Федеральное государственное бюджетное образовательное учреждение высшего образования
«Оренбургский государственный университет»
Кафедра прикладной математики

И.Г. Руцкова

Производная и дифференцируемость функции

Электронный курс лекций «Математический анализ», часть 8

Оренбург 2017

Производная: основные понятия и определения

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности $U(x_0)$ точки x_0.

Тогда функция $\varphi(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ будет определена в $\mathring{U}(x_0)$.

Определение 1. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, то он называется *производной* функции $f(x)$ (производной от функции $f(x)$) в точке x_0.

Обозначение: $f'(x_0)$.

$\Delta x = x - x_0$ - приращение аргумента функции в точке x_0;

$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$ - приращение функции $f(x)$ в точке x_0, соответствующее приращению Δx аргумента;

$$\lim_{x\to x_0}\Delta x=\lim_{x\to x_0}(x-x_0)=0$$

Определение 2. Если существует конечный $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется *производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Производная: основные понятия и определения

Определение 3. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-\infty$, то он называется *бесконечной производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f'(x_0)=+\infty$, $f'(x_0)=-\infty$.

Определение 4. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$, то он называется ***правой производной*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f'_+(x_0)$.

Определение 5. Если существует конечный $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}$ то он называется ***левой производной*** функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f'_-(x_0)$.

Производная: основные понятия и определения

Определение 6. Если $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0+0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0+0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-\infty$, то он называется *бесконечной правой производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f'_+(x_0)=+\infty$, $f'_+(x_0)=-\infty$.

Определение 7. Если $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=+\infty$ или $\lim\limits_{x\to x_0-0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\lim\limits_{\Delta x\to 0-0}\dfrac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=-\infty$, то он называется *бесконечной левой производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f'_-(x_0)=+\infty$, $f'_-(x_0)=-\infty$.

Производная: основные понятия и определения

Теорема 1 *(о связи существования производной функции в точке с существованием односторонних производных функции в точке)*

$$f'(x_0)=A,\quad A\in R \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_+(x_0)=A, \\ f'_-(x_0)=A. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из свойств функций, имеющих конечный предел в точке.

Теорема 2 *(о связи существования бесконечной производной функции в точке с существованием односторонних бесконечных производных функции в точке)*

$$1)\quad f'(x_0)=+\infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_+(x_0)=+\infty, \\ f'_-(x_0)=+\infty. \end{cases}$$

$$2)\quad f'(x_0)=-\infty \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} f'_+(x_0)=-\infty, \\ f'_-(x_0)=-\infty. \end{cases}$$

Доказательство. Справедливость данного утверждения следует из свойств бесконечно больших функций.

Дифференцируемость функции в точке

Пусть функция $f(x)$ определена в некоторой окрестности точки x_0.

Определение 8. Функция $f(x)$ называется *дифференцируемой в точке* x_0, если найдется окрестность $U(x_0)$, в которой приращение функции в этой точке $\Delta f(x_0)$ может быть представлено в виде:

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \text{ где } A \in R, \ \alpha(\Delta x) = \circ(\Delta x), \quad \Delta x \to 0.$$

Обозначение: $f(x) \in D(x_0)$.

Определение 9. Если функция $f(x) \in D(x_0)$ и $A \neq 0$, то главная часть приращения функции $f(x)$ в точке x_0, линейная относительно Δx, т.е. $A \cdot \Delta x$, называется *дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $df(x_0) = A \cdot \Delta x$.

Замечание. Если $A = 0$, то $A \cdot \Delta x = 0 \cdot \Delta x = 0$ и первое слагаемое, вообще говоря, может и не быть главной частью приращения, так как $\alpha(\Delta x)$ может быть функцией, отличной от нуля. Поэтому, в этом случае, когда $A = 0$, полагают $df(x_0) = 0$.

Свойства дифференцируемых функций

Теорема 3 *(о связи дифференцируемости функции в точке с существованием производной функции в точке)*

$$f(x)\in D(x_0)\Leftrightarrow \exists f'(x_0).$$

Доказательство.

$$1)\quad f(x)\in D(x_0)\qquad \exists U(x_0):$$

$$\Delta f(x_0)=A\cdot\Delta x+\alpha(\Delta x),\quad A\in R;\quad \alpha(\Delta x)=o(\Delta x),\quad \Delta x\to 0$$

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=A+\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x},\quad \Delta x\neq 0;\qquad \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=A,\quad A\in R;\qquad \exists f'(x_0)=A$$

$$2)\quad \exists f'(x_0)=B, B\in R\qquad \exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=B;$$

$\exists U(x_0)$ и функция $\beta(\Delta x)$, являющаяся бесконечно малой при $\Delta x\to 0$, такие что

$$\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=B+\beta(\Delta x),\Delta x\neq 0;\qquad \Delta f(x_0)=B\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x,\Delta x\neq 0$$

$$\Delta x=0,\quad \Delta f(x_0)=0,$$

$$\exists U(x_0):\quad \Delta f(x_0)=B\cdot\Delta x+\beta(\Delta x)\cdot\Delta x.\qquad A=B,\quad \alpha(\Delta x)=\beta(\Delta x)\cdot\Delta x$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\alpha(\Delta x)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\beta(\Delta x)\cdot\Delta x}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\beta(\Delta x)=0,\qquad \alpha(\Delta x)=o(\Delta x),\Delta x\to 0;\qquad f(x)\in D(x_0)$$

Свойства дифференцируемых функций

Следствие 1. Если $f(x) \in D(x_0)$, то $df(x_0) = f'(x_0)\Delta x$.

Теорема 4 *(о связи дифференцируемости функции в точке с непрерывностью функции в точке).*

Если $f(x) \in D(x_0)$, то $f(x) \in C(x_0)$.

Доказательство. $f(x) \in D(x_0)$, $\exists U(x_0):$

$$\Delta f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x), \quad A \in R; \quad \alpha(\Delta x) = o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0$$

$$\boxed{\Delta f(x_0) = f(x) - f(x_0),} \qquad \boxed{\Delta x = x - x_0}$$

$$f(x) - f(x_0) = A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x),$$

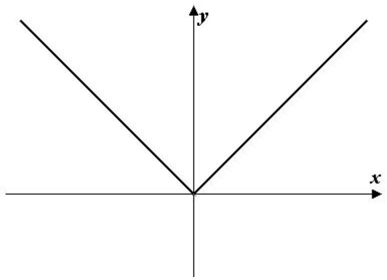
$$\boxed{f(x) = f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x),}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \lim_{x \to x_0} \left(f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\right) = \lim_{\Delta x \to 0} \left(f(x_0) + A \cdot \Delta x + \alpha(\Delta x)\right) = f(x_0)$$

Дифференцируемость функции в точке

Замечание. Следует помнить, что в обратную сторону утверждение неверно, т.е. из непрерывности функции в точке не следует её дифференцируемость.

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x, & x \geq 0; \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$



$$\lim_{\Delta x \to 0+0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0+0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0+0} \frac{x}{x} = 1,$$

$$\lim_{\Delta x \to 0-0} \frac{\Delta f(0)}{\Delta x} = \lim_{x \to 0-0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{|x| - |0|}{x - 0} = \lim_{x \to 0-0} \frac{-x}{x} = -1,$$

$\boxed{f'_+(0) = 1,}$ $\boxed{f'_-(0) = -1,}$ $\boxed{f'_+(0) \neq f'_-(0).}$ $\boxed{f(x) \notin D(0)}$

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} |x| = |0| = 0 = f(0),$$

$\boxed{f(x) \in C(0)}$

Правила вычисления производных

Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ определены в некоторой окрестности точки x_0.

Теорема 5 *(о дифференцируемости суммы, разности, произведения и частного двух функций).*

Если $f(x),\ g(x) \in D(x_0)$, то

1) $\varphi(x) = f(x) + g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$;

2) $\varphi(x) = f(x) - g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0) - g'(x_0)$;

3) $\varphi(x) = f(x) \cdot g(x) \in D(x_0)$, причем $\varphi'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0)$;

4) $\varphi(x) = \dfrac{f(x)}{g(x)} \in D(x_0)$, если $g(x_0) \neq 0$, причем

$$\varphi'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - g'(x_0) \cdot f(x_0)}{g^2(x_0)}.$$

Правила вычисления производных

Доказательство.

$$1)\quad \varphi(x)=f(x)+g(x)$$

$$\Delta\varphi(x_0)=f(x)+g(x)-f(x_0)-g(x_0)=\left(f(x)-f(x_0)\right)+\left(g(x)-g(x_0)\right)$$

$$\Delta\varphi(x_0)=\Delta f(x_0)+\Delta g(x_0),$$

$$\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x}=\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x},\quad \Delta x\neq 0,$$

$$f(x)\in D(x_0)\quad\Rightarrow\quad\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),$$

$$g(x)\in D(x_0)\quad\Rightarrow\quad\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0),$$

$$\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0)+g'(x_0),$$

$$\varphi'(x_0)=f'(x_0)+g'(x_0),$$

$$\varphi(x)\in D(x_0)$$

$$\boxed{3)\quad \varphi(x)=f(x)\cdot g(x).}$$

$$\Delta\varphi(x_0)=\varphi(x)-\varphi(x_0)=f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)=$$

$$=f(x)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x)+f(x_0)\cdot g(x)-f(x_0)\cdot g(x_0)=$$

$$=g(x)\cdot(f(x)-f(x_0))+f(x_0)\cdot(g(x)-g(x_0))$$

$$\boxed{\Delta\varphi(x_0)=g(x)\cdot\Delta f(x_0)+f(x_0)\cdot\Delta g(x_0)}$$

$$\boxed{\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x}=g(x)\cdot\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}+f(x_0)\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x},\Delta x\neq 0,}$$

$$\boxed{f(x)\in\quad D(x_0)\quad\Rightarrow\quad\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f(x_0)}{\Delta x}=f'(x_0),}$$

$$\boxed{g(x)\in\quad D(x_0)\quad\Rightarrow\quad\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta g(x_0)}{\Delta x}=g'(x_0),}$$

$$\boxed{g(x)\in\quad D(x_0)\quad\Rightarrow\quad g(x)\in C(x_0)\Rightarrow\lim_{\Delta x\to 0}g(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=g(x_0)}$$

$$\boxed{\exists\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta\varphi(x_0)}{\Delta x}=g(x_0)\cdot f'(x_0)+f(x_0)\cdot g'(x_0),}$$

$$\boxed{\varphi'(x_0)=f'(x_0)\cdot g(x_0)+g'(x_0)\cdot f(x_0),}\qquad\boxed{\varphi(x)\in D(x_0)}$$

Правила вычисления производных

Замечание. Если $f(x)=C, C\in R, \forall x\in U(x_0)$, то $f'(x_0)=0$.

$$\Delta f(x_0)=f(x)-f(x_0)=C-C=0,\ \forall \in U(x_0),$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta f((x_0))}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{0}{\Delta x}=0.$$

Следствие 2. Если $f(x)\in D(x_0)$, то $\forall C\in R\setminus\{0\}$

1) $\varphi(x)=f(x)+C\in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0)=f'(x_0)$;
2) $\varphi(x)=C\cdot f(x)\in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0)=C\cdot f'(x_0)$.

Следствие 3. Если $f_i(x)\in D(x_0)$, $i=1,\dots,k$, то

1) $\varphi(x)=\sum\limits_{i=1}^{k} f_i(x)\in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{k} f_i'(x_0)$;

2) $\varphi(x)=\prod\limits_{i=1}^{k} f_i(x)\in D(x_0)$ и $\varphi'(x_0)=\sum\limits_{i=1}^{k} f(x_0)_i'\cdot\dfrac{\prod\limits_{m=1}^{k} f_m(x_0)}{f_i(x_0)}$.

Правила вычисления производных

Теорема 6 *(о производной сложной функции)*

Если функция $f(x)\in D(x_0)$, функция $g(y)\in D(y_0)$, где $y_0 = f(x_0)$, то функция $F(x)=g(f(x))\in D(x_0)$ и $F'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0)$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$\boxed{f(x)\in D(x_0)\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)}$$

$$\boxed{f(x)\in D(x_0)\Rightarrow f(x)\in C(x_0)\Rightarrow \lim_{x\to x_0} f(x)=f(x_0)=y_0}$$

$$\boxed{g(y)\in D(y_0)\Rightarrow \lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{f(x)-f(x_0)}=\left|y=f(x)\right|=\lim_{y\to y_0}\frac{g(y)-g(y_0)}{y-y_0}=g'(y_0)}$$

$$\boxed{\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta F(x_0)}{\Delta x}=\lim_{x\to x_0}\frac{F(x)-F(x_0)}{x-x_0}=g'(y_0)\cdot f'(x_0)}$$

$$\boxed{F'(x_0)=g'(y_0)\cdot f'(x_0),}$$

$$\boxed{F(x)=g(f(x))\in D(x_0)}$$

Правила вычисления производных

Теорема 7 *(о существовании и непрерывности обратной функции)*

Если функция $y=f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) на интервале $(a;b)$, причем $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)=d$, $\lim\limits_{x\to b-0} f(x)=c$, то существует единственная функция $x=f^{-1}(y)$, обратная к функции $y=f(x)$, непрерывная и возрастающая (убывающая) на интервале $(d;c)$ (на интервале $(c;d)$).

Доказательство . Кудрявцев Л.Д. Курс математического анализа. В 2-томах. Т.1.

Теорема 8 *(о производной обратной функции)*

Если $f(x)\in D(x_0)$, $f'(x_0)\neq 0$ и $f(x)$ непрерывна и возрастает (убывает) в некоторой окрестности $U(x_0)$, тогда если $y_0=f(x_0)$, то функция $x=f^{-1}(y)\in D(y_0)$ и $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\dfrac{1}{f'(x_0)}$.

Доказательство.

$$\frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\frac{x-x_0}{f(x)-f(x_0)}=\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}$$

$$\lim_{\Delta y\to 0}\frac{\Delta f^{-1}(y_0)}{\Delta y}=\lim_{y\to y_0}\frac{f^{-1}(y)-f^{-1}(y_0)}{y-y_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\frac{1}{f'(x_0)}$$

$$\boxed{\left(f^{-1}\right)'(y_0)=\frac{1}{f'(x_0)}}$$

$$\boxed{x=f^{-1}(y)\in D(y_0)}$$

Правила вычисления производных

Замечание. 1) Если $f'(x_0)=0$, то в случае возрастания функции $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}>0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, и, следовательно, из свойств бесконечно малых функций следует, что $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=+\infty$, т.е. $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=+\infty$; в случае убывания функции $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}<0, \forall x \in \overset{\circ}{U}(x_0)$, и, следовательно, $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=-\infty$, т.е. $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=-\infty$.

2) Если $f'(x_0)=+\infty$ или $f'(x_0)=-\infty$, то $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{1}{\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=0$, т.е. $\left(f^{-1}\right)'(y_0)=0$;

Правила вычисления производных

1. $C' = 0, \quad C \in R$ **.**

2. $(u + v)' = u' + v'$ **.**

3. $(u - v)' = u' - v'$ **.**

4. $(u \cdot v)' = u' \cdot v + u \cdot v'$ **.**

5. $(C \cdot u)' = C \cdot u', \quad C \in R$ **.**

6. $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u' \cdot v - u \cdot v'}{v^2}$**,** $v \neq 0$**.**

7. $(g(f(x)))' = g'(y) \cdot f'(x)$**,** где $y = f(x)$.

8. $\left(f^{-1}\right)'(y) = \frac{1}{f'(x)}$, где $y = f(x), \quad f'(x) \neq 0$.

Таблица производных

1. $C' = 0, \quad C \in R.$

2. $(x)' = 1.$

3. $\left(x^{\alpha}\right)' = \alpha x^{\alpha-1}$, для тех α и x, где существуют обе функции; в частности,

$\left(x^{2}\right)' = 2x; \quad \left(x^{3}\right)' = 3x^{2}; \quad \left(\sqrt{x}\right)' = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}, x > 0.$

4. $(\sin x)' = \cos x.$

5. $(\cos x)' = -\sin x.$

6. $(tgx)' = \dfrac{1}{\cos^{2} x}, x \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z.$

7. $(ctgx)' = -\dfrac{1}{\sin^{2} x}, x \neq \pi k, k \in Z.$

Таблица производных

8. $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$.

9. $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, x \in (-1;1)$.

10. $(\mathrm{arctg}x)' = \frac{1}{1+x^2}$.

11. $(\mathrm{arcctg}x)' = -\frac{1}{1+x^2}$.

12. $(a^x)' = a^x \cdot \ln a, \quad a > 0, a \neq 1$; в частности, $(e^x)' = e^x$.

13. $(\log_a x)' = \frac{1}{x \ln a}, x > 0; a > 0, a \neq 1$; в частности, $(\ln x)' = \frac{1}{x}, x > 0$.

14. $(\mathrm{sh}x)' = \mathrm{ch}x$.

15. $(\mathrm{ch}x) = \mathrm{sh}x$.

16. $(\mathrm{th}x)' = \frac{1}{\mathrm{ch}^2 x}$.

17. $(\mathrm{cth}x)' = -\frac{1}{\mathrm{sh}^2 x}$.

Вывод формул 1) – 17) повторить самостоятельно.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x) \in D(U(x_0))$, т.е. $\forall x \in U(x_0)$ $\exists f'(x)$, следовательно, $f'(x)$ - функция, определенная на $U(x_0)$.

Определение 10. Функция $f(x)$ называется *дважды дифференцируемой* в точке x_0, если $f'(x) \in D(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(2)}(x_0)$.

Определение 11. Производная функции $f'(x)$ в точке x_0, т.е. $(f'(x))'(x_0)$, называется *второй производной* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f''(x_0)$ или $f^{(2)}(x_0)$.

Определение 12. Дифференциал от дифференциала $df(x)$ в точке x_0, т.е. $d(df(x))(x_0)$ называется *вторым дифференциалом* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $d^2 f(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Пусть функция $f(x) \in D^{(n-1)}(U(x_0))$, т.е. $\forall x \in U(x_0)\ \exists f^{(n-1)}(x)$, следовательно, $f^{(n-1)}(x)$ - функция, определенная на $U(x_0)$.

Определение 13. Функция $f(x)$ называется *n раз дифференцируемой* в точке x_0, если $f^{(n-1)}(x) \in D(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(n)}(x_0)$.

Определение 14. Производная функции $f^{(n-1)}(x)$ в точке x_0, т.е. $\left(f^{(n-1)}(x)\right)'(x_0)$, называется *производной n-го порядка* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $f^{(n)}(x_0)$.

Определение 15. Дифференциал от дифференциала $d^{n-1}f(x)$ в точке x_0, т.е. $d\left(d^{n-1}f(x)\right)(x_0)$ называется *дифференциалом n-го порядка* функции $f(x)$ в точке x_0.

Обозначение: $d^n f(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 16. Функция $f(x)$ называется *бесконечно дифференцируемой* в точке x_0, если в этой точке у неё существует производная любого порядка, т.е. $\forall n \in N \quad \exists \ f^{(n)}(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in D^{(\infty)}(x_0)$.

Определение 17. Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в точке x_0, если производная $f'(x)$ функции непрерывна в этой точке, т.е. $f'(x) \in C(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(1)}(x_0)$.

Определение 18. Функция $f(x)$ называется *непрерывно дифференцируемой* в окрестности $U(x_0)$, если производная $f'(x)$ функции непрерывна в каждой точке этой окрестности, т.е. $f'(x) \in C(U(x_0))$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(1)}(U(x_0))$.

Определение 19. Функция $f(x)$ называется *n раз непрерывно дифференцируемой* в точке x_0, если производная n-го порядка $f^{(n)}(x)$ непрерывна в этой точке, т.е. $f^{(n)}(x) \in C(x_0)$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(n)}(x_0)$.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 20.. Функция $f(x)$ называется *n раз непрерывно дифференцируемой* в окрестности $U(x_0)$, если производная *n*-го порядка $f^{(n)}(x)$ непрерывна в каждой точке этой окрестности, т.е. $f^{(n)}(x) \in C(U(x_0))$.

Обозначение: $f(x) \in C^{(n)}(U(x_0))$.

Теорема 24 *(формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа)*

Если $f(x) \in C^{(n-1)}(U(x_0)) \cap D^{(n)}\left(\overset{\circ}{U}(x_0)\right)$, то $\forall x \in U(x_0)$ найдется точка ξ, заключенная между x и x_0, такая, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x - x_0)^{n-1} + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x - x_0)^n$$

Доказательство. С доказательством справедливости данного утверждения можно ознакомиться по учебнику Никольский С.М. Курс математического анализа. В 2-х томах. – М: Наука, 1973. Т.1, стр. 143 – 149.

Производные высших порядков. Формула Тейлора

Определение 21. Слагаемое $\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\cdot(x-x_0)^n$ называется *остаточным членом в форме Лагранжа.*

Обозначение: $R_n(x,\xi)=\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}(x-x_0)^n$ или $R_n(x)$.

Определение 22. *Многочлен*

$$f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}$$

называется *многочленом Тейлора* порядка n-1 для функции $f(x)$ по степеням $x-x_0$

Обозначение: $T_{n-1}(x)$ или $T_{n-1}(x;x_0)$.

$$\boxed{f(x)=T_{n-1}(x)+R_n(x)}$$

$$\boxed{f(x)\approx f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\frac{f^{(2)}(x_0)}{2!}(x-x_0)^2+\ldots+\frac{f^{(n-1)}(x_0)}{(n-1)!}(x-x_0)^{n-1}}$$

Абсолютная погрешность формулы: $\Delta=|R_n(x)|$.

Список использованных источников

1 http://foxford.ru/wiki/matematika/grafik-funktsii-y-x