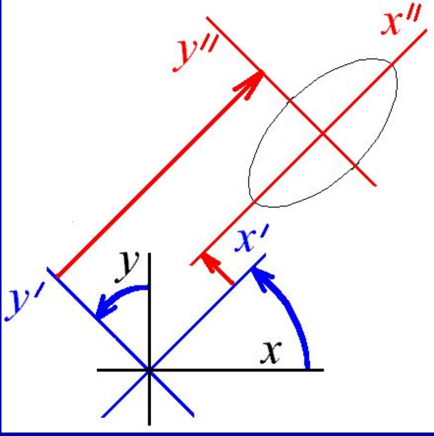
Лекция № 3.



Кривые второго порядка

Линейные уравнения $Ax + By + D = 0$
задают прямые на плоскости
Уравнения второго порядка

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0; \quad A, B, C, D, E, F \ - \mathrm{const}$$

задают на плоскости **кривые второго порядка**
С помощью **поворота координатных осей** и **параллельного переноса** системы координат можно оси симметрии кривой сделать новыми осями координат, а новое начало координат поместить центр симетрии кривой второго порядка

Переход от старой системы к новой осуществляется с помощью **линейных функций**

В новой системе координат уравнение будет иметь **канонический вид**

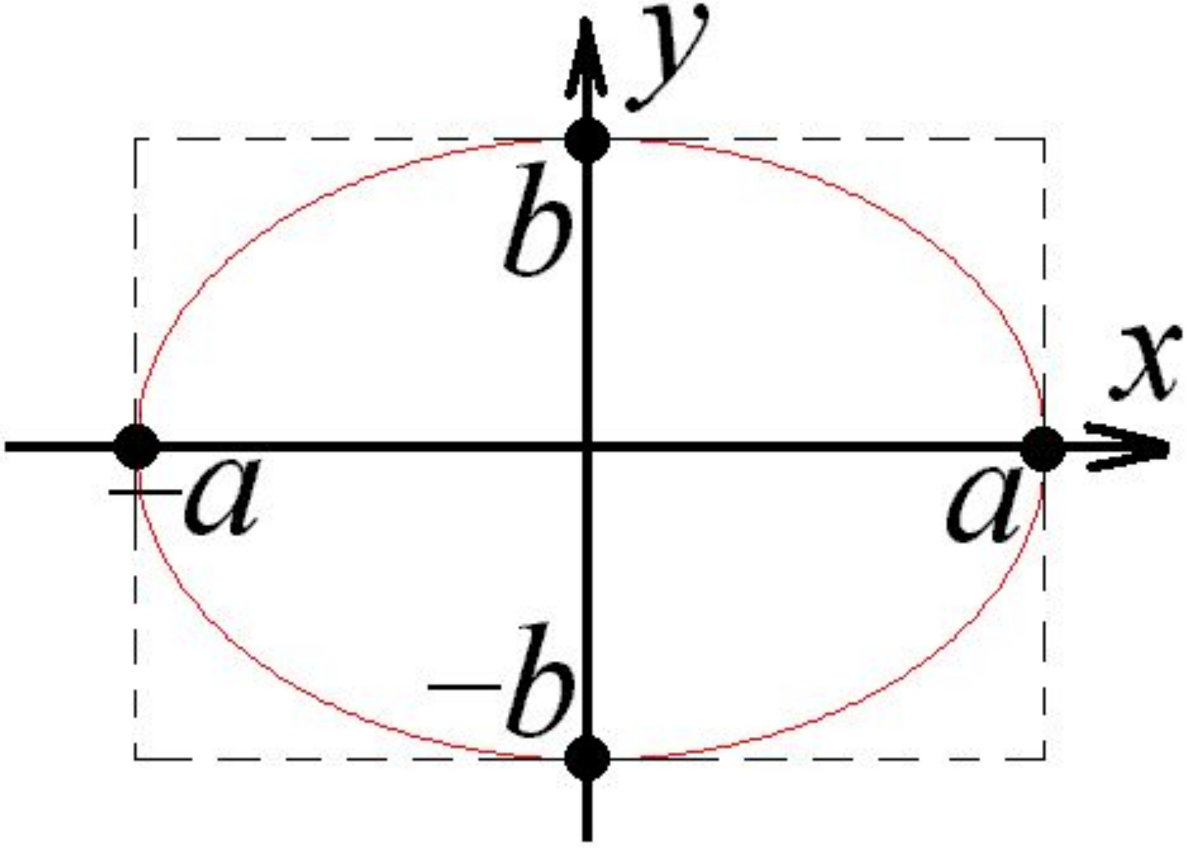
Если не вырожденный случай, то кривых второго порядка всего три:

$$\text{эллипс}\ :\quad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1;\quad a,b=\mathrm{const}>0,\quad a>b$$

$$\text{гипербола}\ :\quad \frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad a,b=\mathrm{const}>0$$

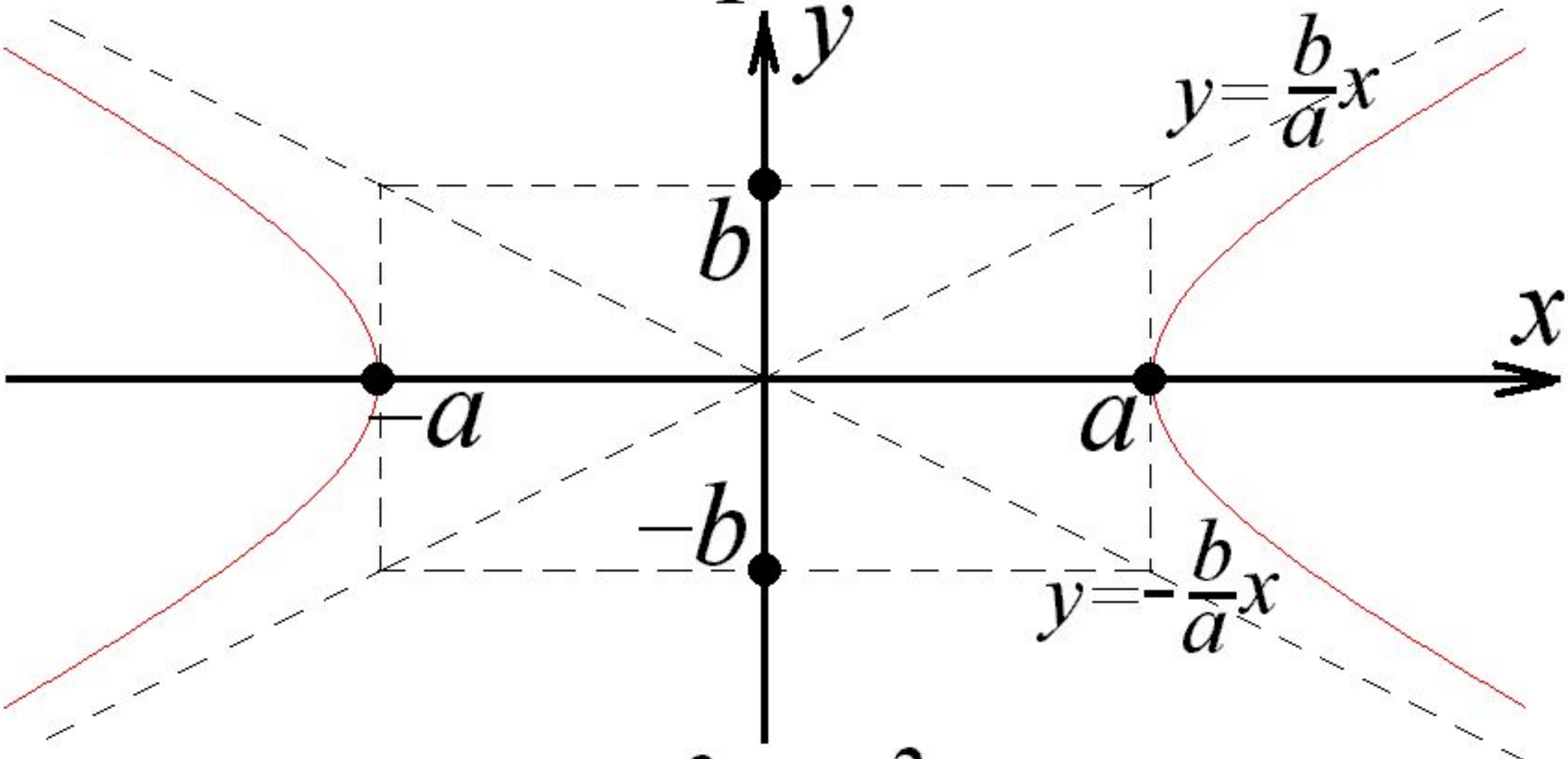
$$\text{парабола}\ :\quad y^2=2px,\quad p=\mathrm{const}>0$$

эллипс

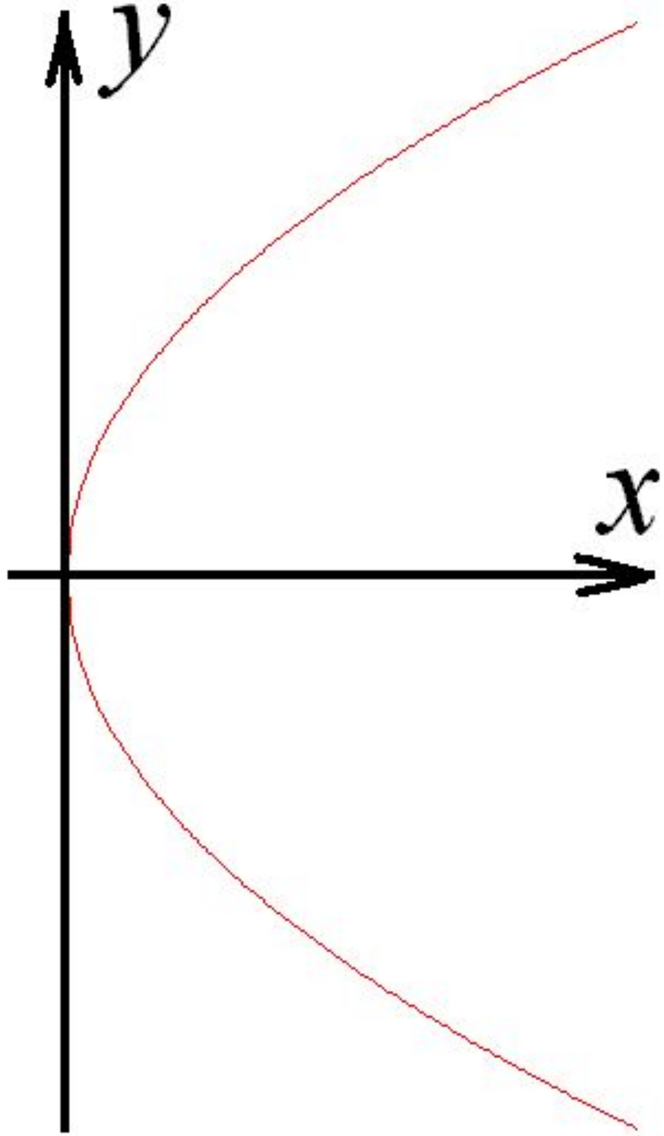


$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

гипербола



$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$$



парабола

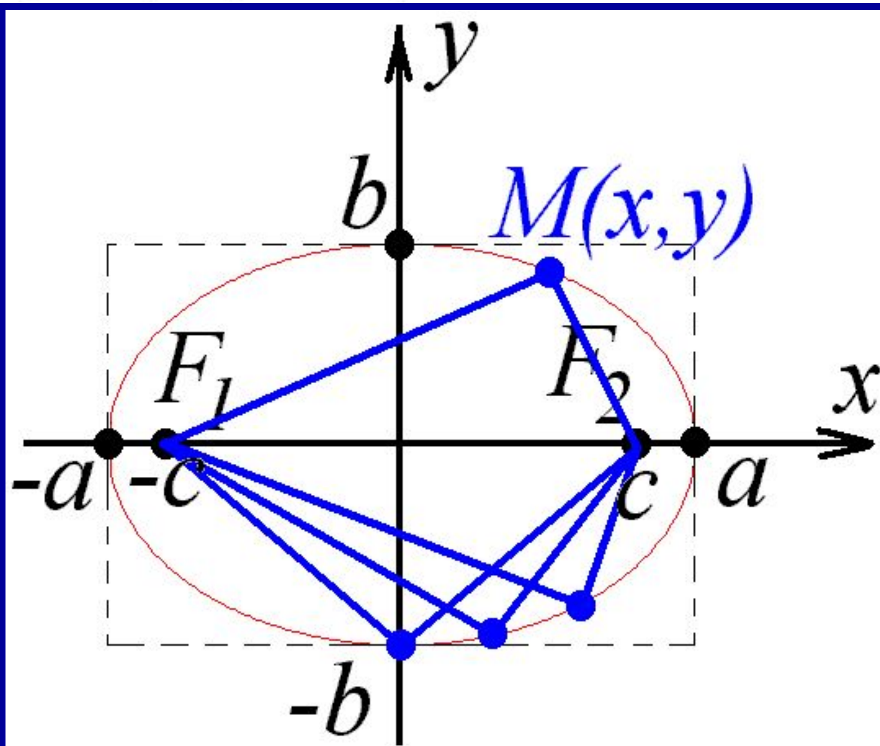
$$y^2 = 2px$$

Геометрические свойства кривых второго порядка

Сумма расстояний от произвольной точки эллипса до его фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox, Oy – оси симметрии

$(a, 0)$, $(-a, 0)$, $(0, b)$, $(0, -b)$ – вершины



$$b^2 = a^2 - c^2$$

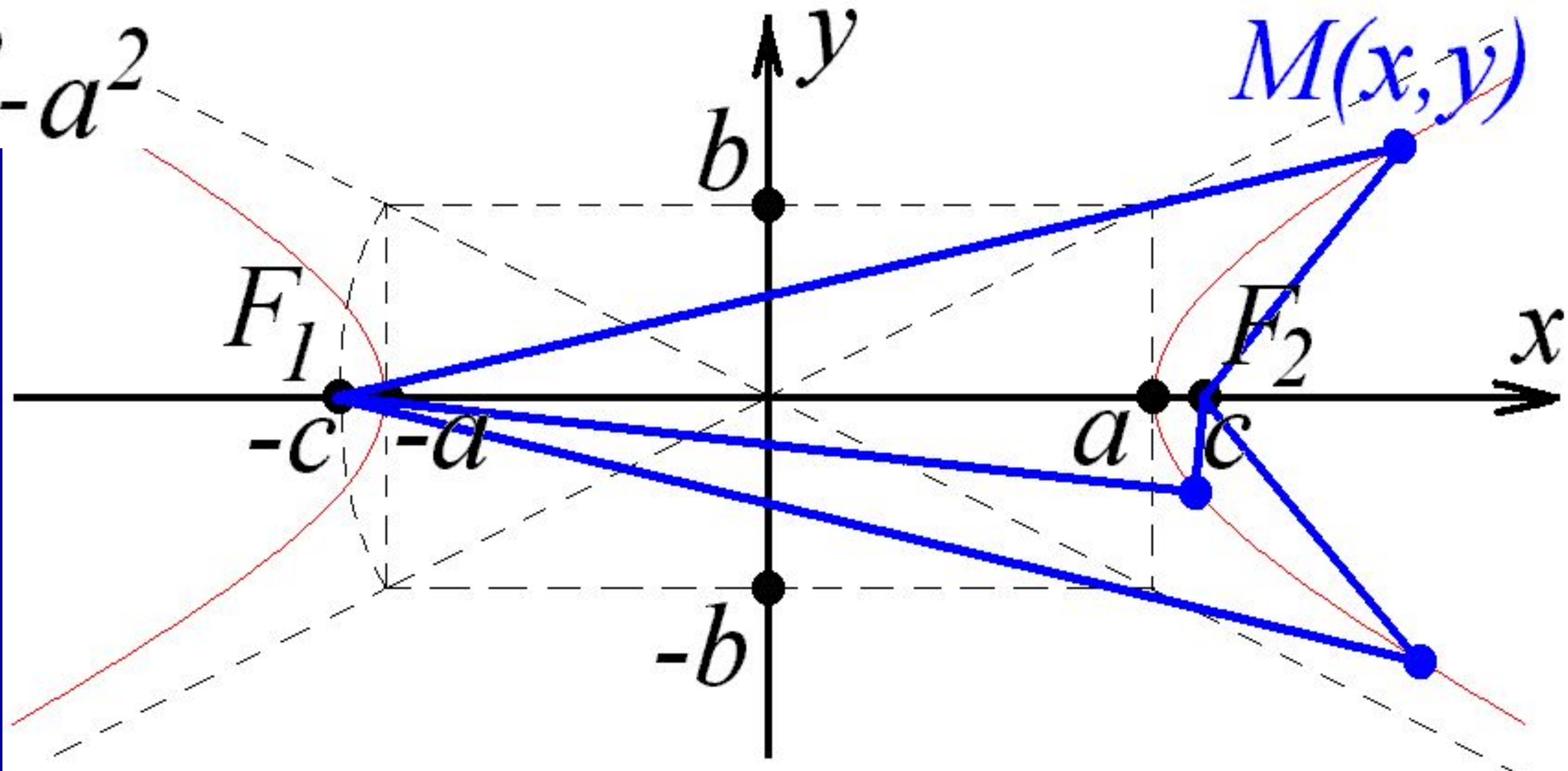
$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| + \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$$

Разность расстояний от произвольной точки гиперболы до ее фокусов есть величина постоянная, равная $2a$.

$F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$ – фокусы; Ox, Oy – оси симметрии;

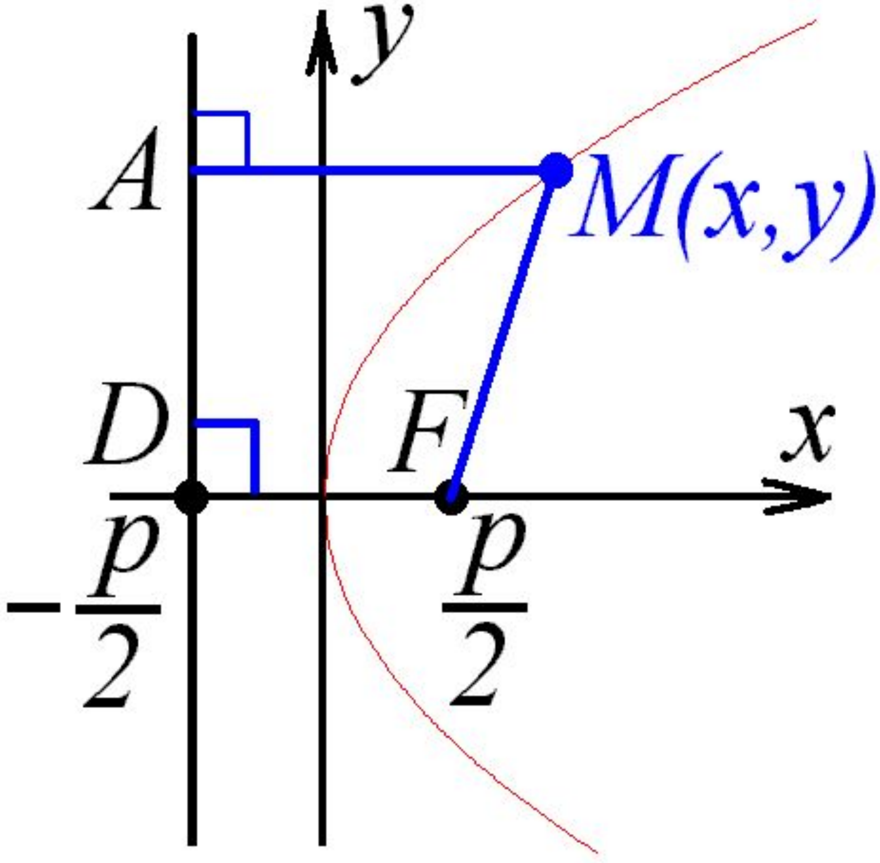
$(a, 0)$, $(-a, 0)$ – вершины

$$b^2 = c^2 - a^2$$



$$\left|\overrightarrow{F_1M}\right| - \left|\overrightarrow{F_2M}\right| = 2a$$

Расстояние от произвольной точки параболы до ее фокуса равно расстоянию от этой точки до **директрисы** параболы. $F(p/2, 0)$ – фокус, $x = -p/2$ – директриса, Ox – ось симметрии, $(0, 0)$ – вершина.



$$\left|\overrightarrow{FM}\right| = \left|\overrightarrow{AM}\right|$$

Различные представления эллипса

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1, \quad \frac{y^2}{b^2}=1-\frac{x^2}{a^2}$$

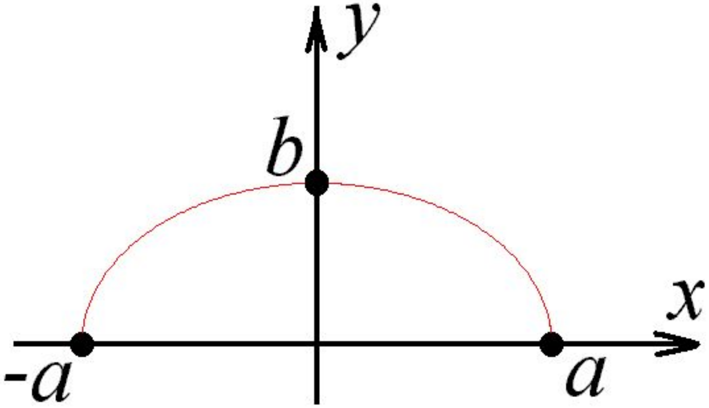
$$\frac{y}{b}=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}, \quad y=\pm b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$

$$|x|\le a, \quad -a\le x\le a$$

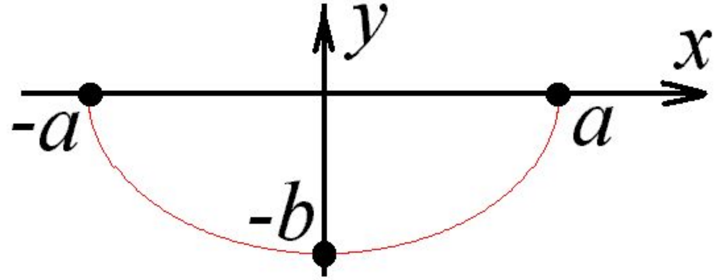
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$

$$C(x_0,y_0) \ \text{центр}$$

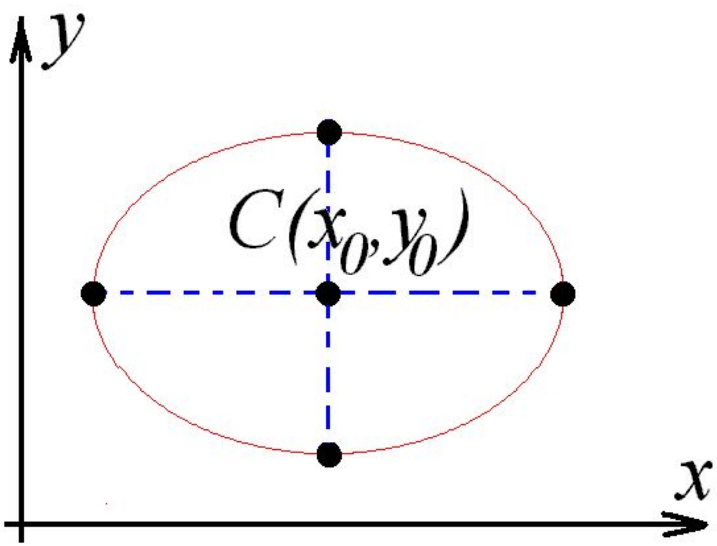
Если $a<b$, то фокусы F_1, F_2 – на оси Oy



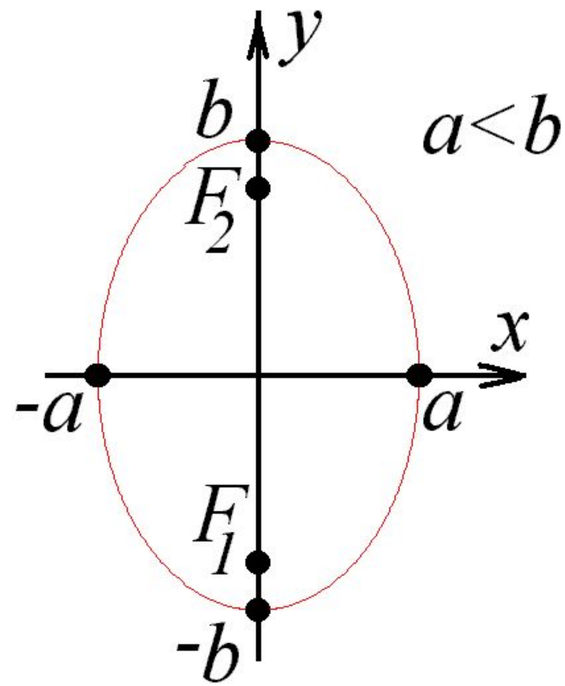
$$y=b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$



$$y=-b\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}+\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1$$



Различные представления гиперболы

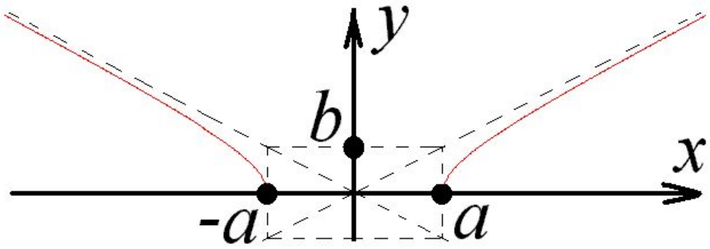
$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1,\quad \frac{y^2}{b^2}=\frac{x^2}{a^2}-1,\quad \frac{y}{b}=\pm\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1},\quad y=\pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}-1}$$

$$|x|\geq a,\quad \text{т.е.}\quad x\leq -a,\quad a\leq x$$

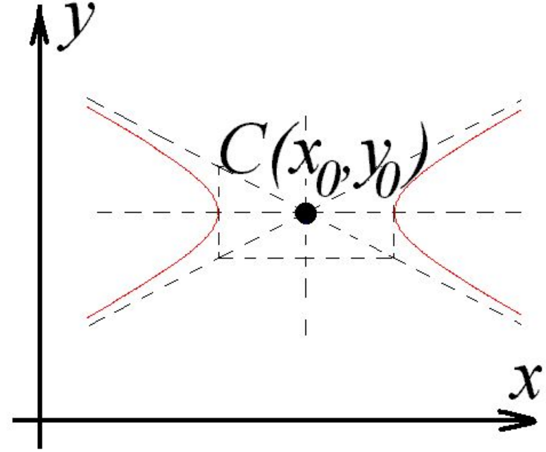
Если x очень большое по модулю, то

$$y\approx \pm b\sqrt{\frac{x^2}{a^2}}=\pm\frac{b}{a}x \quad \text{– асимптоты гиперболы}$$

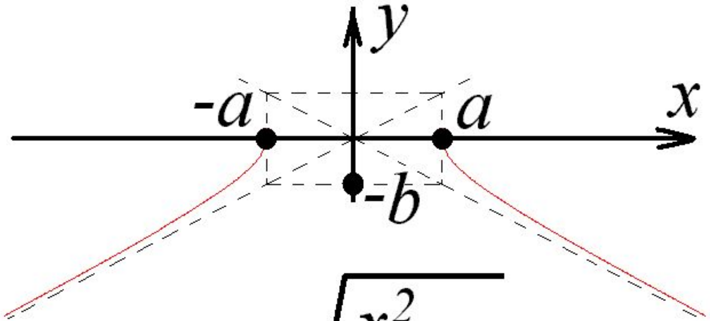
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2}-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}=1,\quad C(x_0,y_0)\ \text{ центр}$$



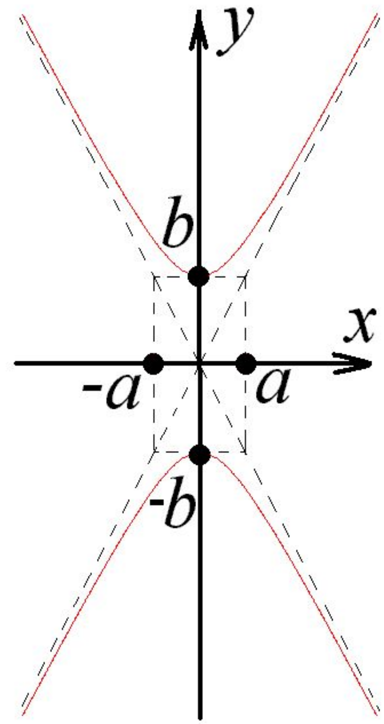
$$y = b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$



$$y = -b\sqrt{\frac{x^2}{a^2} - 1}$$



$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$$

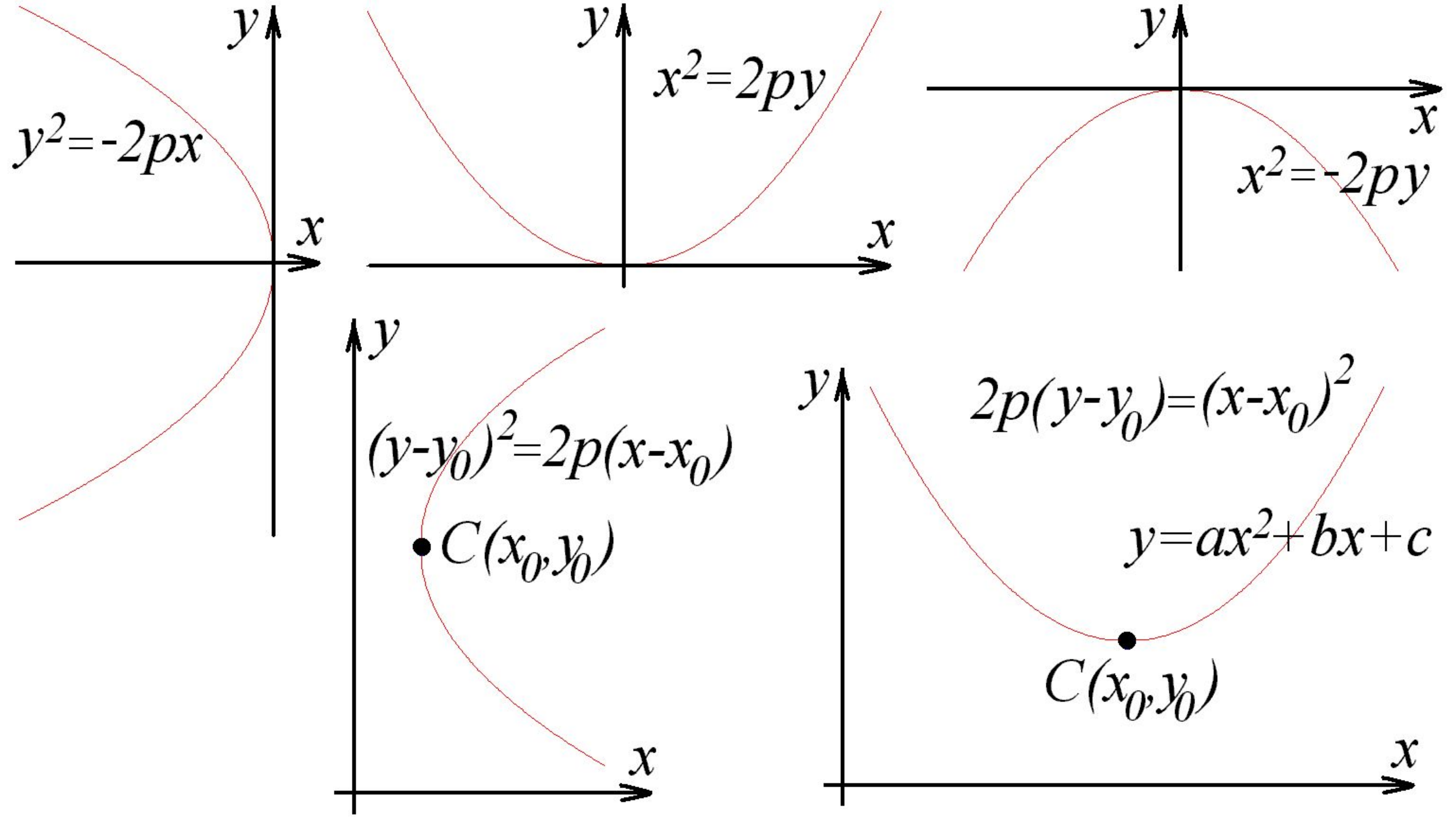
Различные представления параболы

$$y^2 = 2px, \quad x \geq 0; \quad y = \pm\sqrt{2px}$$

$$x^2 = 2py; \quad \forall\, x, \quad y \geq 0; \quad Oy \ \text{– ось симметрии}$$

$$C(x_0, y_0) \ \text{– вершина параболы}$$

$$(y-y_0)^2 = 2p(x-x_0); \quad (x-x_0)^2 = 2p(y-y_0); \quad y = ax^2+bx+c$$


$y^2=-2px$
$x^2=2py$
$x^2=-2py$
$(y-y_0)^2=2p(x-x_0)$
$C(x_0,y_0)$
$2p(y-y_0)=(x-x_0)^2$
$y=ax^2+bx+c$
$C(x_0,y_0)$

Поверхность в трехмерном пространстве

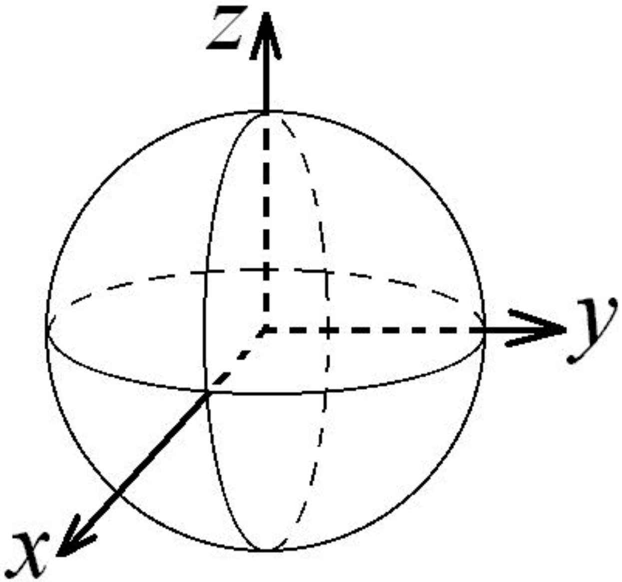
Поверхность (П) в трехмерном пространстве задается уравнением:

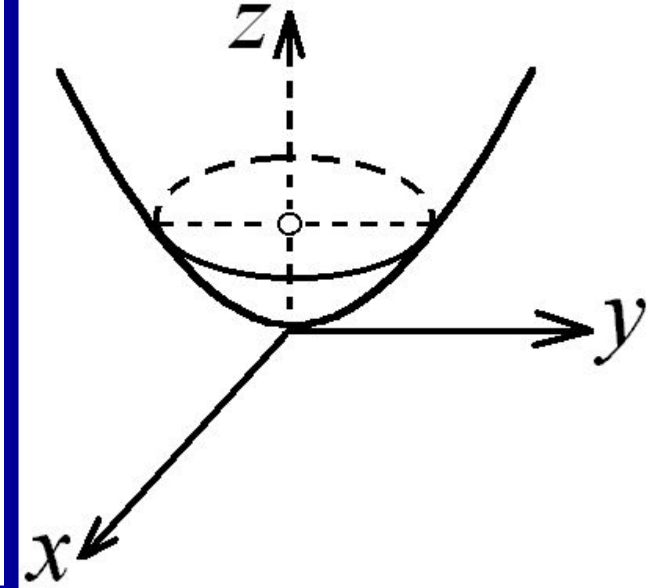
$$(\Pi): \quad F(x, y, z) = 0$$

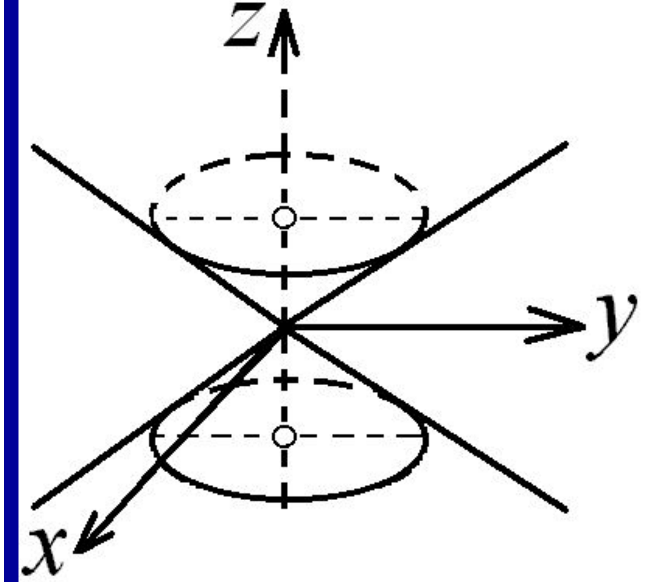
где $M(x, y, z)$ – произвольная (текущая) точка на поверхности (П)

Точка принадлежит поверхности, если ее координаты обращают уравнение поверхности в тождество

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Pi) \quad \Longleftrightarrow \quad F(x_0, y_0, z_0) \equiv 0$$







Сфера: $x^2 + y^2 + z^2 = R^2, \quad x^2 + y^2 + z^2 - R^2 = 0$

Параболоид вращения: $z = x^2 + y^2$

Двухполостной конус: $z^2 = x^2 + y^2$

Плоскость в трехмерном пространстве

Теорема. *Любая плоскость задается линейным уравнением*

$$Ax + By + Cz + D = 0, \quad A^2 + B^2 + C^2 \neq 0$$

и наоборот: любое линейное уравнение задает плоскость и вектор $\overrightarrow{N} = \{A, B, C\}$ *перпендикулярен этой плоскости*

$$\overrightarrow{N} \perp (\Pi)$$

Доказательство этой теоремы аналогично доказательству теоремы для прямой на плоскости.

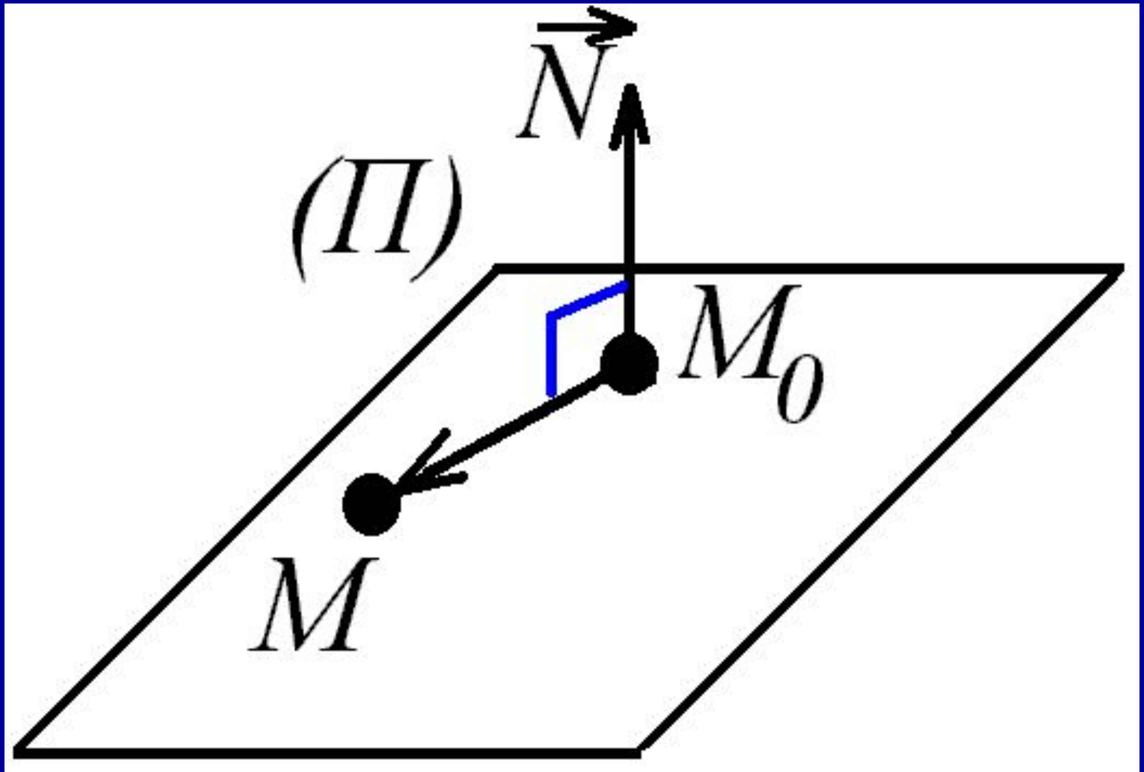
Другие виды задания плоскости

1. Плоскость, проходящая через заданную точку и имеющая заданный нормальный вектор:

$$M_0(x_0, y_0, z_0) \in (\Pi), \ \ \overrightarrow{N} = \{A, B, C\} \perp (\Pi); \ \ M(x, y, z) \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0, z - z_0\} \subseteq (\Pi); \ \ \overrightarrow{M_0M} \perp \overrightarrow{N}; \ \ \overrightarrow{M_0M} \cdot \overrightarrow{N} = 0$$

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$



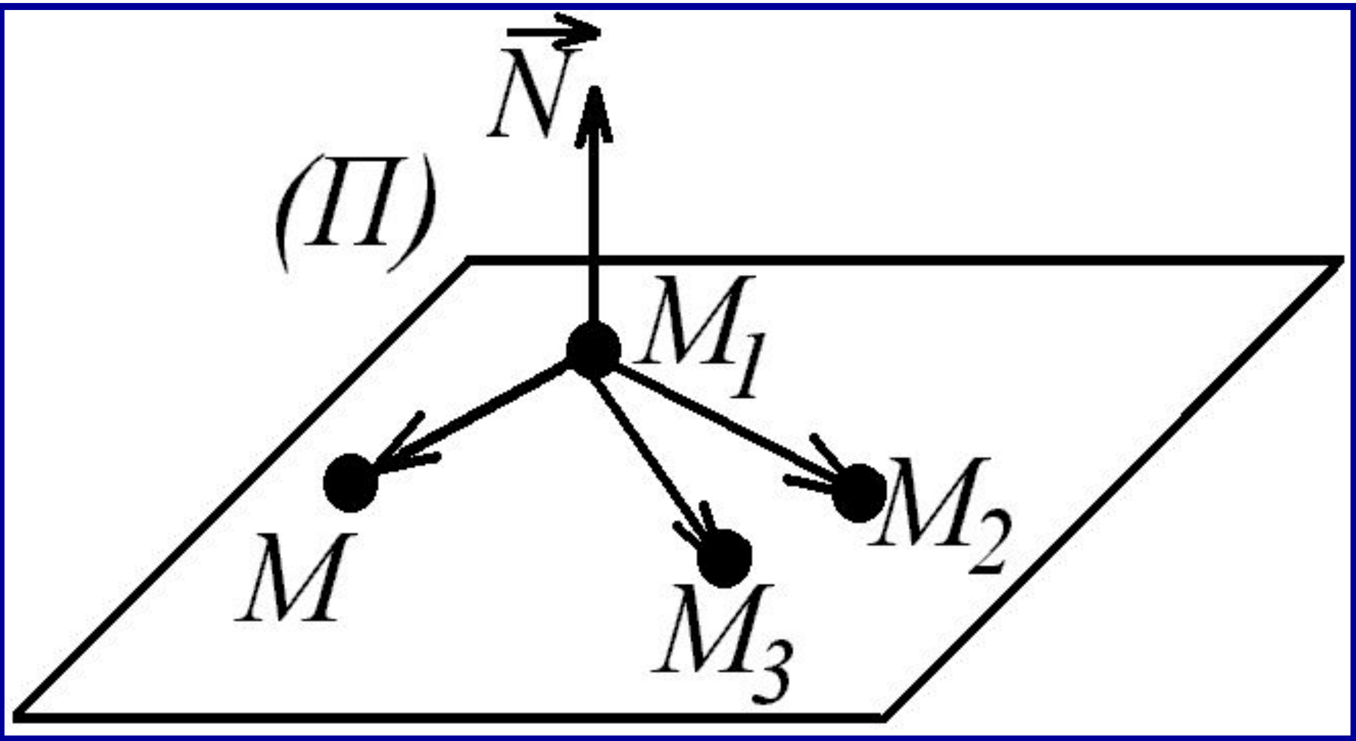
2. Плоскость, проходящая через три заданные точки $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (\Pi)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (\Pi)$, $M_3(x_3, y_3, z_3) \in (\Pi)$:

$$M(x, y, z) \in (\Pi); \quad \overrightarrow{M_1M} = \{x - x_1, y - y_1, z - z_1\} \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1\} \in (\Pi)$$

$$\overrightarrow{M_1M_3} = \{x_3 - x_1, y_3 - y_1, z_3 - z_1\} \in (\Pi)$$

т.е. векторы компланарны, поэтому



$$\overrightarrow{M_1M}\,\overrightarrow{M_1M_2}\,\overrightarrow{M_1M_3} = 0$$

$$\begin{vmatrix} \boxed{x - x_1 \quad y - y_1 \quad z - z_1} \\ x_2 - x_1 \quad y_2 - y_1 \quad z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 \quad y_3 - y_1 \quad z_3 - z_1 \end{vmatrix} = 0$$

$$(x - x_1)\begin{vmatrix} y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ y_3 - y_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} + (y - y_1)(-1)\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & z_2 - z_1 \\ x_3 - x_1 & z_3 - z_1 \end{vmatrix} +$$

$$+(z - z_1)\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \\ x_3 - x_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0$$

$$\vec{N} = \{A, B, C\} = \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1M_3} \perp (\Pi)$$

Взаимное расположение плоскостей

Угол между плоскостями:

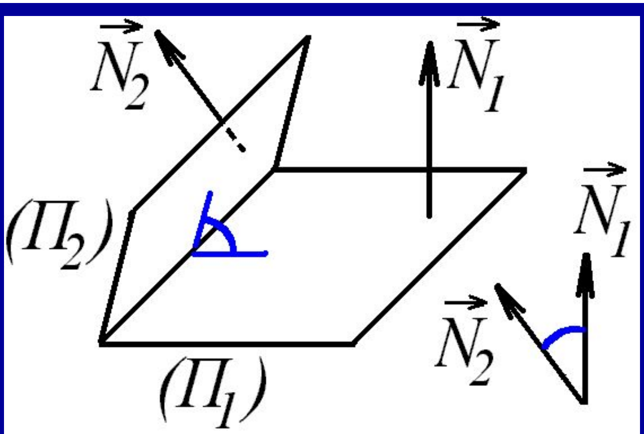
$$(\Pi_1): \quad A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0; \quad \overrightarrow{N_1} = \{A_1, B_1, C_1\} \perp (\Pi_1)$$

$$(\Pi_2): \quad A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0; \quad \overrightarrow{N_2} = \{A_2, B_2, C_2\} \perp (\Pi_2)$$

$$(\widehat{\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}}) = (\widehat{\Pi_1), (\Pi_2})$$

$$\cos\left((\widehat{\Pi_1), (\Pi_2})\right) = \cos\left(\widehat{\overrightarrow{N_1}, \overrightarrow{N_2}}\right) =$$

$$= \frac{\overrightarrow{N_1} \cdot \overrightarrow{N_2}}{|\overrightarrow{N_1}| \cdot |\overrightarrow{N_2}|} = \frac{A_1A_2 + B_1B_2 + C_1C_2}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2 + C_1^2} \cdot \sqrt{A_2^2 + B_2^2 + C_2^2}}$$



Условие перпендикулярности двух плоскостей:

$$(\Pi_1)\perp(\Pi_2) \iff \overrightarrow{N_1}\perp\overrightarrow{N_2} \iff \overrightarrow{N_1}\cdot\overrightarrow{N_2}=0$$

т.е.

$$A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2=0$$

Условие параллельности плоскостей:

$$(\Pi_1)\parallel(\Pi_2) \iff \overrightarrow{N_1}\parallel\overrightarrow{N_2} \iff \frac{A_1}{A_2}=\frac{B_1}{B_2}=\frac{C_1}{C_2}$$

Точка пересечения трех плоскостей:

$$(\Pi_1):\quad A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0$$

$$(\Pi_2):\quad A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

$$(\Pi_3):\quad A_3x+B_3y+C_3z+D_3=0$$

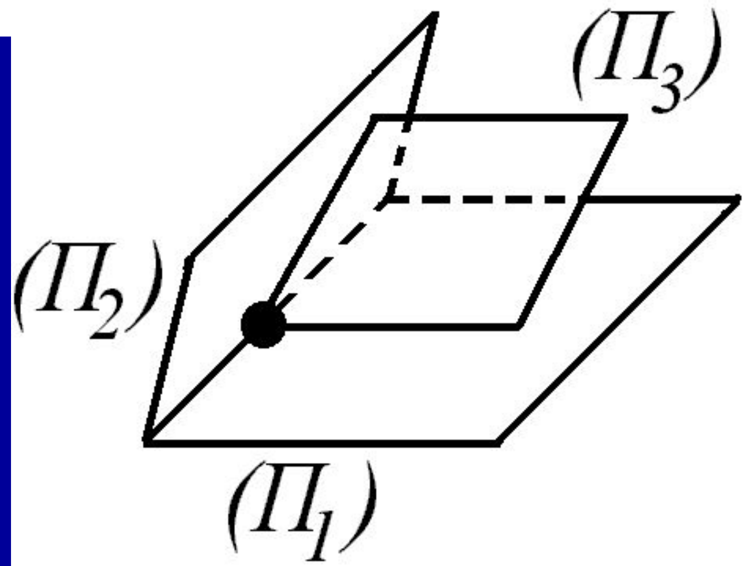
Если точка M_0 лежит на каждой из трех плоскостей

$$M_0 \in (\Pi_1), \quad M_0 \in (\Pi_2), \quad M_0 \in (\Pi_3),$$

то неизвестные координаты (x, y, z) этой точки M_0 должны удовлетворять всем трем уравнениями, т.е. уравнения должны выполнятся одновременно:

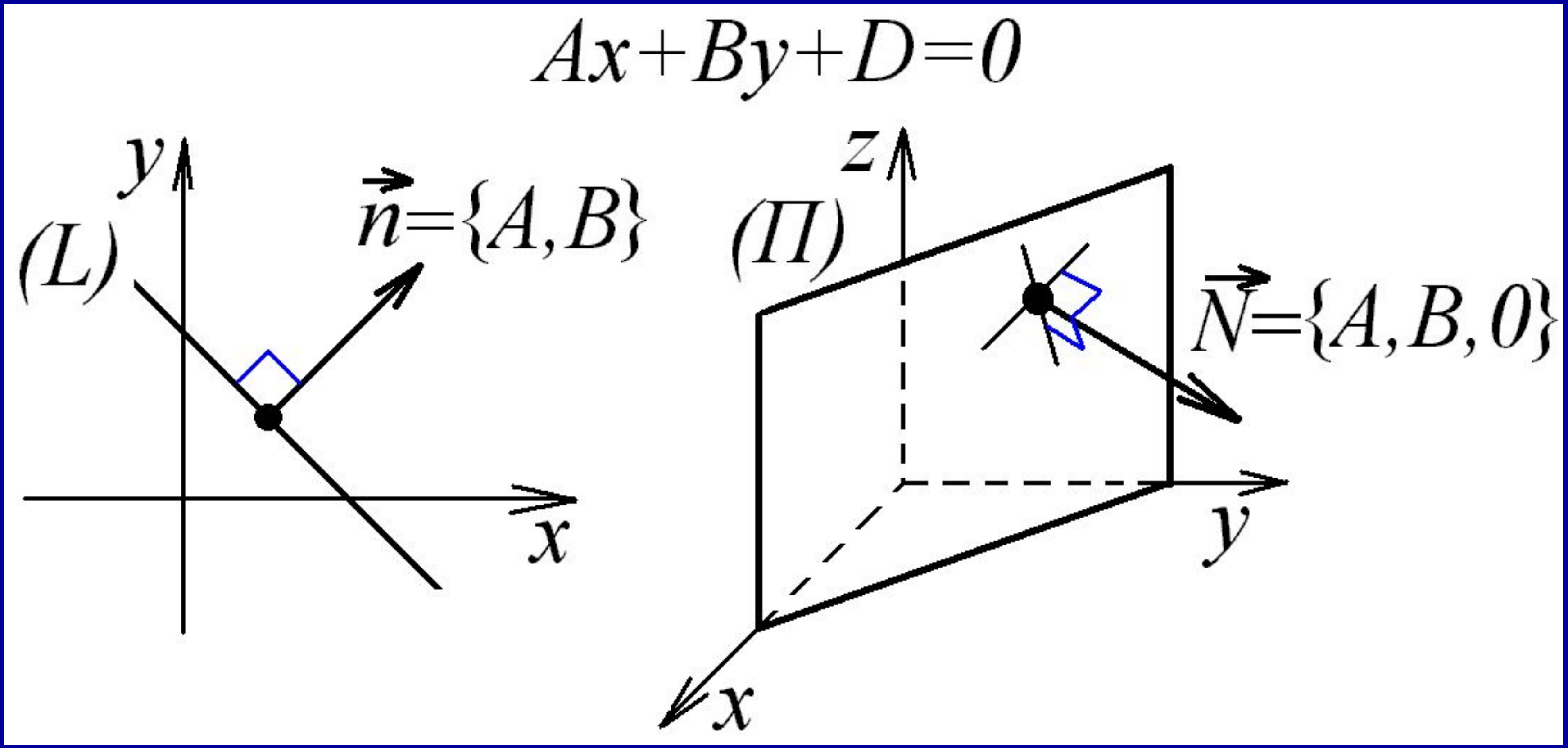
$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ A_3x + B_3y + C_3z + D_3 = 0 \end{cases}$$

неизвестные координаты (x, y, z) должны быть решениями этой СЛАУ.

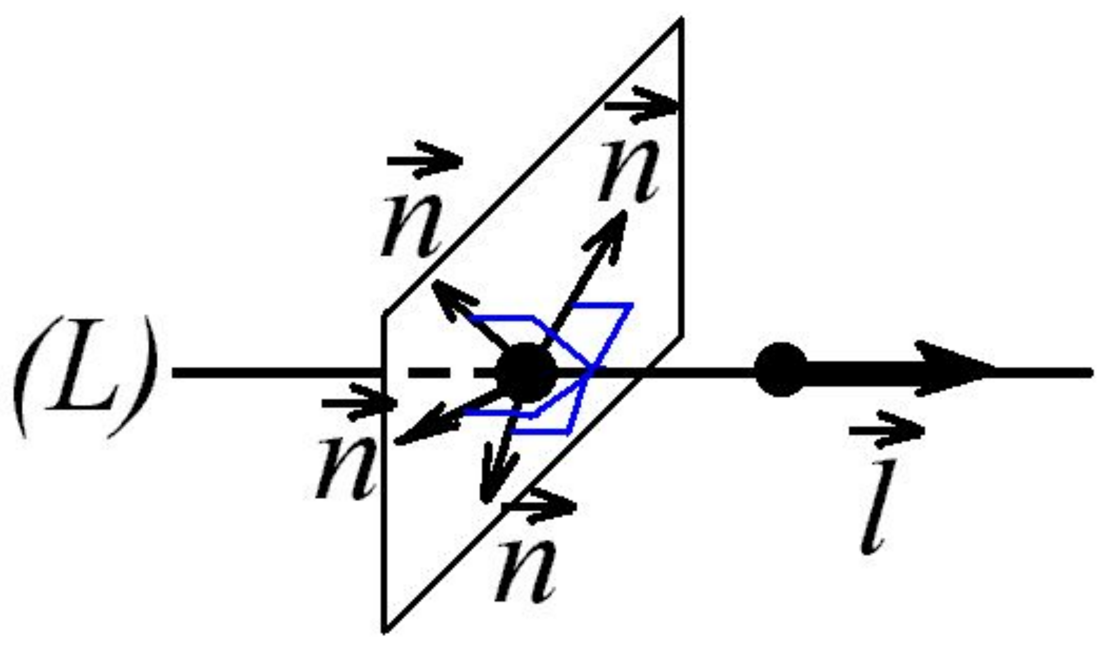


Прямая в пространстве

Уравнение $Ax + By + D = 0$ на плоскости xOy задает прямую, а в трехмерном пространстве – плоскость, параллельную оси Oz.

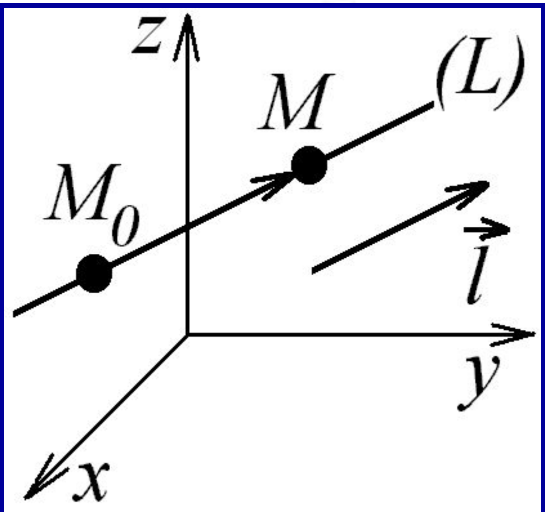


Поэтому прямая в трехмерном пространстве аналитически задается по-другому!!
Пусть задана прямая (L).
К прямой в пространстве можно провести много нормальных векторов, которые образуют целую плоскость, перпендикулярную заданной прямой.
Поэтому для прямой (L) задается **направляющий** вектор: $\vec{\ell} \,||\, (L)$; $\vec{\ell} = \{m, p, s\}$, $|\vec{\ell}| = \sqrt{m^2 + p^2 + s^2} \neq 0$



Канонические уравнения прямой в пространстве

Пусть $M_0(x_0, y_0, z_0) \in (L)$ – конкретная точка на прямой (L).
Пусть $M(x, y, z) \in (L)$ – текущая точка на прямой (L).
Тогда $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{\ell}$, т.е. $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0;\ y - y_0;\ z - z_0\} \| (L)$



Поэтому прямая в пространстве задается в виде

$$(L): \quad \frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{p} = \frac{z - z_0}{s} \qquad (1)$$

В знаменателях в (1) могут стоять нули!!

Параметрические уравнения прямой в пространстве

$$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{p}=\frac{z-z_0}{s}=t$$

Тогда

$$\frac{x-x_0}{m}=t,\quad \frac{y-y_0}{p}=t,\quad \frac{z-z_0}{s}=t$$

т.е.

$$x-x_0=mt,\quad y-y_0=pt,\quad z-z_0=st$$

или

$$\boxed{(L):\quad \begin{cases} x=mt+x_0,\\ y=pt+y_0,\\ z=st+z_0 \end{cases}} \qquad (2)$$

t – параметр – новая независимая переменная, которая может принимать любые действительные значения.

Задание прямой в пространстве с помощью двух пересекающихся плоскостей

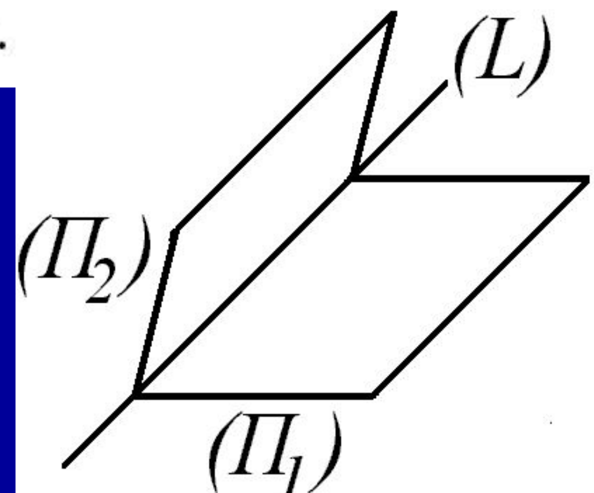
Пусть заданы две плоскости:

$$(\Pi_1): \ A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0; \ \ (\Pi_2): \ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0$$

Тогда система двух уравнений

$$\boxed{(L): \quad \begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0, \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}} \qquad (3)$$

задает прямую в пространстве – множество точек, одновременно лежащих на обеих плоскостях.



Теорема. *Все три вида задания прямой в пространстве эквивалентны.*

Эквaивалентность (1), (2) показана выше.

Осталось показать эквaивалентность (1), (3).

(1) $\Longrightarrow$ (3):

Пусть заданы канонические уравнения прямой

$$(L): \quad \frac{x-x_0}{m} = \frac{y-y_0}{p} = \frac{z-z_0}{s}$$

т.е., в частности, заданы такие два уравнения

$$\begin{cases} \dfrac{x-x_0}{m} = \dfrac{y-y_0}{p} \\ \\ \dfrac{y-y_0}{p} = \dfrac{z-z_0}{s} \end{cases}$$

это линейные уравнения относительно x, y, z, поэтому каждое из них задает свою плоскость, первая – $\|Oz$, вторая – $\|Ox$

Прямая в пространстве, проходящая через две точки

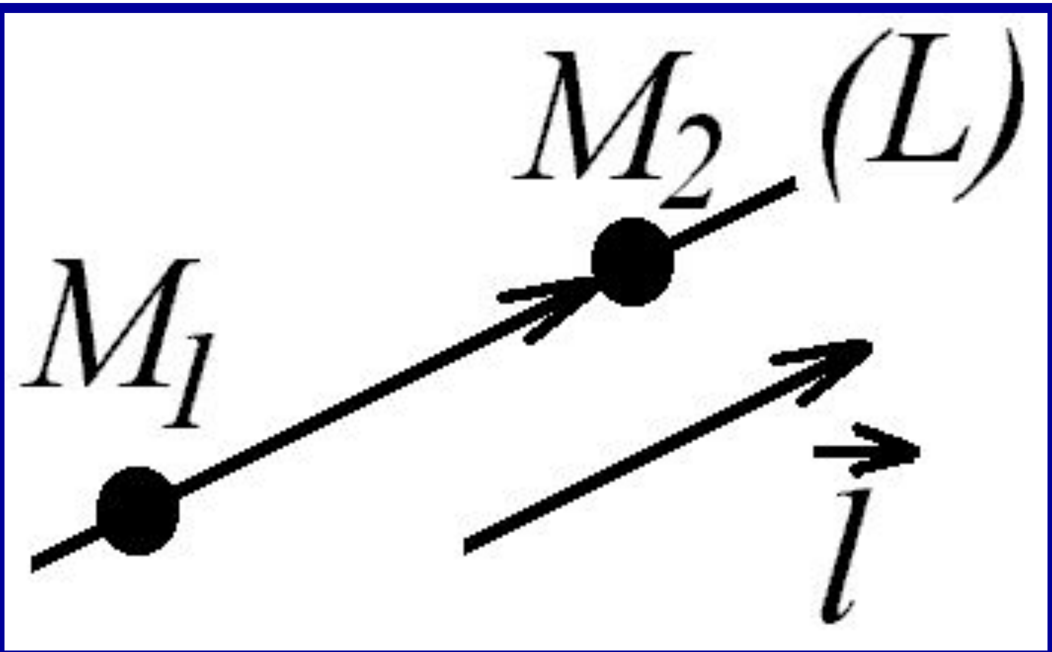
Пусть $M_1(x_1, y_1, z_1) \in (L)$, $M_2(x_2, y_2, z_2) \in (L)$

Тогда вектор

$$\overrightarrow{\ell} = \overrightarrow{M_1M_2} = \{x_2 - x_1,\ y_2 - y_1,\ z_2 - z_1\} \| (L)$$

Поэтому

$$(L): \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$



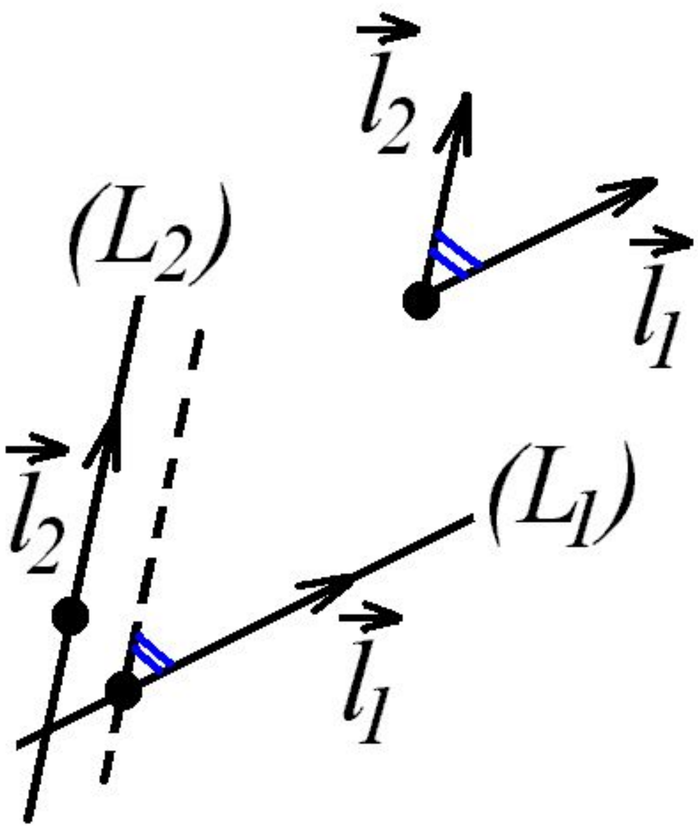
Взаимное расположение двух прямых

Даны (L_1), (L_2):

$$\overrightarrow{\ell_1} = \{m_1, p_1, s_1\} \| (L_1); \quad \overrightarrow{\ell_2} = \{m_2, p_2, s_2\} \| (L_2)$$

Угол между прямыми равен углу между направляющими векторами:

$$\widehat{(L_1), (L_2)} = \widehat{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}}$$

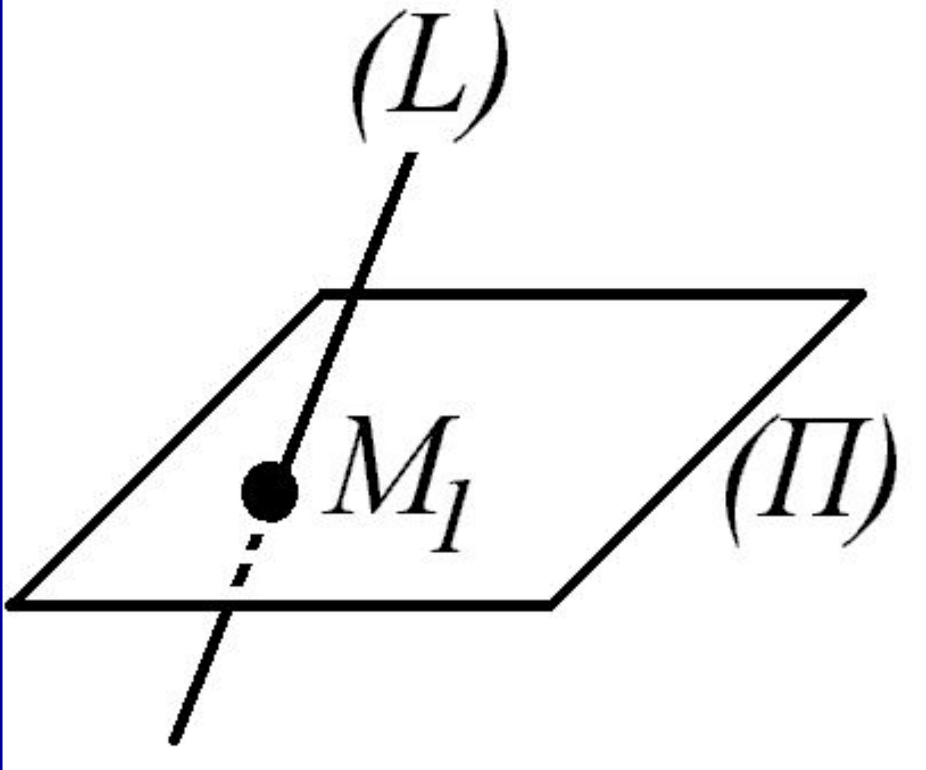


$$\cos(\widehat{\overrightarrow{\ell_1}, \overrightarrow{\ell_2}}) = \frac{\overrightarrow{\ell_1} \cdot \overrightarrow{\ell_2}}{|\overrightarrow{\ell_1}| \cdot |\overrightarrow{\ell_2}|} = \frac{m_1 m_2 + p_1 p_2 + s_1 s_2}{\sqrt{m_1^2 + p_1^2 + s_1^2} \cdot \sqrt{m_2^2 + p_2^2 + s_2^2}}$$

$$(L_1) \perp (L_2) \iff \overrightarrow{\ell_1} \perp \overrightarrow{\ell_2} \iff \overrightarrow{\ell_1} \cdot \overrightarrow{\ell_2} = 0 \iff m_1 m_2 + p_1 p_2 + s_1 s_2 = 0$$

$$(L_1) || (L_2) \iff \overrightarrow{\ell_1} || \overrightarrow{\ell_2} \iff \frac{m_1}{m_2} = \frac{p_1}{p_2} = \frac{s_1}{s_2}$$

Точка пересечения прямой и плоскости



Пусть прямая (L) задана в виде (3):

$$(L): \quad \begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \end{cases}$$

и задана плоскость

$$(\Pi): \quad Ax + By + Cz + D = 0$$

Поскольку искомая точка $M_1(x_1, y_1, z_1)$ лежит и на прямой, и на плоскости, то ее координаты должны удовлетворять СЛАУ:

$$\begin{cases} A_1x + B_1y + C_1z + D_1 = 0 \\ A_2x + B_2y + C_2z + D_2 = 0 \\ Ax + By + Cz + D = 0 \end{cases}$$

Если $\Delta \neq 0$, то $\exists!$ решение СЛАУ $x = x_1, y = y_1, z = z_1$ – координаты точки M_1.

$\exists!$ - существует и единственное

Другой способ определения $M_1(x_1, y_1, z_1)$: прямая берется в параметрическом виде (2)

$$(L):\quad \begin{cases} x = m\,t + x_0 \\ y = p\,t + y_0 \\ z = s\,t + z_0 \end{cases}$$

и выражения для x, y, z подставляются в уравнение заданной плоскости

$$A(m\,t + x_0) + B(p\,t + y_0) + C(s\,t + z_0) + D = 0$$

Получилось одно уравнение для одной неизвестной t. Его решение $t = t_1$ при подстановке в параметрические уравнения дает координаты искомой точки

$$M_1(x_1, y_1, z_1):\ \ x_1 = m\,t_1 + x_0,\ \ y_1 = p\,t_1 + y_0,\ \ z_1 = s\,t_1 + z_0$$