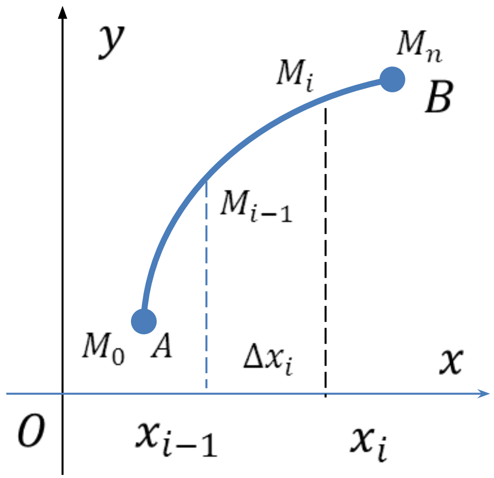
8.3 Криволинейные интегралы

8.3.1 Определение криволинейного интеграла по координатам.



- ***Интеграл по координате x.***

Пусть AB – дуга непрерывной кривой на плоскости OXY, а $z = P(x, y)$ – произвольная функция, определенная на этой кривой. Разобьем дугу AB на конечное число частичных дуг $M_{i-1}M_i$ с длинами Δl_i $(\overline{1;n})$. Составим сумму произведений значений функции в каждой точке $(\xi_i, \eta_i) \in M_{i-1}M_i$ на длину Δx_i проекции дуги $M_{i-1}M_i$ на ось ox:

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i$$

Если при стремлении к нулю $l = \max\limits_{1 \le i \le n} \Delta l_i$ интегральные суммы S_n имеют конечный предел, то этот предел называется *криволинейным интегралом по переменной x от функции P(x, y) по кривой AB* и обозначается

$$\int_{AB} P(x,y)\,dx = \lim_{\substack{l \to 0 \\ n \to \infty}} \sum_{i=1}^{n} P(\xi_i, \eta_i)\,\Delta x_i$$

● ***Криволинейные*** ***интегралы по координата общего вида***

(криволинейные ***интегралы второго рода)***

Аналогично вводится *криволинейный интеграл по переменной y от функции Q(x, y) по кривой AB* .

$$\int\limits_{\breve{AB}} Q(x,y)dy = \lim_{\substack{n\to\infty \\ (l\to 0)}} \sum_{i=1}^{n} Q(\xi_i,\eta_i)\Delta y_i$$

Криволинейные интегралы по координата общего вида определяются равенством

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

В случае, если AB – плоская кривая, заданная уравнением *y = f(x),* то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int\limits_{x_A}^{x_B} \left[P(x, f(x) + Q(x, f(x))f'(x)\right]dx\ .$$

Если кривая *AB* задана параметрическими уравнениями

$x = x(t),\ y = y(t)$, где $t_1 \le t \le t_2$, то

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int^{e_2} \left[P[x(t), y(t)]x'(t) + Q[x(t), y(t)]y'(t))\right]dt\ .$$

Свойства криволинейного интеграла второго рода.

1) Криволинейный интеграл при перемене направления кривой меняет знак.

$$\int_{AB} P(x,y)dx = -\int_{BA} P(x,y)dx$$

2) $\int_{AB} kP(x,y)dx = k\int_{AB} P(x,y)dx;$

3) $\int_{AB} (P_1(x,y)+P_2(x,y))dx = \int_{AB} P_1(x,y)dx + \int_{AB} P_2(x,y)dx$

4) $\int_{AB} P(x,y)dx = \int_{AC} P(x,y)dx + \int_{CA} P(x,y)dx$

5) Криволинейный интеграл по замкнутой кривой L не зависит от выбора начальной точки, а зависит только от направления обхода кривой.

$$\oint_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy$$

Направление обхода контура L задается дополнительно. Если L – замкнутая кривая без точек самопересечения, то направление обхода контура против часовой стрелки называется положительным.

6) Если AB – кривая, лежащая в плоскости, перпендикулярной оси OX, то

$$\int_{AB} P(x,y)dx = 0.$$

Аналогичные соотношения справедливы при интегрировании по переменным у.

Пример.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2 ydx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.

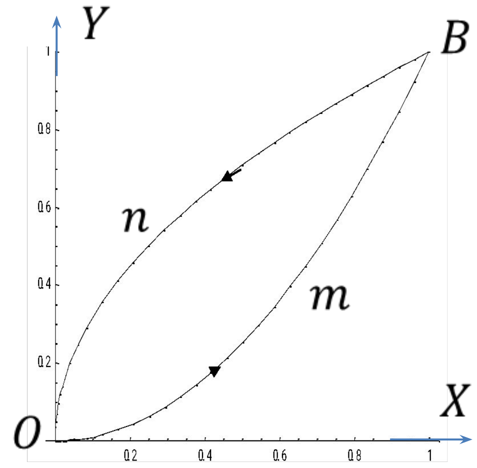
Р е ш е н и е

Представим замкнутый контур L= O m B n O как сумму двух дуг

L_1 = *O m B:* $y = x^2$ и $L_2 = BnO : y = \sqrt{x}$

$$\oint\limits_L x^2 ydx + x^3 dy = \int\limits_{L_1} x^2 ydx + \int\limits_{L_1} x^3 dy + \int\limits_{L_2} x^2 ydx + \int\limits_{L_2} x^3 dy = \int\limits_0^1 x^4 dx + \int\limits_0^1 x^3 \cdot 2xdx + \int\limits_1^0 x^2 \sqrt{x} dx +$$

$$+ \int\limits_1^0 \frac{x^3}{2\sqrt{x}} dx = \frac{x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^5}{5}\Big|_0^1 + \frac{2x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 + \frac{x^{\frac{3}{2}}}{7}\Big|_1^0 = \frac{3}{5} - \frac{3}{7} = \frac{6}{35};$$



О т в е т: $\int\limits_L x^2 ydx + x^3 dy = \dfrac{6}{35}.$

● Случай параметрически заданной кривой

Если дуга AB непрерывной кривой задана параметрическими уравнениями

x=x(t), y=y(t), где t1≤t≤t2, то

Сделать чертеж.

$$\int\limits_{AB} P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \int^{e_2} \left[P[x(t),y(t)]x'(t) + Q[x(t),y(t)]y'(t)\right)dt\,.$$

Пример. Вычислить криволинейный интеграл $I = \int\limits_L (xy-1)dx + x^2ydy$

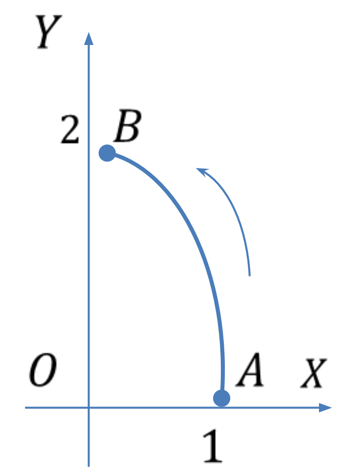
по дуге эллипса $x = \cos t,\quad y = 2\sin t$ от точки A(1; 0) до точки B(0; 2).

Р е ш е н и е:

$$\int\limits_L (xy-1)dx + x^2ydy = \int\limits_{t_A}^{t_B} (\cos t 2\sin t - 1)(-\sin t dt) +$$

$$+\cos^2 t \cdot 2\sin t \cdot 2\cos t dt = \int\limits_0^{\pi/2} (4\cos^3 t \sin t dt + \sin t -$$

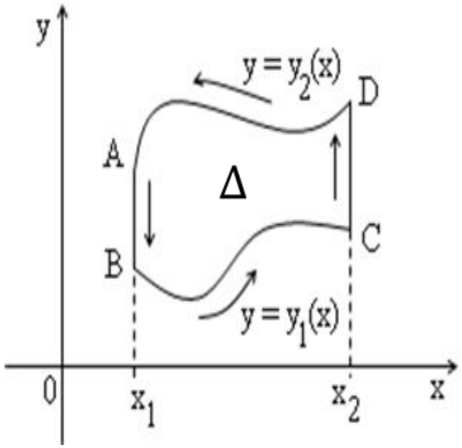
$$-2\sin^2 t \cos t)dt = (-cos^4 t - \cos t - \frac{2}{3}\sin^3 t)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{4}{3}.$$



Ответ: $I = \dfrac{2}{3}$.

Формула Остроградского – Грина

Формула Остроградского – Грина устанавливает связь между криволинейным интегралом и двойным интегралом, т.е. дает выражение интеграла по замкнутому контуру через двойной интеграл по области, ограниченной этим контуром.



Область, ограниченная контуром

Будем считать, что рассматриваемая область **односвязная**, т.е. в ней нет исключенных участков.

Если участки AB и CD контура принять за произвольные кривые, то, проведя соответствующие преобразования, получим формулу для контура произвольной формы:

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_{\Delta}\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dydx$$

Формула Остроградского – Грина во многих случаях позволяет значительно упростить вычисление криволинейного интеграла.

Пример.

Вычислить криволинейный интеграл $\int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy$. L – контур, ограниченный параболами $y^2 = x; \quad x^2 = y$. Направление обхода контура положительное.

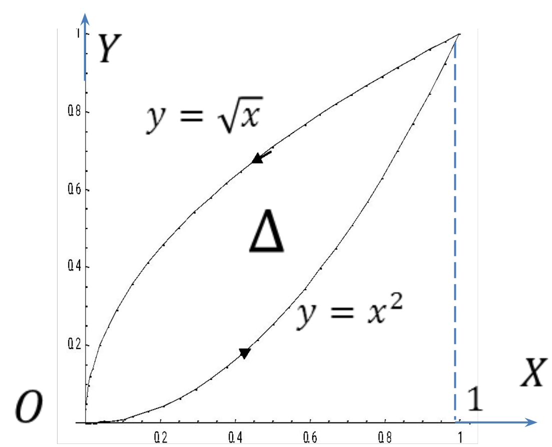
Р е ш е н и е

Найдём интеграл по формуле Остроградского – Грина

$$\oint\limits_L P(x,y)dx + Q(x,y)dy = \iint\limits_\Delta \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dydx$$

$$\oint\limits_L x^2 y dx + x^3 dy = \iint\limits_\Delta \left(3x^2 - x^2\right)dydx = \iint\limits_\Delta 2x^2 dydx = \int\limits_0^1 2x^2 y \Big|_{x^2}^{\sqrt{x}} dx = \int\limits_0^1 2(x^{\frac{5}{2}} - x^4)dx =$$

$$= 2\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}} - \frac{x^5}{5}\right)\Bigg|_0^1 = 2\left(\frac{2}{7} - \frac{1}{5}\right) = \frac{6}{35}.$$



О т в е т: $\int\limits_L x^2 y dx + x^3 dy = \frac{6}{35}.$

8.Теория рядов.

8.1. Числовые ряды. Необходимое и достаточные условия сходимости. Признак Лейбница.

- **Числовые ряды.**

Сумма членов бесконечной числовой последовательности $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ называется **числовым рядом** $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$

Числа $u_1, u_2, \ldots$ называют *членами ряда*, а $u_n =$ [illegible] – *общим членом ряда*.

Суммы $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n = \sum_{k=1}^{n} u_k$, $n = 1, 2, \ldots$ называются **частичными (частными) суммами** ряда.

Ряд $u_1 + u_2 + \ldots + u_n + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$ называется **сходящимся**, если сходится последовательность его частичных сумм $\{S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots\}$. **Сумма сходящегося ряда** – предел последовательности его частичных сумм на бесконечности $\lim_{n\to\infty} S_n = S$, $S_n = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$.

Если последовательность частных сумм ряда расходится, т.е. не имеет предела, или имеет бесконечный предел, то ряд называется **расходящимся** и ему не ставят в соответствие никакой суммы.

Свойства рядов.

1) Сходимость или расходимость ряда не нарушится если изменить, отбросить или добавить конечное число членов ряда.

2) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum Cu_n$, где C – постоянное число.

3)Если ряд $\sum u_n$ сходится и его сумма равна S, то ряд $\sum Cu_n$ где C= const, тоже сходится, и его сумма равна CS. ($C \neq 0$)

4) Рассмотрим два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$. **Суммой** или **разностью** этих рядов будет называться ряд $\sum (u_n \pm v_n)$, где элементы получены в результате сложения (вычитания) исходных элементов с одинаковыми номерами.

5) Если ряды $\sum u_n$ и $\sum v_n$ сходятся и их суммы равны соответственно S и σ, то ряд $\sum (u_n \pm v_n)$ тоже сходится и его сумма равна S + σ:

$$\sum (u_n \pm v_n) = \sum u_n \pm \sum v_n = S \pm \sigma$$

6) Сумма сходящегося и расходящегося рядов будет расходящимся рядом.

Замечание. О сумме двух расходящихся рядов общего утверждения сделать нельзя.

- **Гармонические ряды**

Гармонические ряды $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ при $p\geq 1$ сходятся, а при $p<1$ расходятся

Примеры.

А) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, так как $p=2$, a $2>1$.

В) Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ расходится, так как $p=\frac{1}{2}$, a $\frac{1}{2}<1$.

- **Признак сравнения** рядов с неотрицательными членами

Пусть даны два ряда $\sum u_n$ и $\sum v_n$ с неотрицательными членами.

Если начиная с некоторого номера $n\geq n_0$ справедливо равенство $u_n \leq v_n$, то из сходимости ряда $\sum v_n$ следует сходимость ряда $\sum u_n$, а из расходимости ряда $\sum u_n$ следует расходимость ряда $\sum v_n$.

Пример.

Ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n-2}{n^3-3}$ – сходится, так как $\begin{cases} n-2<n \;=>\; \frac{n-2}{n^3+3} < \frac{n}{n^3+3}; \\ n^3+3>n^3 \;=>\; \frac{n}{n^3+3}<\frac{n}{n^3}. \end{cases}$

$$=> \quad \frac{n-2}{n^3-3} < \frac{n}{n^3+3} < \frac{n}{n^3}.$$

Гармонический ряд $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{n^3} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ сходится, потому что p=2, 2>1.