Лекция №2

- **Лемма 3**. При умножении произвольной квадратной матрицы А порядка n справа на трансвекцию $T_{ij}(d)$ к ее j-у столбцу добавляется i-столбец умноженный на d.

Лемма 4. При умножении произвольной квадратной матрицы А порядка n слева на трансвекцию $T_{ij}(d)$ к ее i-ой строке добавляется j-ая строка, умноженная на d.

Пример: $T_{23}(4) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

- **Определение.** Квадратная матрица размерности n называется обратимой, если существует матрица X такая, что $AX = X \cdot A = E$. Такая матрица X – называется обратной для матрицы A и обозначается $X = A^{-1}$.

Пример матрицы, которая не имеет обратной. Пусть X – произвольная матрица квадратная 2-го порядка

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \neq E$$

- **Лемма 5**. Для любых трансвекций одного порядка $T_{ij}(\alpha)$ и $T_{ij}(\beta)$ выполнятся

$$T_{ij}(\alpha) \cdot T_{ij}(\beta) = T_{ij}(\alpha + \beta)$$

Следствие. Любая трансвекция $T_{ij}(\beta)$ является обратимой матрицей, причем

$$T^{-1}{}_{ij}(\beta) = T_{ij}(-\beta).$$

- **Определение.** Определителем второго порядка соответствующим квадратной матрицей второго порядка $A = (a_{ij})$ называется число D, равное

$$D = |A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Определитель любого порядка $n \geq 2$ введем индуктивно, считая что мы уже имеем понятие определителя порядка $n - 1$.

- **Определение.** Минором элемента a_{ij} квадратной матрицы $A = (a_{ij})$ порядка n называется определитель порядка $n - 1$, соответствующий матрице, которая получается из матрицы A вычеркиванием i – строки и j – столбца (той строки и того столбца на пересечении которых стоит элемент a_{ij}).

Алгебраическим дополнением элемента a_{ij} матрицы $A = (a_{ij})$ называется число $A_{ij} = (-1)^{i+j} \cdot M_{ij}$, где M_{ij} минор элемента a_{ij}.

- **Определение.** Определителем порядка n, соответствующим квадратной матрице $A = (a_{ij})$ порядка n, называется число n равное

$$D = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & \alpha_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & \alpha_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & \alpha_{nn} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + \cdots + a_{1n}A_{1n} = \sum^{n} a_{1i}A_{1i} \, .$$

Теорема 1 (Основная для определителя).

Для любой квадратной матрицы $A = \left(a_{ij}\right)$ порядка n, определитель этой матрицы:

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{ik}$ (разложению по любой строке $i = 1,2, \dots , n$).

$\det A = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} A_{kj}$ (разложению по любому столбцу j $= 1,2, \dots , n$).

Свойства определителей

1. При операции транспонировании величина определителя сохраняется, т.е. $|A^T| = |A|$.
2. Если какая-либо строка (столбец) определителя состоит из нулей, то и сам определитель равен нулю.
3. При перестановке местами двух строк (столбцов) определитель сохраняет свою абсолютную величину, но меняет знак на противоположный.
4. Определитель с двумя одинаковыми строками (столбцами) равен нулю.

5. Общий множитель элементов любой строки (столбца) можно вынести за знак определителя, т.е.

$$\begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

6. Если элементы некоторой строки (столбца) определителя Δ представлены в виде суммы двух слагаемых, то и сам определитель равен сумме двух слагаемых Δ_1 и Δ_2 .т В определители Δ_1 указанная строка состоит из первых слагаемых, в Δ_2 - из вторых слагаемых. Остальные строки (столбцы) определителей Δ_1 и Δ_2 - те же, что и в Δ.

$$\begin{vmatrix} b_{11}+c_{11} & b_{12}+c_{12} & b_{13}+c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_{11} & c_{12} & c_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

7. Величина определителя не изменится, если к одной из строк (столбцу) прибавить другую строку (столбец), умноженную на какое угодно число.

Практический способ вычисления определителей.

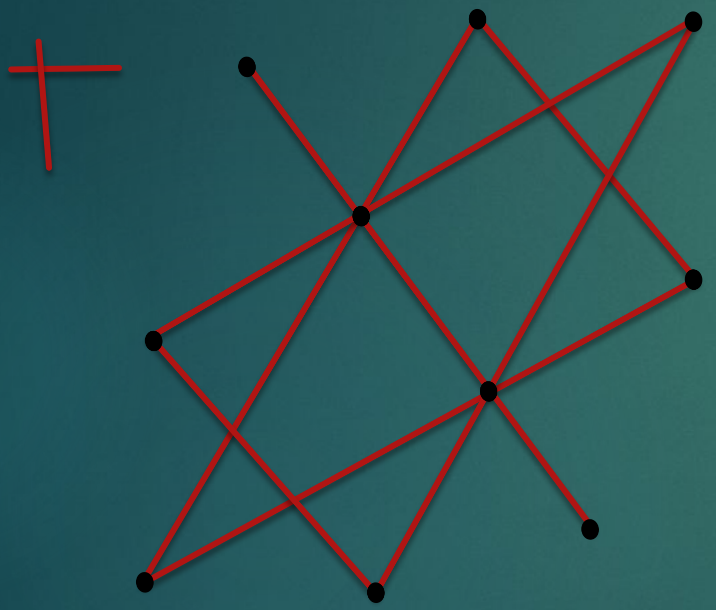
1. Для вычисления определителя 3-го порядка часто используется формула «треугольников»:

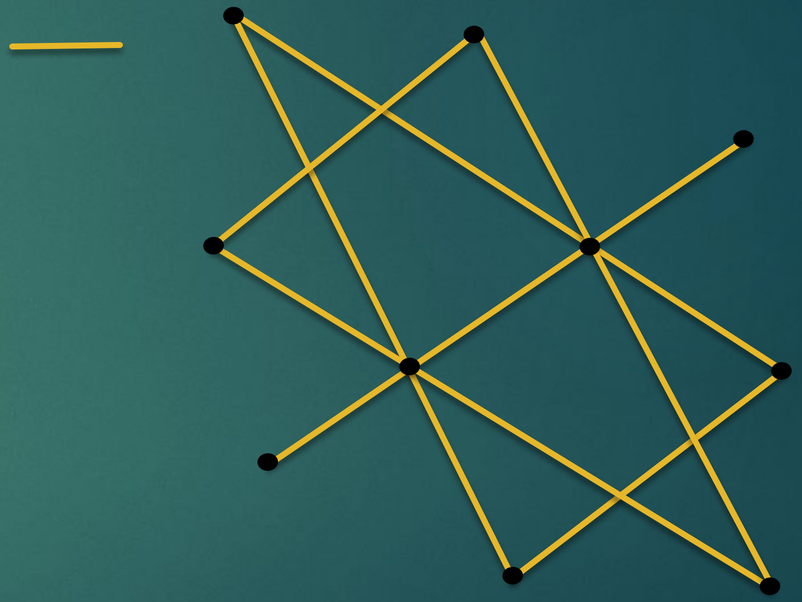
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$$

$$= a_{11}\ a_{22}\ a_{33} + a_{13}\ a_{21}\ a_{32} + a_{12}\ a_{23}\ a_{31} - a_{13}\ a_{22}\ a_{31}$$

$$- a_{11}\ a_{23}\ a_{32} - a_{12}\ a_{21}\ a_{33}. \quad (1)$$

Запомнить формулу (1) можно с помощью двух схем:





7. Вычисление определителя с предварительным получением нулей в строке или столбце на основе свойства 7.

Пример. Вычислить определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 3 & 0 \end{vmatrix}$$

зануляя элементы второй строки.

Теорема 1. Всякая квадратная матрица A размерности n разлагается в произведение одной диагональной матрицы и нескольких трансвекций.

Док-во: индукцией по n.

При $n = 1$, верно, пусть верно для $n - 1$ докажем для n.

Случ. 1. $a_{11} \neq 0$.

Случ. 2. $a_{11} = 0$, но существует j. $a_{1j} = 0$ или $a_{i1} \neq 0$.

Случ. 3. Все $a_{1j} = 0$ и все $a_{i1} = 0$.

Теорема 2. Для любой квадратной матрицы A равносильны следующие утверждения:

a) $\exists X$ – матрица такая, что $X \cdot A = A \cdot X = E$;

b) $\exists Y$ – матрица такая, что $Y \cdot A = E$;

c) $\exists Z$ – матрица такая, что $A \cdot Z = E$;

d) $\det A \neq 0$.

Док-во: