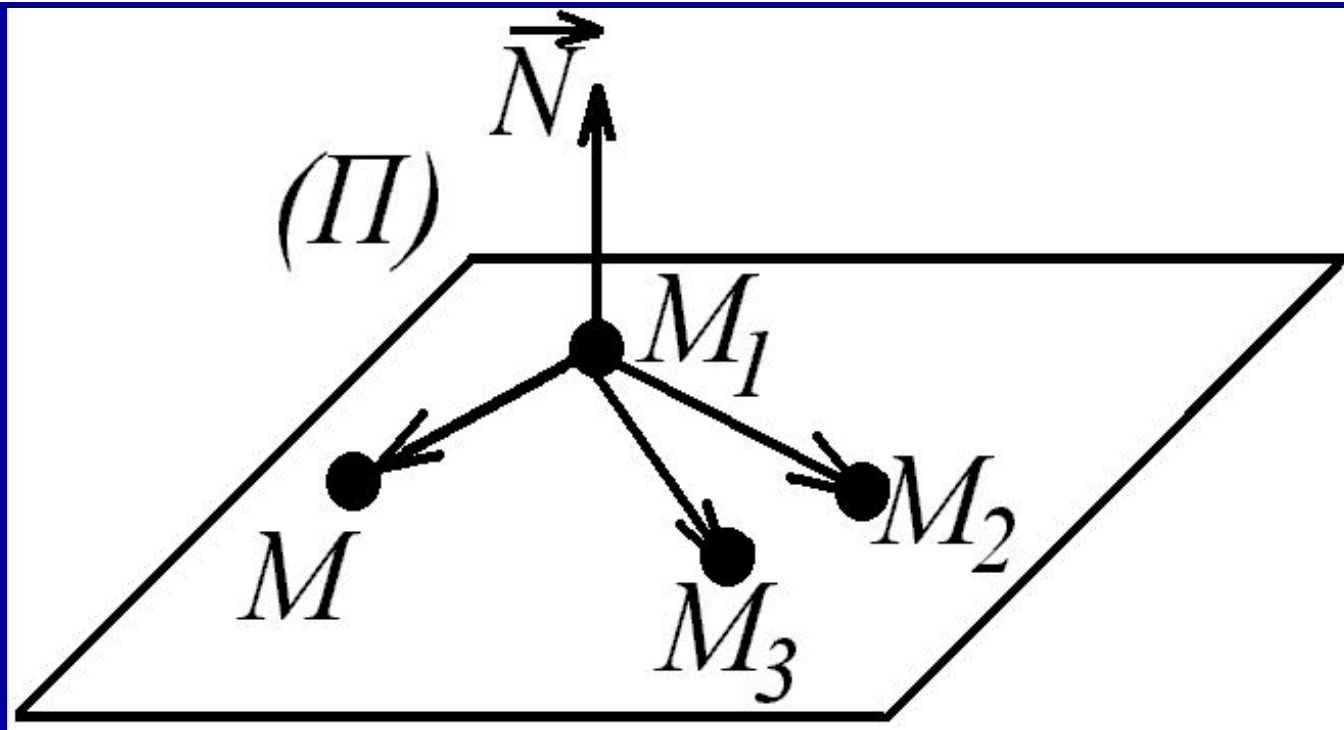
2. Плоскость, проходящая через три заданные точки
 $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (\Pi)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (\Pi)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in (\Pi)$:

$$M(x, y, z) \in (\Pi); \quad \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} \in (\Pi)$$

т.е. векторы компланарны, поэтому



$$\overrightarrow{M_1 M} \cdot \overrightarrow{M_1 M_2} \cdot \overrightarrow{M_1 M_3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} x - x_1 & y - y_1 & z - z_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_1) \begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (y - y_1)(-1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (z - z_1) \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$\vec{N} = \{A, B, C\} = \overrightarrow{M_1 M_2} \times \overrightarrow{M_1 M_3} \perp (\Pi)$$

Взаимное расположение плоскостей

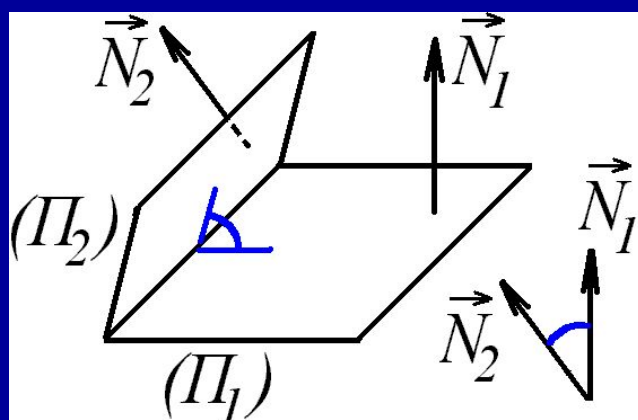
Угол между плоскостями:

$$(\Pi_1): A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \vec{N}_1 = \{A_1, B_1, C_1\} \perp (\Pi_1)$$

$$(\Pi_2): A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \quad \vec{N}_2 = \{A_2, B_2, C_2\} \perp (\Pi_2)$$

$$(\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) = (\widehat{(\Pi_1), (\Pi_2)})$$

$$\begin{aligned} \cos \left((\widehat{(\Pi_1), (\Pi_2)}) \right) &= \cos \left((\widehat{\vec{N}_1, \vec{N}_2}) \right) = \\ &= \frac{\vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2}{|\vec{N}_1| \cdot |\vec{N}_2|} = \frac{A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}} \end{aligned}$$



Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$(\Pi_1) \perp (\Pi_2) \iff \vec{N}_1 \perp \vec{N}_2 \iff \vec{N}_1 \cdot \vec{N}_2 = 0$$

т.е. $A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$

Условие параллельности плоскостей:

$$(\Pi_1) \parallel (\Pi_2) \iff \vec{N}_1 \parallel \vec{N}_2 \iff \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$

Точка пересечения трех плоскостей:

$$(\Pi_1) : A_1 x + B_1 y + C_1 z + D_1 = 0$$

$$(\Pi_2) : A_2 x + B_2 y + C_2 z + D_2 = 0$$

$$(\Pi_3) : A_3 x + B_3 y + C_3 z + D_3 = 0$$

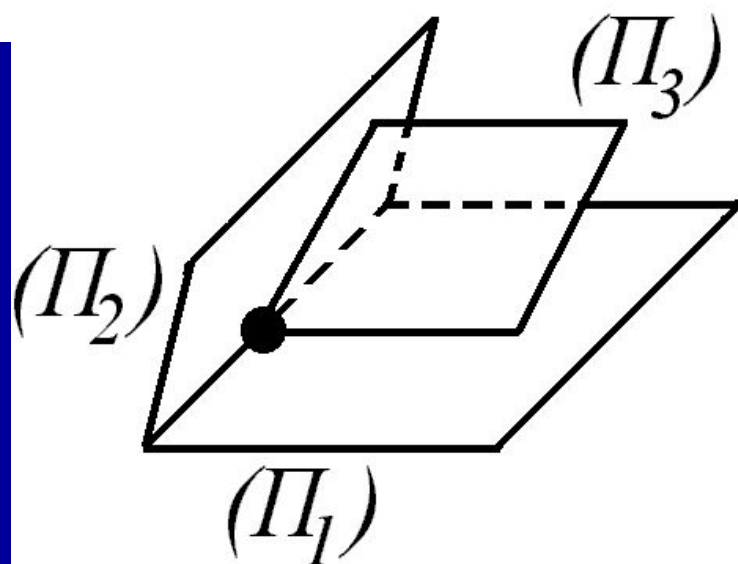
Если точка M_0 лежит на каждой из трех плоскостей

$$M_0 \in (\Pi_1), \quad M_0 \in (\Pi_2), \quad M_0 \in (\Pi_3),$$

то неизвестные координаты (x, y, z) этой точки M_0 должны удовлетворять всем трем уравнениями, т.е. уравнения должны выполняться одновременно:

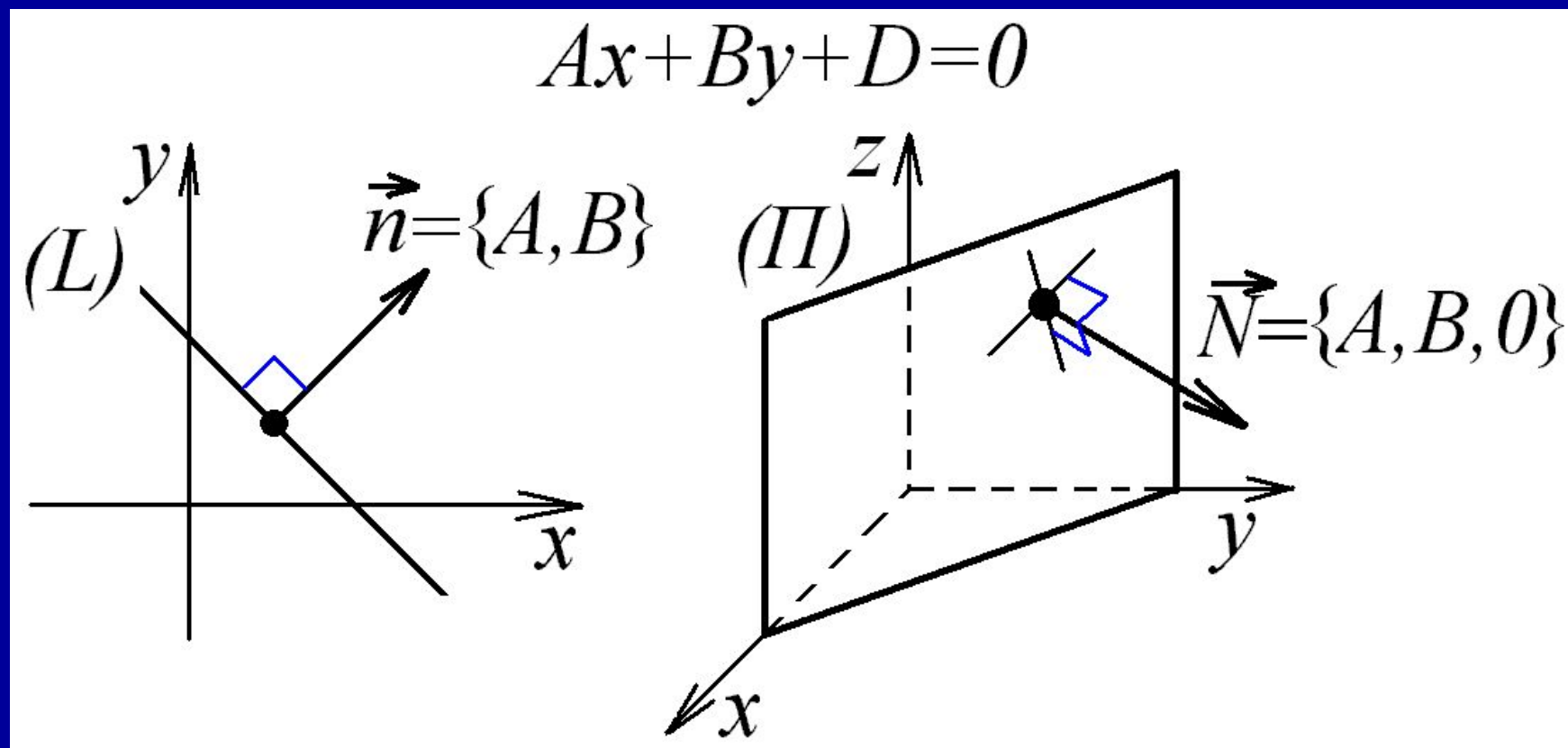
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

неизвестные координаты (x, y, z) должны быть решениями этой СЛАУ.



Прямая в пространстве

Уравнение $Ax + By + D = 0$ на плоскости xOy задает прямую, а в трехмерном пространстве – плоскость, параллельную оси Oz .



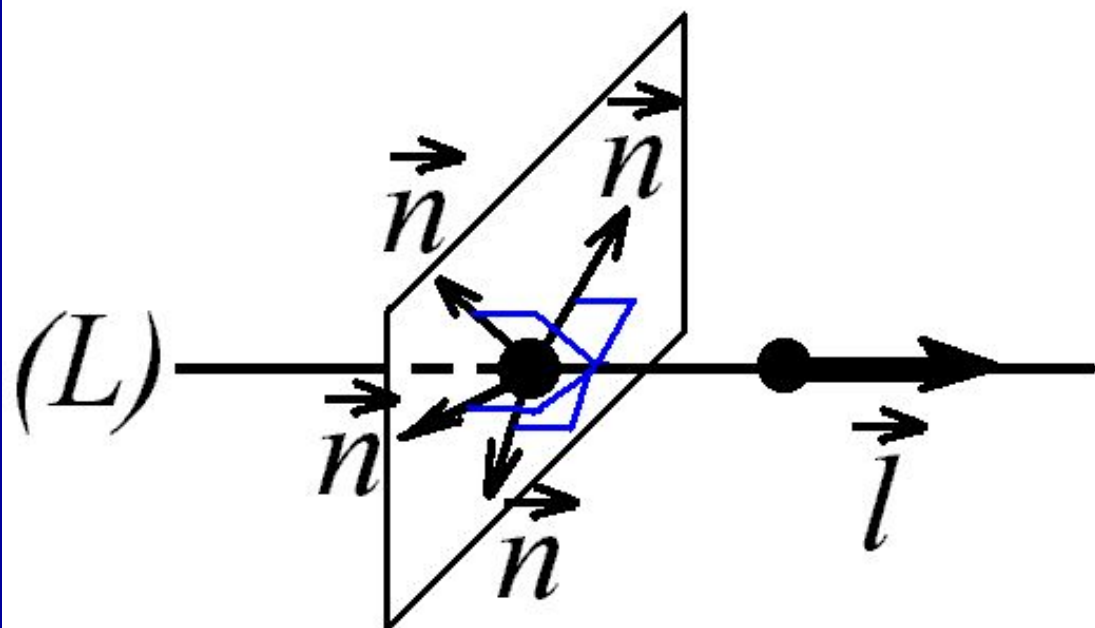
Поэтому прямая в трехмерном пространстве аналитически задается по-другому!!

Пусть задана прямая (L) .

К прямой в пространстве можно провести много нормальных векторов, которые образуют целую плоскость, перпендикулярную заданной прямой.

Поэтому для прямой (L) задается направляющий вектор:

тор: $\vec{\ell} \parallel (L); \vec{\ell} = \{m, p, s\}, |\vec{\ell}| = \sqrt{m^2 + p^2 + s^2} \neq 0$

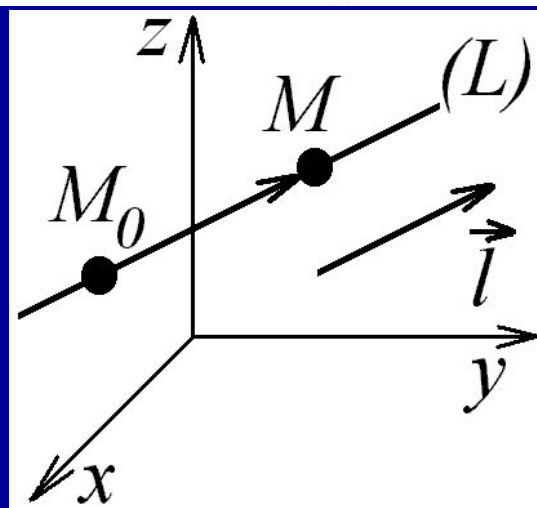


Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (L)$ – конкретная точка на прямой (L) .

Пусть $M(x, y, z) \in (L)$ – текущая точка на прямой (L) .

Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{\ell}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0; y - y_0; z - z_0\} \parallel (L)$



Поэтому прямая в пространстве задается в виде

$$(L) : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{s} \quad (1)$$

В знаменателях в (1) могут стоять нули!!

Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{s} = t$$

Тогда

$$\frac{x - x_0}{m} = t, \quad \frac{y - y_0}{p} = t, \quad \frac{z - z_0}{s} = t$$

т.е.

$$x - x_0 = mt, \quad y - y_0 = pt, \quad z - z_0 = st$$

или

$$(L) : \begin{cases} x = mt + x_0, \\ y = pt + y_0, \\ z = st + z_0 \end{cases} \quad (2)$$

t – параметр – новая независимая переменная, которая может принимать любые действительные значения.

Задание прямой в пространстве с помощью двух пересекающихся плоскостей

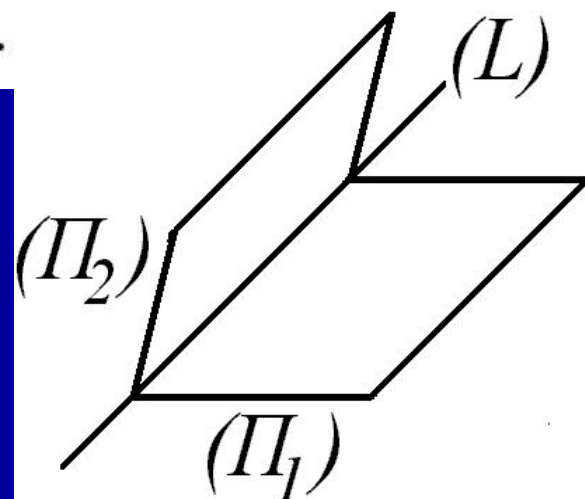
Пусть заданы две плоскости:

$$(\Pi_1) : A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad (\Pi_2) : A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0$$

Тогда система двух уравнений

$$(L) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0, \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases} \quad (3)$$

задает прямую в пространстве – множество точек, одновременно лежащих на обеих плоскостях.



Теорема. Все три вида задания прямой в пространстве эквивалентны.

Эквивалентность (1), (2) показана выше.

Осталось показать эквивалентность (1), (3).

(1) \implies (3):

Пусть заданы канонические уравнения прямой

$$(L) : \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{s}$$

т.е., в частности, заданы такие два уравнения

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} \\ \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{s} \end{array} \right\} \parallel \begin{array}{l} \text{это линейные уравнения} \\ \text{относительно } x, y, z, \\ \text{поэтому каждое из них задает} \\ \text{свою плоскость,} \\ \text{первая} - \parallel Oz, \text{ вторая} - \parallel Ox \end{array}$$

Прямая в пространстве, проходящая через две точки

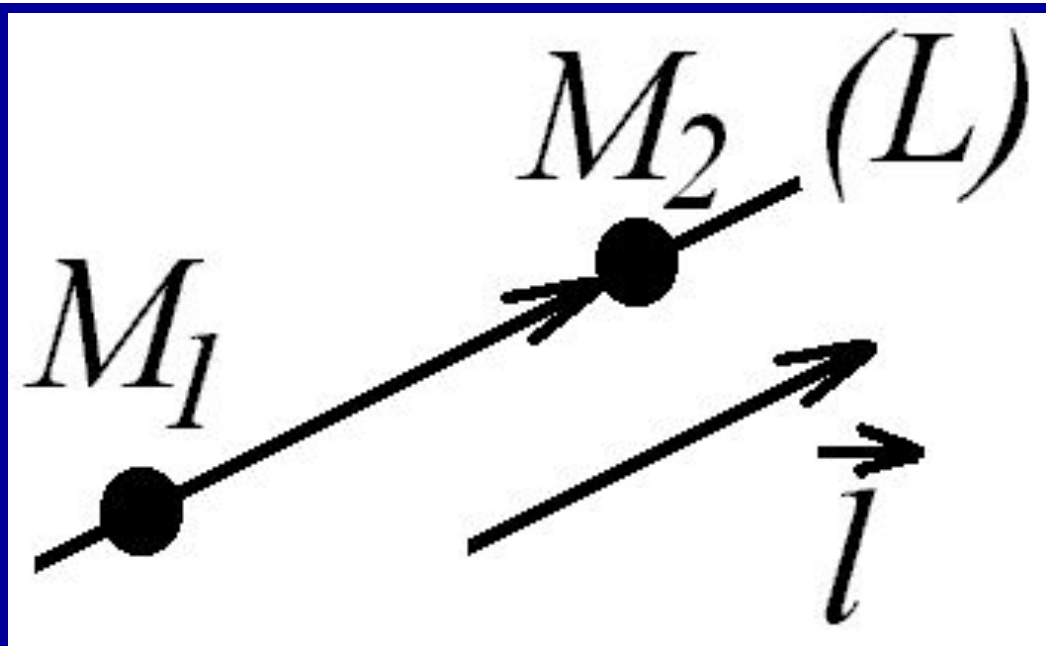
Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (L)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (L)$

Тогда вектор

$$\vec{\ell} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \parallel (L)$$

Поэтому

$$(L) : \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



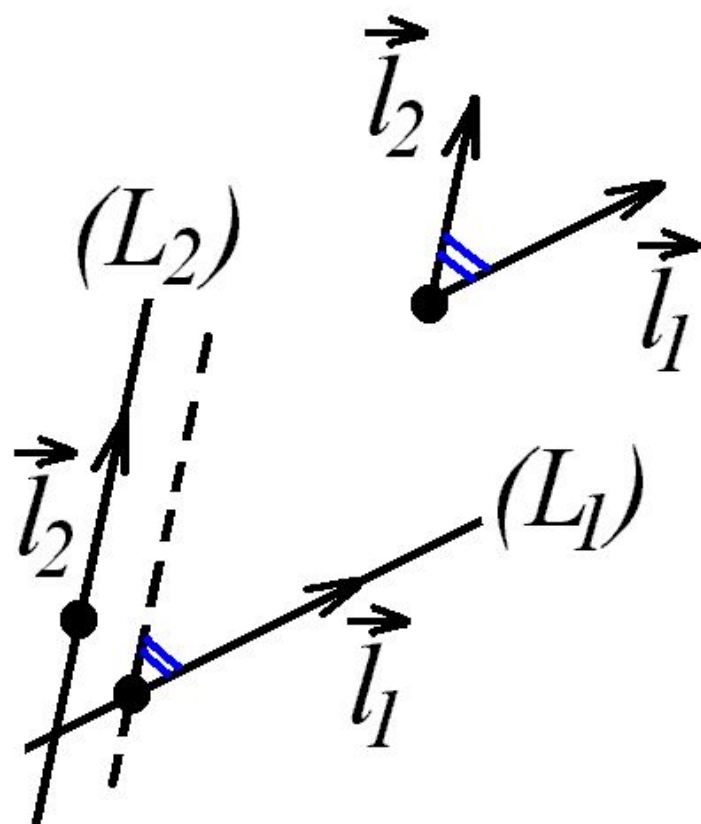
Взаимное расположение двух прямых

Даны (L_1) , (L_2) :

$$\vec{\ell}_1 = \{m_1, p_1, s_1\} \parallel (L_1); \quad \vec{\ell}_2 = \{m_2, p_2, s_2\} \parallel (L_2)$$

Угол между прямыми равен углу между направляющими векторами:

$$\widehat{(L_1), (L_2)} = \widehat{\vec{\ell}_1, \vec{\ell}_2}$$

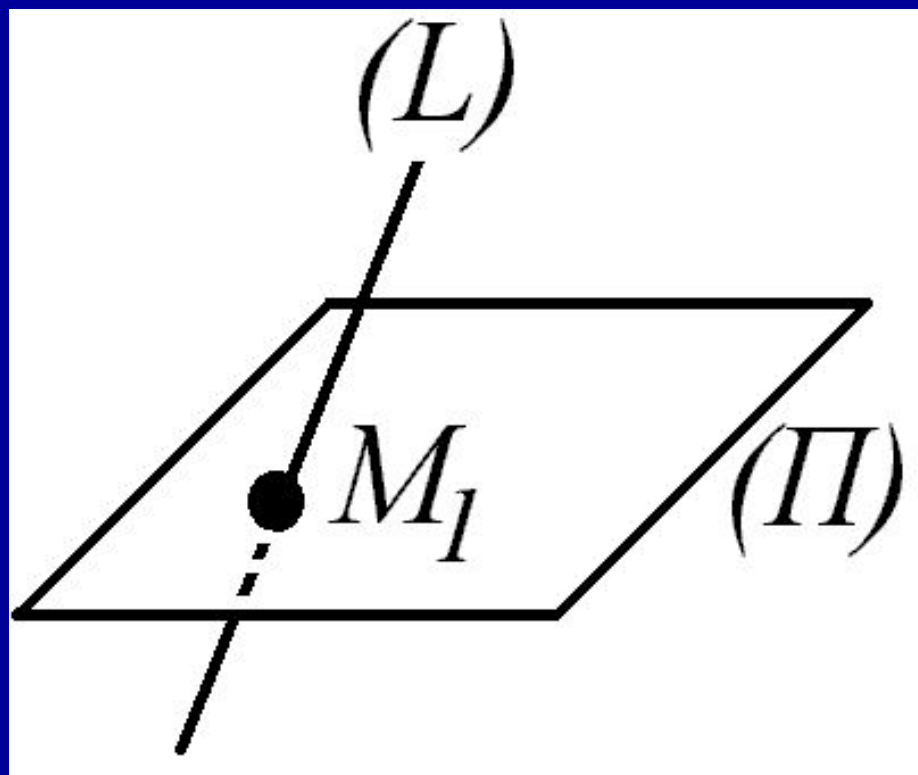


$$\cos(\widehat{\vec{l}_1, \vec{l}_2}) = \frac{\vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2}{|\vec{l}_1| \cdot |\vec{l}_2|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + s_1 s_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + s_2^2}}$$

$$(L_1) \perp (L_2) \iff \vec{l}_1 \perp \vec{l}_2 \iff \vec{l}_1 \cdot \vec{l}_2 = 0 \iff m_1 m_2 + p_1 p_2 + s_1 s_2 = 0$$

$$(L_1) \parallel (L_2) \iff \vec{l}_1 \parallel \vec{l}_2 \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{s_1}{s_2}$$

Точка пересечения прямой и плоскости



Пусть прямая (L) задана в виде (3):

$$(L) : \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

и задана плоскость

$$(П): \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Поскольку искомая точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит и на прямой, и на плоскости, то ее координаты должны удовлетворять СЛАУ:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Если $\Delta \neq 0$, то $\exists!$ решение СЛАУ $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ – координаты точки M_1 .

$\exists!$ - существует и единственное

Другой способ определения $M_1(x_1, y_1, z_1)$:
прямая берется в параметрическом виде (2)

$$(L) : \begin{cases} x = m t + x_0 \\ y = p t + y_0 \\ z = s t + z_0 \end{cases}$$

и выражения для x, y, z подставляются в уравнение заданной плоскости

$$A(m t + x_0) + B(p t + y_0) + C(s t + z_0) + D = 0$$

Получилось одно уравнение для одной неизвестной t .
Его решение $t = t_1$ при подстановке в параметрические уравнения дает координаты искомой точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1) : x_1 = m t_1 + x_0, \quad y_1 = p t_1 + y_0, \quad z_1 = s t_1 + z_0$$