ЛЕКЦИЯ №6

Курс: Моделирование систем

Тема: Характеристики вычислительных систем, представленных в виде моделей СМО

1. Модель размножения и гибели

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

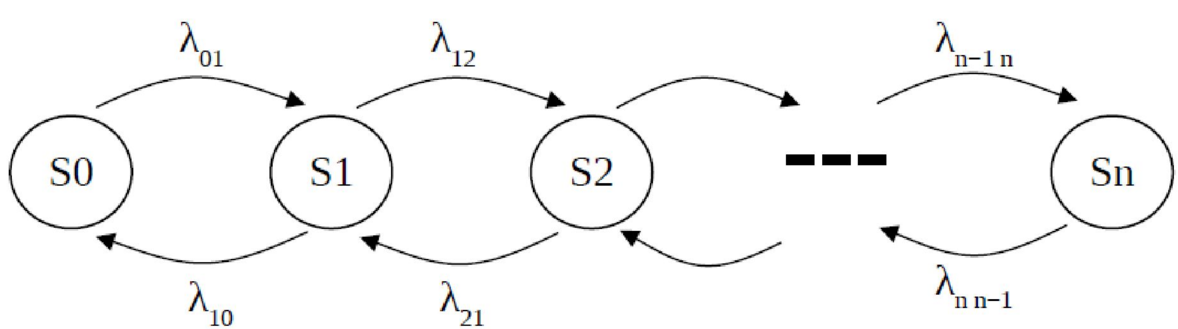
3. Примеры решения задач

1. Модель размножения и гибели

1.1 Граф модели размножения и гибели

Имея в распоряжении размеченный граф состояний, можно легко написать уравнения Колмогорова для вероятностей состояний, а также написать и решить уравнения для финальных вероятностей. Для некоторых случаев удается получить решение этих уравнений в аналитическом виде.

Разновидностью марковской модели с дискретным числом состояний и непрерывным временем является модель размножения и гибели. Граф состояний этой модели имеет вид цепи. Интенсивности переходов из одного состояния в другое обозначены как λ_{ij} , а времена переходов распределены по показательному закону, т.е. все потоки, переводящие систему по стрелкам графа – простейшие.



1. Модель размножения и гибели

1.1 Граф модели размножения и гибели

Особенность этого графа в том, что все состояния системы (S0,S1,…,Sn) можно вытянуть в одну цепочку, в которой каждое из соседних состояний связано прямой и обратной стрелкой с каждыми из соседних состояний – правым и левым, а крайние состояния S0 и Sn только с одним соседним состоянием

Такая схема часто встречается в теории массового обслуживания.

Рассмотрим возможные состояния системы (S0,S1,…,Sn) и их вероятности:

$$p_0(t), p_1(t), \ldots, p_n(t).$$

Очевидно, что для любого момента времени (условие нормировки):

$$\sum_{k=0}^{n} p_k(t) = 1$$

1. Модель размножения и гибели

1.2 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Составим дифференциальные уравнения Колмогорова для всех вероятностей, используя приведенный граф состояний исходной модели.

Для этого зафиксируем момент времени t и найдем вероятность p0(t+Δt) того, что в момент времени t+Δt система будет находиться в состоянии S0.

Исходя из представленной схемы графа состояний, это может произойти двумя способами:

во – первых (событие A) - в момент t система находилась в состоянии S0, а за время Δt не перешла из него в состояние S1;

во – вторых (событие B) – в момент t система находилась в состоянии S1, а за время Δt перешла в состояние S1.

Складывая эти две возможности (по теореме сложения вероятностей) получим:

$$p_0(t+\Delta t) = p(A) + p(B)$$

1. Модель размножения и гибели

1.2 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Вероятность события А найдем по теореме умножения вероятностей. Вероятность того, что в момент t система находилась в состоянии S0, равна p0(t) . Вероятность того, что за время Δt не придет ни одной заявки, равна exp(-λ01Δt). Учитывая, что значение λ01Δt – мало, можно записать:

$$e^{-\lambda_{01}\Delta t} = 1 - \lambda_{01} \cdot \Delta t$$

Окончательно, для вероятности события А имеем:

$$p(A) = p_0(t) \cdot \left(1 - \lambda \cdot \Delta t\right)$$

1. Модель размножения и гибели

1.2 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Найдем вероятность события p(B). Вероятность того, что в момент t система была в состоянии S1, равна p1(t).

Вероятность того, что за время Δt система перейдет в состояние S0, равна – 1- exp(-λ10Δt) или

$$1 - e^{-\lambda_{10}\Delta t} = \lambda_{10} \cdot \Delta t$$

Окончательно, для вероятности события B получим:

$$p(B) = p_1(t) \cdot \lambda_{10} \cdot \Delta t$$

1. Модель размножения и гибели

1.2 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Суммируя вероятности событий А и В, окончательно получим,

$$p_0(t+\Delta t) = p_0(t)\cdot\left(1-\lambda_{01}\cdot\Delta t\right) + p_1(t)\cdot\lambda_{10}\cdot\Delta t$$

Перенося в левую часть p0(t), деля на Δt и переходя к пределу, получим дифференциальное уравнение для p0(t):

$$\frac{dp_0(t)}{dt} = -\lambda_{01}\cdot p_0(t) + \lambda_{10}\cdot p_1(t)$$

1. Модель размножения и гибели

1.2 Дифференциальные уравнения Колмогорова

Аналогично, могут быть получены дифференциальные уравнения и для всех остальных вероятностей состояний:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dp_0(t)}{dt} &= -\lambda_{01} \cdot p_0(t) + \lambda_{10} \cdot p_1(t) \\
\frac{dp_1(t)}{dt} &= -\left(\lambda_{12} + \lambda_{10}\right) \cdot p_1(t) + \lambda_{01} \cdot p_0(t) + \lambda_{21} \cdot p_2(t) \\
&\ldots \\
&\ldots \\
\frac{dp_n(t)}{dt} &= -\lambda_{n,n-1} \cdot p_n(t) + \lambda_{n-1,n} \cdot p_{n-1}(t)
\end{aligned}\right\}$$

1. Модель размножения и гибели

1.3 Финальные стационарные уравнения Колмогорова

Вначале, после включения рассматриваемой системы в работу, протекающий в ней процесс не будет стационарным. Этот начальный процесс называется переходным – нестационарным. Однако, спустя некоторое время этот переходный процесс затухает и система перейдет в установившейся – стационарный режим работы.

Для стационарного режима вероятностные характеристики не зависят от времени. В этом стационарном режиме работы все вероятности p0(t), p1(t), …., pn(t) стремятся к постоянным пределам p0, p1, …, pn, а все их производные стремятся к нулю.

1. Модель размножения и гибели

1.3 Финальные стационарные уравнения Колмогорова

Заменим в системе обыкновенных дифференциальных уравнений все вероятности их пределами , а все производные положим равными нулю. В этом случае получим систему уже не дифференциальных, а алгебраических уравнений:

$$\left.\begin{aligned}
0 &= -\lambda_{01} \cdot p_0 + \lambda_{10} \cdot p_1 \\
0 &= -\left(\lambda_{12} + \lambda_{10}\right) \cdot p_1 + \lambda_{01} \cdot p_0 + \lambda_{21} \cdot p_2 \\
&\dots \\
&\dots \\
0 &= -\lambda_{n,n-1} \cdot p_n + \lambda_{n-1,n} \cdot p_{n-1}
\end{aligned}\right\}$$

К этим уравнениям необходимо добавить условие нормировки:

$$p_0 + p_1 + p_2 + \dots \; p_n = 1$$

1. Модель размножения и гибели

1.3 Финальные стационарные уравнения Колмогорова

Разрешим полученную систему относительно неизвестных p0, p1, …, pn.

Для первого уравнения имеем : $$\lambda_{01} \cdot p_0 = \lambda_{10} \cdot p_1$$

Для второго уравнения имеем : $$\left(\lambda_{12} + \lambda_{10}\right) \cdot p_1 = \lambda_{01} \cdot p_0 + \lambda_{21} \cdot p_2$$

Подставляя первое уравнение во второе, получим : $$\lambda_{12} \cdot p_1 = \lambda_{21} \cdot p_2$$

Аналогичное соотношение получим и для состояния S2 $$\lambda_{23} \cdot p_2 = \lambda_{32} \cdot p_3$$

Обобщая полученные соотношения можно записать и для произвольного состояния Sk $$\lambda_{k-1,k} \cdot p_{k-1} = \lambda_{k,k-1} \cdot p_k$$

где k=0,1…,n

1. Модель размножения и гибели

1.3 Финальные стационарные уравнения Колмогорова

Итоговая система преобразованных уравнений имеет следующий вид :

$$\left.\begin{aligned}
\lambda_{01} \cdot p_0 &= \lambda_{10} \cdot p_1 \\
\lambda_{12} \cdot p_1 &= \lambda_{21} \cdot p_2 \\
&\dots \\
\lambda_{k-1,k} \cdot p_{k-1} &= \lambda_{k,k-1} \cdot p_k \\
\lambda_{n-1,n} \cdot p_{n-1} &= \lambda_{n,n-1} \cdot p_n
\end{aligned}\right\}$$

Из первого уравнения можно получить

$$p_1 = \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot p_0$$

Из второго уравнения можно получить

$$p_2 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot p_1 = \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot p_0$$

Обобщая полученные соотношения для произвольного состояния Sk имеем:

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}} \dots \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot p_0$$

1. Модель размножения и гибели

1.3 Финальные стационарные уравнения Колмогорова

В числителе стоит произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих слева – направо (с начала и до данного состояния Sk), а в знаменателе – произведение всех интенсивностей, стоящих у стрелок, ведущих справа налево (с начала и до Sk).

$$p_k = \frac{\lambda_{k-1,k}}{\lambda_{k,k-1}} \dots \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot p_0$$

Заметим, что все вероятности состояний выражены через одну вероятность – вероятность нахождения системы в начальном состоянии - p0.

Подставим, эти выражения в нормировочное условие получим:

$$p_0 \cdot \left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} \dots \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot \right) = 1$$

$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} \dots \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot \right)}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Характеристики вычислительной системы

Рассмотрим систему с одним каналом и неограниченной очередью, в которой отсутствуют ограничения по длине очереди и по времени ожидания. Интенсивность входного потока заявок λ, среднее время обслуживания tобс.

Необходимо найти финальные вероятности состояний, а также:

Lсист – среднее число заявок в системе;
Wсист – среднее время пребывания заявки в системе;
Lочер – среднее число заявок в очереди;
Wочер – среднее время пребывания заявки в очереди;
Pзан – вероятность того, что канал занят.

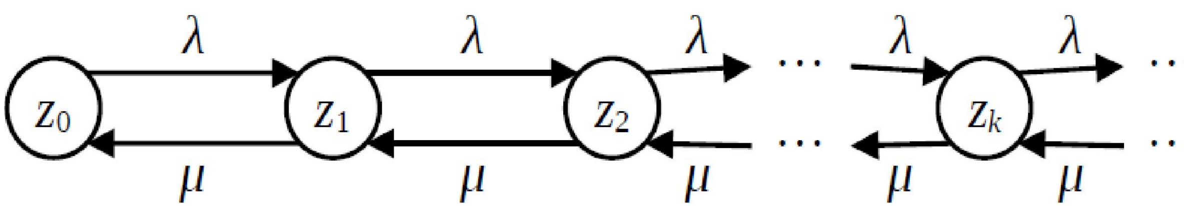
Состояния системы:

S0 – канал свободен, очереди нет;
S1 – канал занят, очереди нет;
S2 – канал занят, 1 заявка в очереди;
….
Sn – канал занят, (n-1) заявка в очереди.

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

<u>Граф состояний вычислительной системы</u>

Граф состояний одноканальной системы с бесконечной очередью приведен ниже. Приведенный граф описывает уже рассмотренную ранее модель «размножения и гибели» , с бесконечным количеством состояний. Поэтому для описания работы данной системы используем уже полученные ранее формулы



$$p_0 = \frac{1}{\left(1 + \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} + \frac{\lambda_{n-1,n}}{\lambda_{n,n-1}} \ldots \frac{\lambda_{12}}{\lambda_{21}} \cdot \frac{\lambda_{01}}{\lambda_{10}} \cdot\right)}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Коэффициент загрузки

Заметим, что среднее время обслуживания tобс и интенсивность обслуживания μ связаны следующей зависимостью:

μ=1/tобс.

Заметим также, что абсолютную пропускную способность вычислять не надо – рано или поздно заявка будет обслужена, так как очередь неограничена; следовательно, A=λ. Относительная пропускная способность – вероятность того, что заявка будет обслужена, – Q=1.

Предельная вероятность состояния p0 может быть найдена из следующей формулы:

$$p_0 = \left(1 + \frac{\lambda}{\mu} + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \ldots\right)^{-1}$$

Если обозначить λ/μ=ρ, то получим:

$$p_0 = \left(1 + \rho + \rho^2 + \ldots + \rho^k + \ldots\right)^{-1}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Коэффициент загрузки

Из математики известно, что ряд в приведенной формуле сходится при $\rho<1$. При этом сумма ряда равна $1/(1-\rho)$. Тогда для финальной вероятности p0 получим следующую формулу:

$$p0=1-\rho$$

Полученная вероятность p0 означает, что канал обработки (сервер) свободен и очереди нет. Дополнительная величина к p0, равная $1-p0=1-1+\rho=\rho$ означает, что канал занят обслуживанием, т.е. отношение $\rho=\lambda/\mu$ является мерой загрузки канала (сервера) и называется **коэффициентом загрузки.**

Таким образом, для такой системы финальные вероятности существуют, если величина $\boldsymbol{\rho=\lambda/\mu<1}$. Если $\rho>=1$, то очередь при $t\to\infty$ растет неограниченно.

Заметим, что СМО справляется с потоком заявок при $\rho=1$, только если этот поток – регулярный, и время обслуживания тоже неслучайно, равно интервалу между заявками. В этом идеальном случае очередь в СМО вообще отсутствует, канал будет непрерывно занят и регулярно выпускать обслуженные заявки.

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Коэффициент загрузки

Финальные вероятности, как уже было сказано, образуют геометрическую прогрессию со знаменателем ρ.

Как это ни странно, максимальной из них оказывается p0 – вероятность того, что канал будет вообще свободен. Как бы ни была нагружена система с очередью, если только она вообще справляется с потоком заявок ($\rho<1$), самое вероятное число заявок в системе будет 0.

Далее вычислим среднее число заявок в системе.

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее число заявок в системе

Обозначим среднее число заявок в системе - Lsys.
Случайная величина Z – число заявок в системе – имеет возможные значения 0,1,2,3..k, с вероятностями p0, p1, p2, … pk. Тогда будем иметь:

$$L_{sys} = 0p_0 + 1p_1 + 2p_2 + ...kp_k + ... = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k \qquad (19.1)$$

Учитывая, что $p_k = \rho^k p_0 = \rho^k(1-\rho)$ и подставляя в формулу (19.1) получим

$$L_{sys} = \sum_{k=0}^{\infty} kp_k = \sum_{k=1}^{\infty} k\rho^k(1-\rho) = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1}$$

Но величина $k\rho^{k-1}$ это производная по ρ от величины ρ^k

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее число заявок в системе

Учитывая последнее, можно записать формулу (19.1) в следующем виде:

$$L_{sys} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty} k\rho^{k-1} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\rho^k}{d\rho} \qquad (20.1)$$

Меняя местами операции дифференцирования и суммирования получим следующее выражение

$$L_{sys} = \rho(1-\rho)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{d\rho^k}{d\rho} = \rho(1-\rho)\frac{d}{d\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\rho^k \qquad (20.2)$$

Учитывая, что сумма бесконечной убывающей прогрессии равна 1/(1-ρ) , ее производная равна $1/(1-\rho)^2$, окончательно получим:

$$L_{sys} = \frac{\rho}{(1-\rho)} \qquad (20.3)$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Длина очереди

Средняя длина очереди равна среднему числу заявок в системе минус среднее число обслуживаемых заявок.

Ранее было показано, что среднее число обслуживаемых заявок равно ρ.

Учитывая это, можно записать, что средняя длина очереди в СМО равна:

$$L = L_{sys} - \rho = \frac{\rho}{(1-\rho)} - \rho = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

Выведем важную формулу, связывающую для предельного стационарного режима среднее число заявок Lsys, находящихся в системе массового обслуживания, и среднее время пребывания заявки в системе Wsys.

Пусть дана любая система массового обслуживания и связанные с ней два потока событий: поток заявок, прибывающих в систему, и поток заявок, покидающих СМО. Если в системе установился предельный стационарный режим, то среднее число заявок, прибывающих в систему за единицу времени, равно среднему числу заявок, покидающих ее: оба потока имеют одну и ту же интенсивность λ.

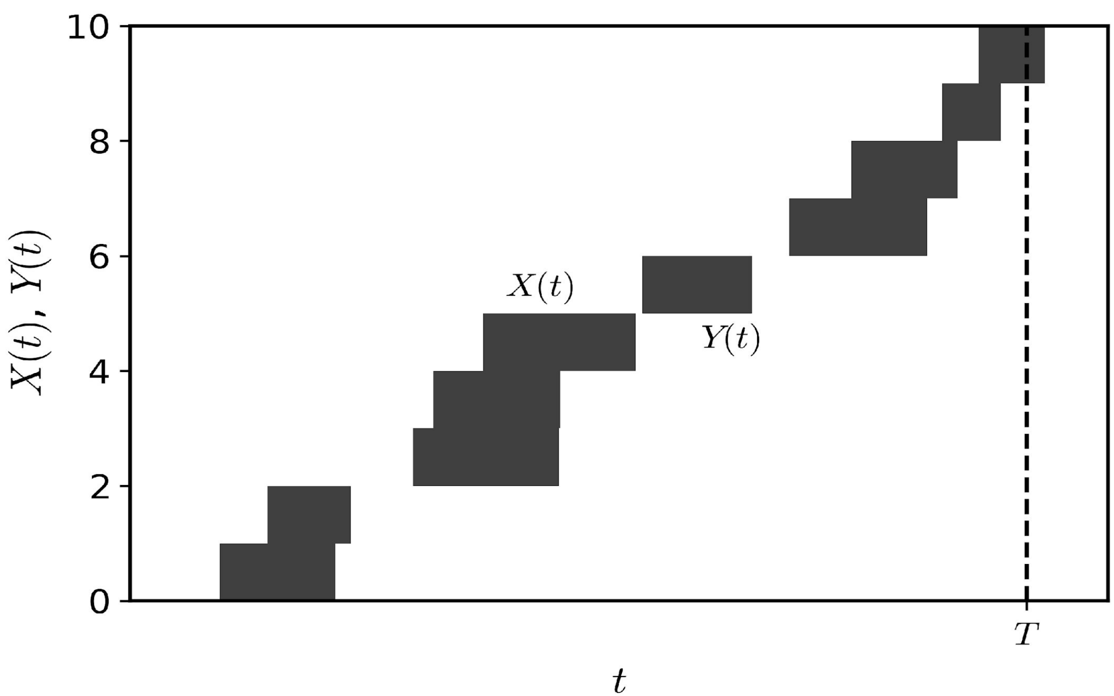
Пусть $X(t)$ – число заявок, прибывших в СМО до момента t, $Y(t)$ – число заявок, покинувших систему до момента t. И та, и другая функция являются случайными и меняются скачком: в моменты прихода заявок $X(t)$ увеличивается на 1, $Y(t)$ уменьшается на 1 в моменты ухода заявки.

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

На временной диаграмме процесса поступления и ухода заявок изображены функции X, Y. Обе линии – ступенчатые; верхняя – X(t), нижняя – Y(t). Очевидно, что для любого момента времени их разность

Z(t) = X(t) – Y(t) – есть не что иное, как число заявок, находящихся в СМО.



2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

Рассмотрим очень большой промежуток времени T и вычислим для него среднее число заявок, находящихся в СМО. Оно будет равно интегралу от функции Z(t) на этом промежутке, деленному на длину интервала T:

$$L_{sys} = \frac{1}{T} \cdot \int_{0}^{T} Z(t)dt$$

Но этот интеграл есть не что иное, как площадь заштрихованной фигуры, приведенной на слайде № 23.
Фигура состоит из прямоугольников, высота которых равна 1, а основание – равно времени пребывания соответствующей заявки в системе. Обозначим эти времена t1, t2, t3…tn

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

Таким образом, можно считать, что,

$$\int_0^T Z(t)dt = \sum_{i=0}^{n} t_i$$

где сумма распространяется на все заявки, пришедшие за время Т. Разделим правую и левую часть данного выражения на Т получим:

$$\frac{\int_0^T Z(t)dt}{T} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i}{T}$$

В левой части уравнения есть среднее число заявок, находящихся в СМО :

$$L_{sys} = \frac{1}{T} \cdot \int_0^T Z(t)dt$$

Отсюда получим

$$L_{sys} = \frac{\int_0^T Z(t)dt}{T} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i}{T}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

Разделим и умножим правую часть полученного ранее выражения на λ, тогда получим:

$$L_{sys} = \frac{\int_0^T Z(t)dt}{T} = \frac{\sum_{i=0}^{n} t_i \cdot \lambda}{T \cdot \lambda} = W_{sys} \cdot \lambda$$

Но Tλ -- есть не что иное, как среднее число заявок, пришедшее за время T. Если мы разделим сумму всех времен ti на среднее число заявок, то получим среднее время пребывания заявки в системе Wsys. Итак, среднее время пребывания заявки в системе составит:

$$W_{sys} = \frac{L_{sys}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

А средне время пребывания заявки в очереди составит:

$$W_L = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$$

2. Модель вычислительной системы в виде одноканальной СМО с очередью

Среднее время пребывания заявки в системе и в очереди

Это и есть известная формула Литтла:
для системы массового обслуживания, при любом характере потока заявок, при любом распределении времени обслуживания, при любой дисциплине обслуживания среднее время пребывания заявки в системе равно среднему числу заявок в системе, деленному на интенсивность потока заявок.

$$W_{sys} = \frac{L_{sys}}{\lambda} = \frac{\rho}{\lambda(1-\rho)}$$

А средне время пребывания заявки в очереди составит:

$$W_L = \frac{L}{\lambda} = \frac{\rho^2}{\lambda(1-\rho)}$$

3. Примеры решения задач

1. Найти абсолютную пропускную способность одноканальной ВС с очередью и среднее время нахождения заявки в очереди, если известно, что среднее число программ в очереди составило L=10, а интенсивность обработки программ сервером составила μ=1,0 [1/сек].

Решение.

Используем следующую формулу для очереди L одноканальной ВС:

$$L = L_{sys} - \rho = \frac{\rho}{(1-\rho)} - \rho = \frac{\rho^2}{(1-\rho)}$$

Разрешим приведенное уравнение относительно ρ, получим следующее значение ρ=0,916;

Учитывая, что ρ=λ/μ, найдем значение λ= ρ*μ=0,916*1=0,916.

Принимая во внимание, что для одноканальной ВС с неограниченной очередью абсолютная пропускная способность равна интенсивности входного потока, т.е. все поступающие заявки будут обслужены, то тогда A= λ=0,916.

Используя формулу Литтла, найдем среднее время нахождения заявки в очереди:

W=L/ λ=10/0,916= 10,916