

Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение
высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

*Производная и
дифференцируемость функции*

**Электронный курс лекций «Математический анализ»,
часть 8**

Оренбург 2017

Производная: основные понятия и определения

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0 .

Тогда функция $\varphi(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ будет определена в $\overset{\circ}{U}(x_0)$.

Определение 1. Если существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, то он называется *производной* функции $f(x)$ (производной от функции $f(x)$) в точке x_0 .

Обозначение: $f'(x_0)$.

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента функции в точке x_0 ;

$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0 , соответствующее приращению Δx аргумента;

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \Delta x = \lim_{x \rightarrow x_0} (x - x_0) = 0$$

Определение 2. Если существует конечный $\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Производная: основные понятия и определения

Определение 3. Если $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ или

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то он называется *бесконечной*

производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f'(x_0) = +\infty$, $f'(x_0) = -\infty$.

Определение 4. Если существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *правой производной*

функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение 5. Если существует конечный $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ то он называется *левой производной*

функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Производная: основные понятия и определения

Определение 6. Если $\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ ИЛИ

$\lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то он называется *бесконечной*

правой производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f'_+(x_0) = +\infty$, $f'_+(x_0) = -\infty$.

Определение 7. Если $\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = +\infty$ ИЛИ

$\lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = -\infty$, то он называется *бесконечной*

левой производной функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f'_-(x_0) = +\infty$, $f'_-(x_0) = -\infty$.

Производная: основные понятия и определения

Теорема 1 (о связи существования производной функции в точке с существованием односторонних производных функции в точке)

$$f'(x_0) = A, \quad A \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \begin{cases} f'_+(x_0) = A, \\ f'_-(x_0) = A. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из свойств функций, имеющих конечный предел в точке.

Теорема 2 (о связи существования бесконечной производной функции в точке с существованием односторонних бесконечных производных функции в точке)

$$1) \quad f'(x_0) = +\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f'_+(x_0) = +\infty, \\ f'_-(x_0) = +\infty. \end{cases}$$

$$2) \quad f'(x_0) = -\infty \Leftrightarrow \begin{cases} f'_+(x_0) = -\infty, \\ f'_-(x_0) = -\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из свойств бесконечно больших функций.

Дифференцируемость функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0 .

Определение 8. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке x_0* , если найдется окрестность $U(x_0)$, в которой приращение функции в этой точке $\Delta f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \text{ где } A \in R, \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0.$$

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$.

Определение 9. Если функция $f(x) \in D(x_0)$ и $A \neq 0$, то главная часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0 , линейная относительно Δx , т.е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $df(x_0) = A \cdot \Delta x$.

Замечание. Если $A = 0$, то $A \cdot \Delta x = 0 \cdot \Delta x = 0$ и первое слагаемое, вообще говоря, может и не быть главной частью приращения, так как $\alpha(\Delta x)$ может быть функцией, отличной от нуля. Поэтому, в этом случае, когда $A = 0$, полагают $df(x_0) = 0$.

Свойства дифференцируемых функций

Теорема 3 (о связи дифференцируемости функции в точке с существованием производной функции в точке)

$$f(x) \in D(x_0) \Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство.

$$1) \quad f(x) \in D(x_0) \quad \exists U(x_0):$$

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad A \in R; \quad \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A + \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0; \quad \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = A, \quad A \in R; \quad \exists f'(x_0) = A$$

$$2) \quad \exists f'(x_0) = B, B \in R \quad \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = B;$$

$\exists U(x_0)$ и функция $\beta(\Delta x)$, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x \rightarrow 0$, такие что

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = B + \beta(\Delta x), \Delta x \neq 0; \quad \Delta f(x_0) = B \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x, \Delta x \neq 0$$
$$\Delta x = 0, \quad \Delta f(x_0) = 0,$$

$$\exists U(x_0): \quad \Delta f(x_0) = B \cdot \Delta x + \beta(\Delta x) \cdot \Delta x. \quad A = B, \quad \alpha(\Delta x) = \beta(\Delta x) \cdot \Delta x$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\beta(\Delta x) \cdot \Delta x}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \beta(\Delta x) = 0, \quad \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \Delta x \rightarrow 0; \quad f(x) \in D(x_0)$$

Свойства дифференцируемых функций

Следствие 1. Если $f(x) \in D(x_0)$, то $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Теорема 4 (о связи дифференцируемости функции в точке с непрерывностью функции в точке).

Если $f(x) \in D(x_0)$, то $f(x) \in C(x_0)$.

Доказательство. $f(x) \in D(x_0)$, $\exists U(x_0)$:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad A \in R; \quad \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \rightarrow 0$$

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0),$$

$$\Delta x = x - x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x),$$

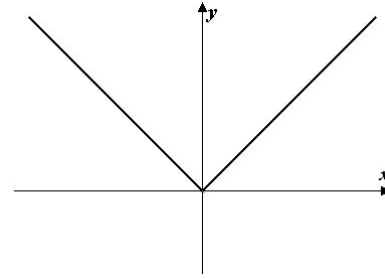
$$f(x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x),$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} (f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)) = f(x_0)$$

Дифференцируемость функции в точке

Замечание. Следует помнить, что в обратную сторону утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в точке не следует её дифференцируемость.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0+0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0+0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0-0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0-0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$$f'_+(0) = 1,$$

$$f'_-(0) = -1,$$

$$f'_+(0) \neq f'_-(0).$$

$$f(x) \notin D(0)$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = |0| = 0 = f(0),$$

$$f(x) \in C(0)$$

Правила вычисления производных

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0 .

Теорема 5 (о дифференцируемости суммы, разности, произведения и частного двух функций).

Если $f(x), g(x) \in D(x_0)$, то

1) $\varphi(x) = f(x) + g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

2) $\varphi(x) = f(x) - g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;

3) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

4) $\varphi(x) = \frac{f(x)}{g(x)} \in D(x_0)$, если $g(x_0) \neq 0$, причем

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Правила вычисления производных

Доказательство.

$$1) \varphi(x) = f(x) + g(x)$$

$$\Delta\varphi(x_0) = f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0) = (f(x) - f(x_0)) + (g(x) - g(x_0))$$

$$\Delta\varphi(x_0) = \Delta f(x_0) + \Delta g(x_0),$$

$$\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}, \quad \Delta x \neq 0,$$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

$$g(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0),$$

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0),$$

$$\varphi(x) \in D(x_0)$$

$$3) \quad \varphi(x) = f(x) \cdot g(x).$$

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(x_0) &= \varphi(x) - \varphi(x_0) = f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &= f(x) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x) + f(x_0) \cdot g(x) - f(x_0) \cdot g(x_0) = \\ &= g(x) \cdot (f(x) - f(x_0)) + f(x_0) \cdot (g(x) - g(x_0)) \end{aligned}$$

$$\Delta\varphi(x_0) = g(x) \cdot \Delta f(x_0) + f(x_0) \cdot \Delta g(x_0)$$

$$\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x} = g(x) \cdot \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}, \Delta x \neq 0,$$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0),$$

$$g(x) \in D(x_0) \Rightarrow \exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x} = g'(x_0),$$

$$g(x) \in D(x_0) \Rightarrow g(x) \in C(x_0) \Rightarrow \lim_{\Delta x \rightarrow 0} g(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = g(x_0)$$

$$\exists \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x} = g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0),$$

$$\varphi'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + g'(x_0) \cdot f(x_0),$$

$$\varphi(x) \in D(x_0)$$

Правила вычисления производных

Замечание. Если $f(x) = C, C \in \mathbb{R}, \forall x \in U(x_0)$, то $f'(x_0) = 0$.

$$\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0) = C - C = 0, \quad \forall x \in U(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{0}{\Delta x} = 0.$$

Следствие 2. Если $f(x) \in D(x_0)$, то $\forall C \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

- 1) $\varphi(x) = f(x) + C \in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0) = f'(x_0)$;
- 2) $\varphi(x) = C \cdot f(x) \in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0) = C \cdot f'(x_0)$.

Следствие 3. Если $f_i(x) \in D(x_0), i = 1, \dots, k$, то

1) $\varphi(x) = \sum_{i=1}^k f_i(x) \in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0) = \sum_{i=1}^k f_i'(x_0)$;

2) $\varphi(x) = \prod_{i=1}^k f_i(x) \in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0) = \sum_{i=1}^k f(x_0)'_i \cdot \frac{\prod_{m=1}^k f_m(x_0)}{f_i(x_0)}$.

Правила вычисления производных

Теорема 6 (о производной сложной функции)

Если функция $f(x) \in D(x_0)$, функция $g(y) \in D(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, то функция $F(x) = g(f(x)) \in D(x_0)$ и $F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{x - x_0} = \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} \cdot \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

$$f(x) \in D(x_0) \Rightarrow f(x) \in C(x_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0) = y_0$$

$$g(y) \in D(y_0) \Rightarrow \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{g(f(x)) - g(f(x_0))}{f(x) - f(x_0)} = |y = f(x)| = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(y_0)$$

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = g'(y_0) \cdot f'(x_0)$$

$$F'(x_0) = g'(y_0) \cdot f'(x_0),$$

$$F(x) = g(f(x)) \in D(x_0)$$

Правила вычисления производных

Теорема 7 (о существовании и непрерывности обратной функции)

Если функция $y = f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на интервале $(a; b)$, причем $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = d$, $\lim_{x \rightarrow b-0} f(x) = c$, то существует единственная функция $x = f^{-1}(y)$, обратная к функции $y = f(x)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на интервале $(d; c)$ (на интервале $(c; d)$).

Доказательство. Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-томах. Т.1.

Теорема 8 (о производной обратной функции)

Если $f(x) \in D(x_0)$, $f'(x_0) \neq 0$ и $f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в некоторой окрестности $U(x_0)$, тогда если $y_0 = f(x_0)$, то функция $x = f^{-1}(y) \in D(y_0)$ и $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \frac{x - x_0}{f(x) - f(x_0)} = \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

$$\lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y} = \lim_{y \rightarrow y_0} \frac{f^{-1}(y) - f^{-1}(y_0)}{y - y_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}} = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

$$x = f^{-1}(y) \in D(y_0)$$

Правила вычисления производных

Замечание. 1) Если $f'(x_0)=0$, то в случае возрастания функции $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} > 0, \forall x \in U(x_0)$, и, следовательно, из свойств бесконечно малых

функций следует, что $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = +\infty$, т.е. $(f^{-1})'(y_0) = +\infty$; в случае

убывания функции $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} < 0, \forall x \in U(x_0)$, и, следовательно,

$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = -\infty$, т.е. $(f^{-1})'(y_0) = -\infty$.

2) Если $f'(x_0) = +\infty$ или $f'(x_0) = -\infty$, то $\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{1}{\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}} = 0$, т.е.

$(f^{-1})'(y_0) = 0$;

Правила вычисления производных

1. $C' = 0, C \in R.$

2. $(u + v)' = u' + v'.$

3. $(u - v)' = u' - v'.$

4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'.$

5. $(C \cdot u)' = C \cdot u', C \in R.$

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}, v \neq 0.$

7. $(g(f(x)))' = g'(y) \cdot f'(x),$ где $y = f(x).$

8. $(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)},$ где $y = f(x), f'(x) \neq 0.$

Таблица производных

1. $C' = 0, C \in \mathbb{R}$.

2. $(x)' = 1$.

3. $(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha-1}$, для тех α и x , где существуют обе функции; в частности,
 $(x^2)' = 2x; \quad (x^3)' = 3x^2; \quad (\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0$.

4. $(\sin x)' = \cos x$.

5. $(\cos x)' = -\sin x$.

6. $(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

7. $(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}, x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$.

Таблица производных

$$8. (\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1).$$

$$9. (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1).$$

$$10. (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$11. (\operatorname{arcctg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}.$$

$$12. (a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1; \text{ в частности, } (e^x)' = e^x.$$

$$13. (\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0; a > 0, a \neq 1; \text{ в частности, } (\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0.$$

$$14. (\operatorname{sh} x)' = \operatorname{ch} x.$$

$$15. (\operatorname{ch} x)' = \operatorname{sh} x.$$

$$16. (\operatorname{th} x)' = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 x}.$$

$$17. (\operatorname{cth} x)' = -\frac{1}{\operatorname{sh}^2 x}.$$

Вывод формул 1) – 17) повторить самостоятельно.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x) \in D(U(x_0))$, т.е. $\forall x \in U(x_0) \exists f'(x)$, следовательно, $f'(x)$ - функция, определенная на $U(x_0)$.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0 , если $f'(x) \in D(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(2)}(x_0)$.

Определение 11. Производная функции $f'(x)$ в точке x_0 , т.е. $(f'(x))'(x_0)$, называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Определение 12. Дифференциал от дифференциала $df(x)$ в точке x_0 , т.е. $d(df(x))(x_0)$ называется *вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $d^2 f(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x) \in D^{(n-1)}(U(x_0))$, т.е. $\forall x \in U(x_0) \exists f^{(n-1)}(x)$, следовательно, $f^{(n-1)}(x)$ - функция, определенная на $U(x_0)$.

Определение 13. Функция $f(x)$ называется n раз дифференцируемой в точке x_0 , если $f^{(n-1)}(x) \in D(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(n)}(x_0)$.

Определение 14. Производная функции $f^{(n-1)}(x)$ в точке x_0 , т.е. $(f^{(n-1)}(x))'(x_0)$, называется производной n -го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $f^{(n)}(x_0)$.

Определение 15. Дифференциал от дифференциала $d^{n-1}f(x)$ в точке x_0 , т.е. $d(d^{n-1}f(x))(x_0)$ называется дифференциалом n -го порядка функции $f(x)$ в точке x_0 .

Обозначение: $d^n f(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 16. Функция $f(x)$ называется *бесконечно дифференцируемой* в точке x_0 , если в этой точке у неё существует производная любого порядка, т.е. $\forall n \in \mathbb{N} \exists f^{(n)}(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(\infty)}(x_0)$.

Определение 17. Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в точке x_0 , если производная $f'(x)$ функции непрерывна в этой точке, т.е. $f'(x) \in C(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(1)}(x_0)$.

Определение 18. Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в окрестности $U(x_0)$, если производная $f'(x)$ функции непрерывна в каждой точке этой окрестности, т.е. $f'(x) \in C(U(x_0))$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(1)}(U(x_0))$.

Определение 19. Функция $f(x)$ называется *n раз непрерывно дифференцируемой* в точке x_0 , если производная n -го порядка $f^{(n)}(x)$ непрерывна в этой точке, т.е. $f^{(n)}(x) \in C(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(n)}(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 20. Функция $f(x)$ называется n раз непрерывно дифференцируемой в окрестности $U(x_0)$, если производная n -го порядка $f^{(n)}(x)$ непрерывна в каждой точке этой окрестности, т.е. $f^{(n)}(x) \in C(U(x_0))$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(n)}(U(x_0))$.

Теорема 24 (формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)

Если $f(x) \in C^{(n-1)}(U(x_0)) \cap D^{(n)}\left(U(x_0)\right)$, то $\forall x \in U(x_0)$ найдется точка ξ , заключенная между x и x_0 , такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

Доказательство. С доказательством справедливости данного утверждения можно ознакомиться по учебнику Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. – М: Наука, 1973. Т.1, стр. 143 – 149.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 21. Слагаемое $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$ называется *остаточным членом в форме Лагранжа*.

Обозначение: $R_n(x, \xi) = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!} (x - x_0)^n$ или $R_n(x)$.

Определение 22. Многочлен

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

называется *многочленом Тейлора* порядка $n-1$ для функции $f(x)$ по степеням $x - x_0$

Обозначение: $T_{n-1}(x)$ или $T_{n-1}(x; x_0)$.

$$f(x) = T_{n-1}(x) + R_n(x)$$

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!} (x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!} (x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!} (x - x_0)^{n-1}$$

Абсолютная погрешность формулы: $\Delta = |R_n(x)|$.

Список использованных источников

- 1 <http://foxford.ru/wiki/matematika/grafik-funksii-y-x>