Тема 2.2 Метод простой итерации. Метод дихотомии

Метод простой итерации

- Рассмотрим уравнение вида $x=f(x)$ с корнем t, отделенным на отрезке $[a;b]$.
- Функция f предполагается непрерывной на этом отрезке.
- Уравнение можно получить из исходного уравнения: $f(x) = 0$ путем эквивалентных преобразований.

Метод простой итерации

Пример.

- Уравнение $x^3–3x+1=0$ представляется в виде $x=f(x)$ разными способами. Например:

а) $x = \dfrac{x^3+1}{3}$; б) $x = x^3 - 2x + 1$; в) $x = \sqrt[3]{3x-1}$.

Метод простой итерации

- Метод простой итерации является одним из наиболее удобных и эффективных методов приближенного решения уравнений. Он основан на многократном применении итерационной формулы $x_{n+1}=f(x_n)$ до тех пор, пока соблюдается условие $|x_{n+1}-x_n| \geq e$, где e — заданная погрешность вычисления корня.
- Итерационный процесс сходится (т. е. $x_n \to t$ при $n \to \infty$), если соблюдается условие $f'(x)<1$ на отрезке $[a;b]$.

Пример

- Используем метод простой итерации для решения уравнения

$$f(x)=\sin x-x^2=0$$

- с точностью $\varepsilon=0,001$
- Преобразуем уравнение к виду:

$$x=\frac{\sin x}{x} \qquad \varphi(x)=\frac{\sin x}{x}$$

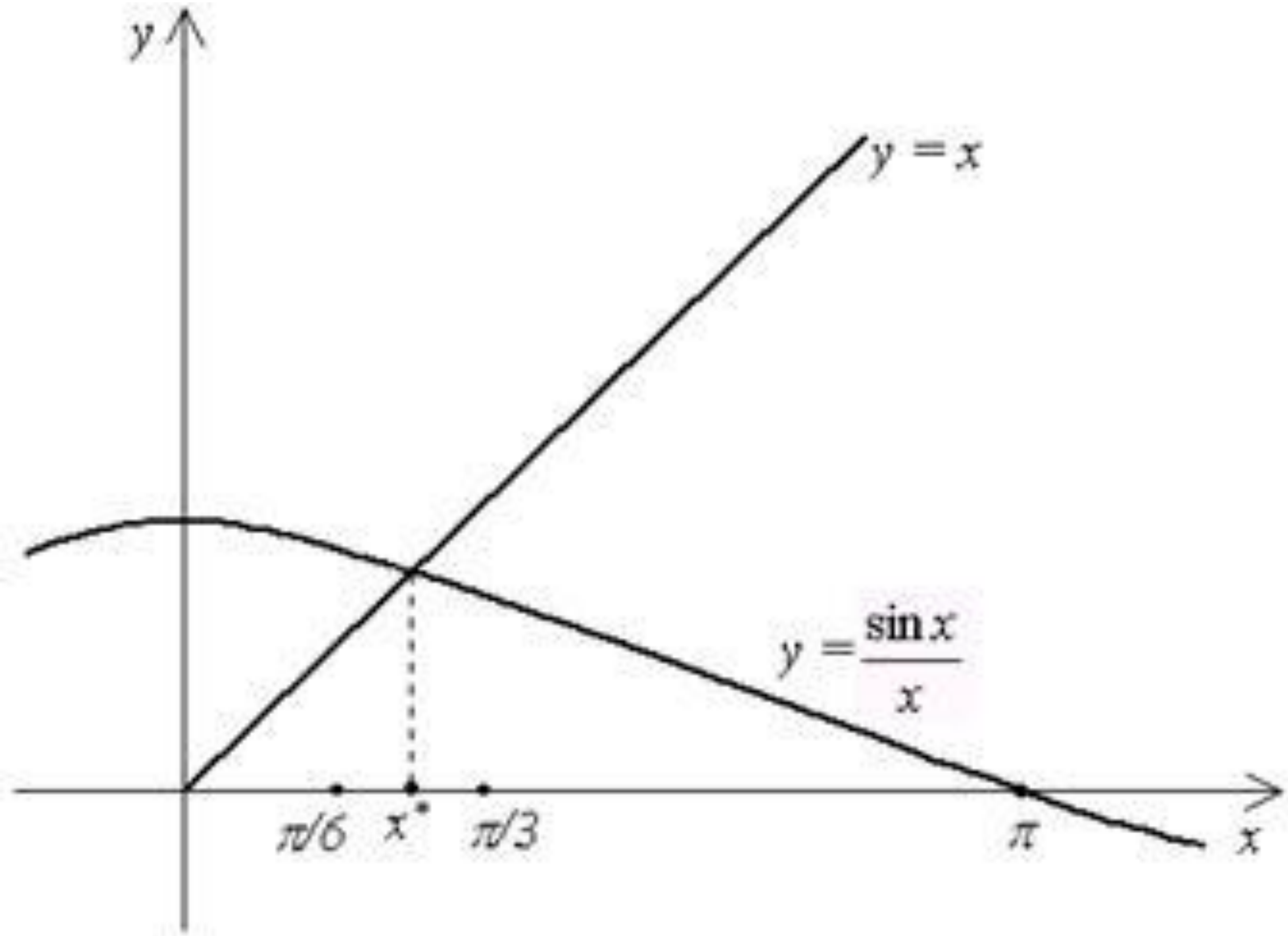
Пример

- Нетрудно убедиться, что корень уравнения находится на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$
- Вычислив значения f(x) на концах отрезка, получим:

$$f(\pi/6)>0 \qquad f(\pi/3)<0$$

- т. е. функция на концах отрезка имеет разные знаки, поэтому внутри отрезка есть корень.

Пример



Пример

- Подсчитаем первую и вторую производные функции

$$\varphi'(x) = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2}, \quad \varphi''(x) = \frac{\sin x\left(2 - x^2\right)}{x^3}$$

- Так как $\varphi''(x) > 0$ на отрезке $[\pi/6, \pi/3]$ то производная $\varphi'(x) > 0$ монотонно возрастает на этом отрезке и принимает максимальное значение на правом конце отрезка, т. е. в точке $\pi/3$

Пример

- Поэтому справедлива оценка:

$$\left|\varphi'(x)\right| \le \left|\varphi'(\pi/3)\right| \approx 0{,}312$$

- Таким образом, условие выполнено, $q < 0{,}5$ и можно воспользоваться критерием окончания вычислений.

Пример

- В таблице приведены приближения, полученные по расчетной формуле.
- В качестве начального приближения выбрано значение $x_0 = 1$

n	1	2	3	4	5
x_n	0,8415	0,8861	0,8712	0,8774	0,8765

Пример

- Критерий окончания выполняется при n=5

$$\left|x_5 - x_4\right| < 0{,}001$$

- Приближенное значение корня с требуемой точностью

$$x^* \approx 0{,}8765$$

Пример 2.

- Решить методом простой итерации уравнение $f(x)=x^2-0,6$ на отрезке $[0,1]$ с точностью 0,025.
- Для решения исходное уравнение приводится к виду $x=x+\lambda(x^2-0,6)$
- Для выбора величины λ используем формулу $\lambda=-1/\max\{f'(x)\}=-1/(2x)=-1/2$
- Тогда расчетная формула имеет вид

$$x_{i+1}=-0,5x_i^2+x_i+0,3$$

Пример 2.

- В качестве начального приближения можно выбрать верхнюю границу заданного отрезка $x_0 = 1$

n	1	2
x_n	0,8	0,78

- Так как, $|0,8 - 0,78| = 0,02 < \varepsilon$ то $x^* \approx 0,78$

Задания

1. Отделите корни уравнения $3\cos x = x + 1$.
2. Составьте программу, реализующую метод простой итерации, и уточните корень уравнения $x - \sin x - 0{,}25 = 0$ на отрезке [1,1;1,2] с точностью до 0,001.

Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

- Пусть корень t отделен на отрезке $[a;b]$. Требуется найти приближенное значение корня с точностью до e. Функция f непрерывна на $[a;b]$ и имеет разные знаки в точках a и b (для определенности примем $f(a)>0$).

Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

Метод деления отрезка пополам реализуется следующим алгоритмом:

1. Находим $x_i=(a+b)/2$.
2. Вычисляем $f(x_i)$.
3. Если $f(x_i)>0$, задаем $a=x$, иначе $b=x$.
4. Проверяем условие $b–a > e$. Если оно выполняется, идем к п.1, если не выполняется, заканчиваем вычисления и считаем, что $t=x_i$ с заданной точностью e.

Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

Число итераций при использовании этого метода

$$n \approx \frac{\ln((b-a)/\varepsilon)}{\ln 2}$$

значительно, и поэтому сходимость его медленная. Однако при любой ширине отрезка [*a*;*b*] сходимость гарантирована. Кроме того метод половинного деления дает простой и удобный алгоритм уточнения корней с любой наперед заданной степенью точности. Он требует от функции *f* выполнения легко проверяемых свойств: непрерывности на отрезке изоляции корня и разных знаков значений на его концах.

Метод деления отрезка пополам (метод дихотомии)

Пример.

Единственный корень t уравнения x^3–x–1=0 расположен на отрезке [1;2] (проверьте графически!). Необходимо уточнить t с заданной точностью a=0,001. Можно применить метод половинного деления, поскольку функция $f(x)=x3-x-1$ непрерывна на этом отрезке и на его концах принимает значения разных знаков: $f(1) = -1 < 0$, $f(2)=5> 0$.

Пример.

- Найдем приближенно $x = \sqrt[5]{2}$ с точностью $\varepsilon = 0,01$
- Эта задача эквивалентна решению уравнения $x^5 - 2 = 0$ или нахождению нуля функции $f(x) = x^5 - 2$
- В качестве начального отрезка возьмем отрезок $[a_0, b_0]$. $[1,2]$

Пример.

- На концах этого отрезка функция принимает значения с разными знаками:

$$f(1)<0,\ f(2)>0$$

- Найдем число n делений отрезка [1, 2], необходимых для достижения требуемой точности. Имеем:
- $\left|x_n - x^*\right| \le \dfrac{2-1}{2^{n+1}} = \dfrac{1}{2^{n+1}} \le 10^{-2},\ \ n \ge 6$

Пример

- Следовательно, не позднее 6-го деления найдем $x = \sqrt[5]{2}$ с требуемой точностью,

$$x = \sqrt[5]{2} \approx 1,1484$$

- Результаты вычислений представлены в таблице

n	1	2	3	4	5	6	7
$\mathbf{a_n}$	1,0000	1,0000	1,0000	1,1250	1,1250	1,1406	1,1406
$\mathbf{b_n}$	2,0000	1,5000	1,2500	1,2500	1,1875	1,1875	1,1562
$\mathbf{x_n}$	1,5000	1,2500	1,1250	1,1875	1,1406	1,1562	1,1484
Зн $f(a_n)$	-	-	-	-	-	-	-
Зн $f(b_n)$	+	+	+	+	+	+	+
$f(x_n)$	5,5938	0,7585	-0,2959	0,1812	-0,0691	0,0532	-0,0078
$\mathbf{b_n - a_n}$	1,0000	0,5000	0,2500	0,1250	0,0625	0,0312	0,0156

Задание

Отделите корни уравнения $3\cos x = x + 1$. Уточните корень уравнения методом дихотомии.