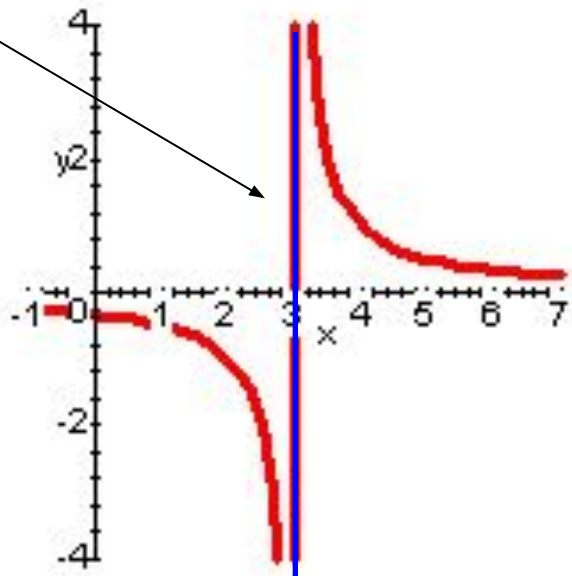


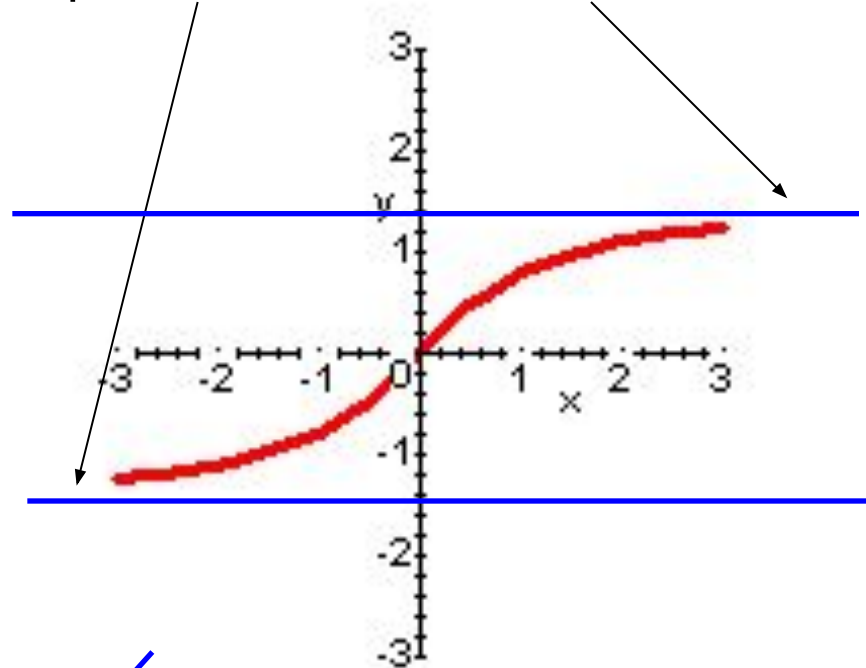
Асимптоты графика функции.

Опр. Асимптотой графика функции $y=f(x)$ называется прямая, к которой неограниченно приближается точка графика функции при неограниченном удалении от начала координат.

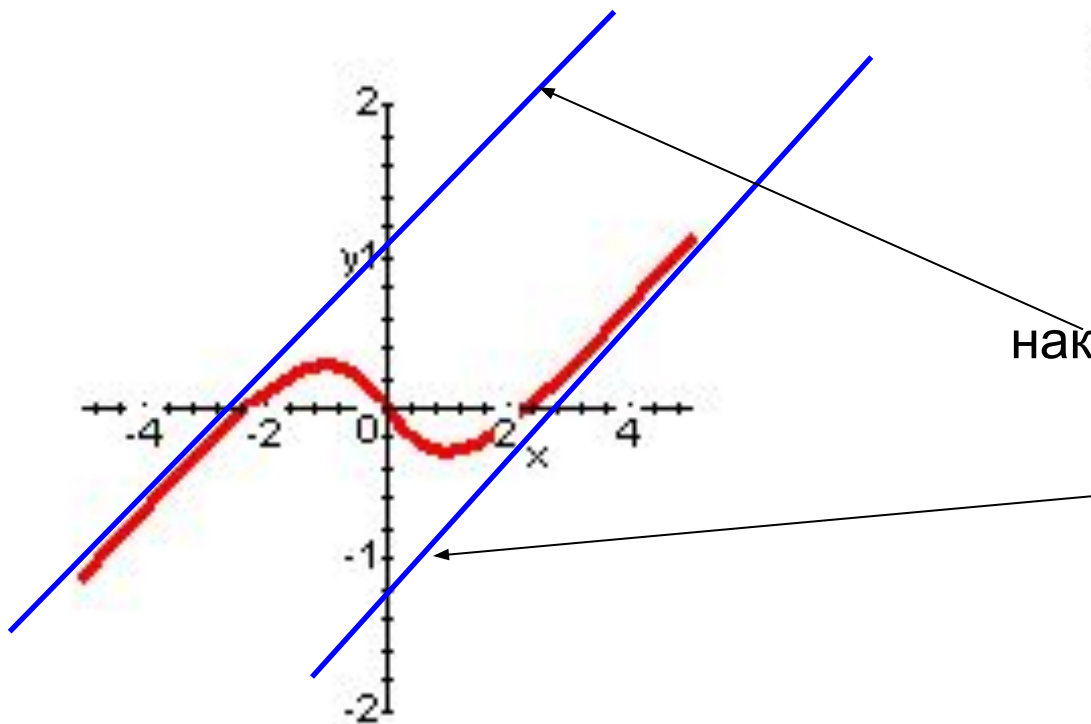
вертикальная асимптота



горизонтальные асимптоты



наклонные асимптоты



Асимптоты графика функции.

Теорема 1. Если $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$

то прямая $x=a$ является вертикальной асимптотой графика функции $y=f(x)$.

Асимптоты графика функции.

Следствие. Вертикальные асимптоты следует искать в точках разрыва области определения и на концах ее области определения (если область определения имеет вид (a, b) , $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$).

Примеры вертикальных асимптот.

Пример 1.

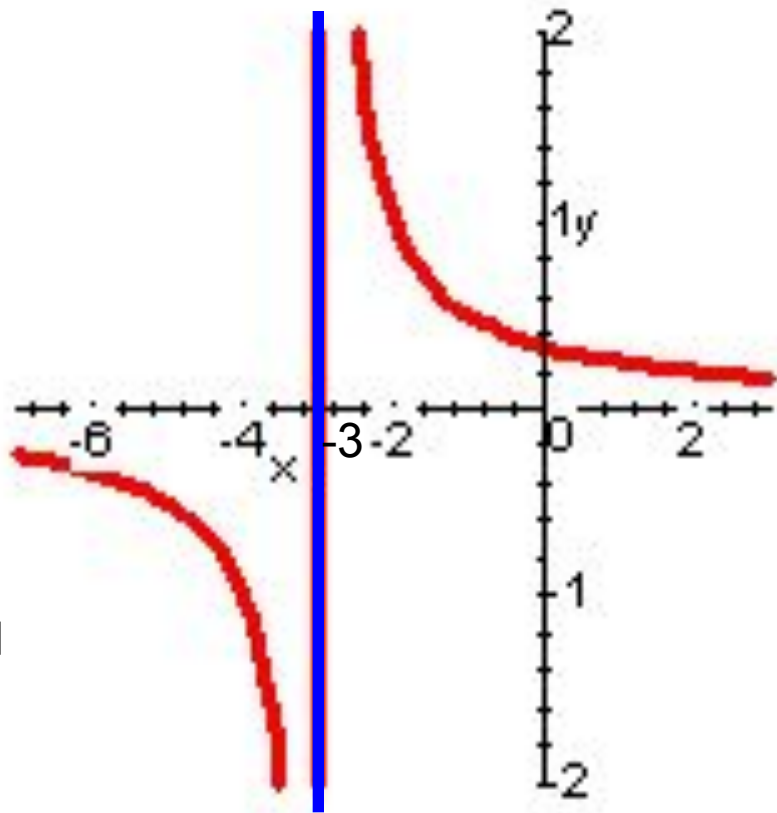
$$f(x) = \frac{1}{x+3}$$

Примеры вертикальных асимптот.

Пример 1. $f(x) = \frac{1}{x+3}$

$$\lim_{x \rightarrow -3} f(x) = \infty$$

$x = -3$ вертикальная асимптота



Примеры вертикальных асимптот.

Пример 2.

$$f(x) = \frac{x+1}{x^2-1}$$

Асимптоты графика функции.

Теорема 2. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, то прямая $y=a$ является горизонтальной асимптотой.

Примеры горизонтальных асимптот.

Пример1. $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

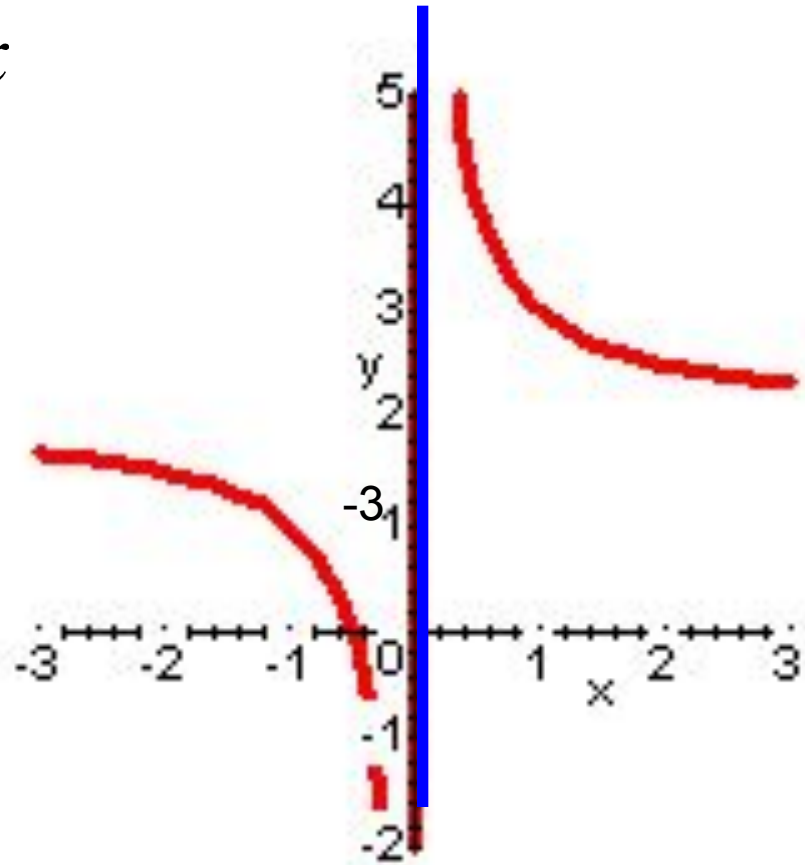
Примеры горизонтальных асимптот.

Пример 1. $f(x) = 2 + \frac{1}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$

горизонтальная
асимптота



Асимптоты графика функции.

Теорема 3. Если $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = a$, $\lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - a \cdot x) = b$
то прямая $y = ax + b$ является наклонной асимптотой.

Примеры наклонных асимптот.

Пример 1.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

Примеры наклонных асимптот.

Пример 1.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 + x - 2}{x^2} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 + \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2}}{1} = 1$$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2}{x} - x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 + x - 2 - x^2}{x} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x - 2}{x} \right) =$$

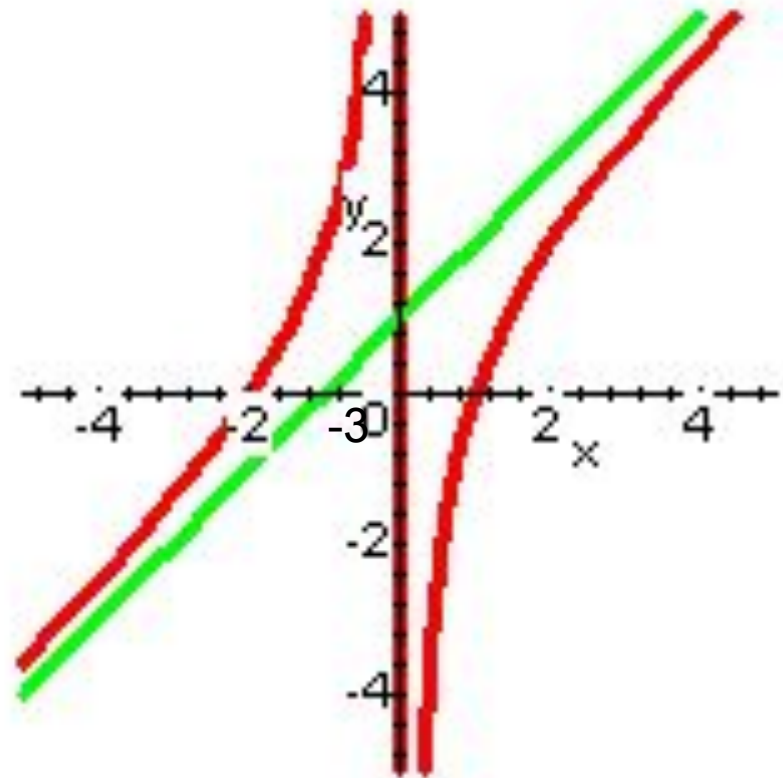
$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{1 - \frac{2}{x}}{1} \right) = 1$$

Примеры наклонных асимптот.

Пример 1. $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x}$

$$y = x + 1$$

наклонная асимптота



Замечание. Горизонтальная асимптота является частным случаем наклонной асимптоты

$y=ax+b$ Если $a=0$, то наклонная асимптота становится горизонтальной.

Поэтому горизонтальные асимптоты можно не искать, сразу искать наклонные.

Общая схема исследования функций.

1. Область определения.
2. Исследование на четность-нечетность.
3. Асимптоты.
4. Экстремумы и интервалы монотонности.
5. Точки перегиба и интервалы выпуклости.
6. Точки пресечения с осями координат.
7. График функции.

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

1. Область определения

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

1. Область определения

$$(-\infty; 3) \cup (3; +\infty)$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

2. Исследование на четность-нечетность.

$$f(-x) = \dots\dots$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

2. Исследование на четность-нечетность.

Функция общего вида

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

3. АСИМПТОТЫ

А) вертикальные

$x=3$ – точка разрыва

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

3. АСИМПТОТЫ

А) вертикальные

$x=3$ – точка разрыва

$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = \left[\frac{4}{0} \right] = \infty$$

$x=3$ – вертикальная асимптота

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

3. АСИМПТОТЫ

б) горизонтальные и наклонные $y=ax+b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)x} =$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

3. АСИМПТОТЫ

в) наклонные $y=ax+b$

$$a = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{(x - 3)x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 6x + 13}{x^2 - 3x} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1 - \frac{6}{x} + \frac{13}{x^2}}{1 - \frac{3}{x}} = 1$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

3. АСИМПТОТЫ

в) наклонные $y=ax+b$

$$b = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} - x \right) =$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

3. АСИМПТОТЫ

в) наклонные $y=ax+b$

$$\begin{aligned} b &= \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - ax) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} - x \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{x^2 - 6x + 13 - x^2 + 3x}{x - 3} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{-3x + 13}{x - 3} \right) = \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-3 + \frac{13}{x}}{1 - \frac{3}{x}} = -3 \end{aligned}$$

$y=x-3$ – наклонная асимптота,
горизонтальных асимптот нет

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

$$f'(x) = \frac{(x^2 - 6x + 13)'(x - 3) - (x - 3)'(x^2 - 6x + 13)}{(x - 3)^2} =$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - 6x + 13)'(x - 3) - (x - 3)'(x^2 - 6x + 13)}{(x - 3)^2} = \\ &= \frac{(2x - 6)(x - 3) - (x^2 - 6x + 13)}{(x - 3)^2} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 6x + 18 - x^2 + 6x - 13}{(x - 3)^2} = \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} \end{aligned}$$

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

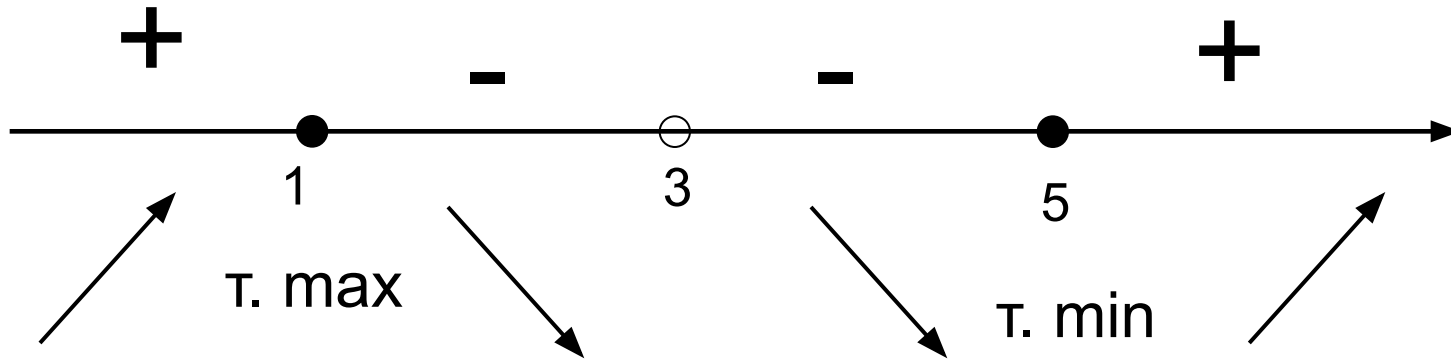
$$f'(x) = 0 \quad \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

$$f'(x) = 0 \quad \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0 \quad x = 1, \quad x = 5$$



$$f(1) =$$

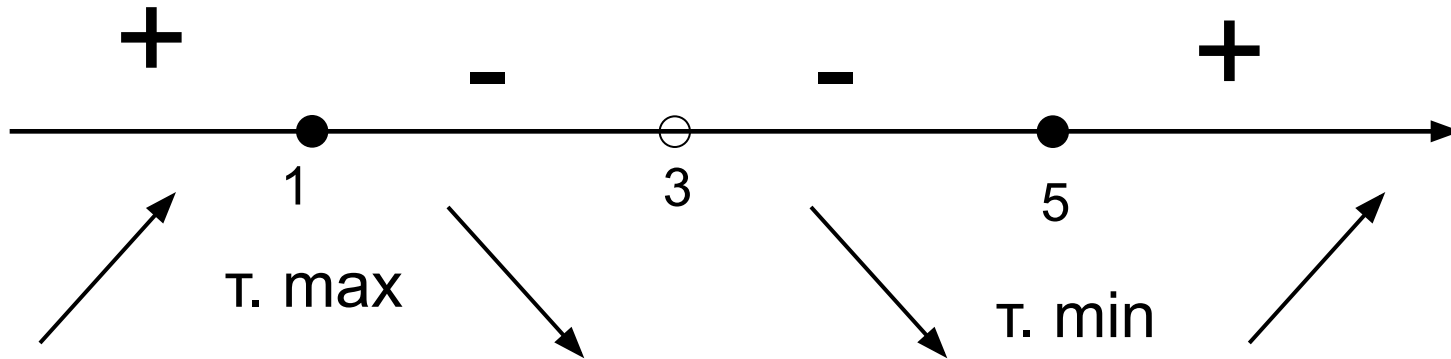
$$f(5) =$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

4. Экстремумы и интервалы монотонности

$$f'(x) = 0 \quad \frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} = 0 \quad x = 1, \quad x = 5$$



$$f(1) = \frac{1 - 6 + 13}{1 - 3} = \frac{8}{-2} = -4$$

$$f(5) = \frac{25 - 30 + 13}{5 - 3} = \frac{8}{2} = 4$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

5. Точки перегиба и интервалы выпуклости

$$f''(x) = \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x - 3)^2} \right)' =$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

5. Точки перегиба и интервалы выпуклости

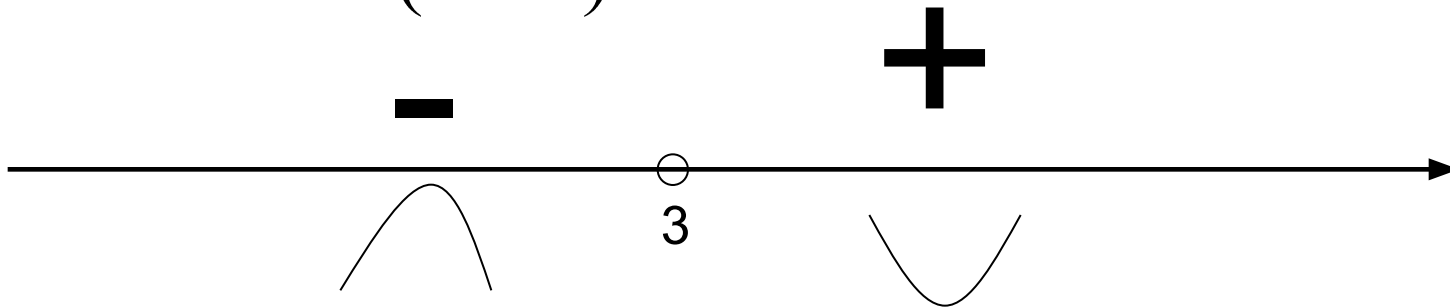
$$\begin{aligned} f''(x) &= \left(\frac{x^2 - 6x + 5}{(x-3)^2} \right)' = \frac{(x^2 - 6x + 5)'(x-3)^2 - ((x-3)^2)'(x^2 - 6x + 5)}{(x-3)^4} = \\ &= \frac{(2x - 6)(x-3)^2 - 2(x-3)(x^2 - 6x + 5)}{(x-3)^4} = \\ &= \frac{(2x - 6)(x-3) - 2(x^2 - 6x + 5)}{(x-3)^3} = \\ &= \frac{2x^2 - 6x - 6x + 18 - 2x^2 + 12x - 10}{(x-3)^3} = \frac{8}{(x-3)^3} \end{aligned}$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

5. Точки перегиба и интервалы выпуклости

$$f''(x) = 0 \quad \frac{8}{(x-3)^3} = 0 \quad \text{Решений нет}$$



Точек перегиба нет

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

6. Точки пересечения с осями координат.

С осью ОХ $y=0$

$$\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = 0$$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

6. Точки пересечения с осями координат.

С осью ОХ $y=0$

$$\frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3} = 0$$

$$D < 0$$

Точек пересечения с ОХ нет

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

6. Точки пересечения с осями координат.

С осью OY $x=0$ $f(0) =$

Пример $f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$

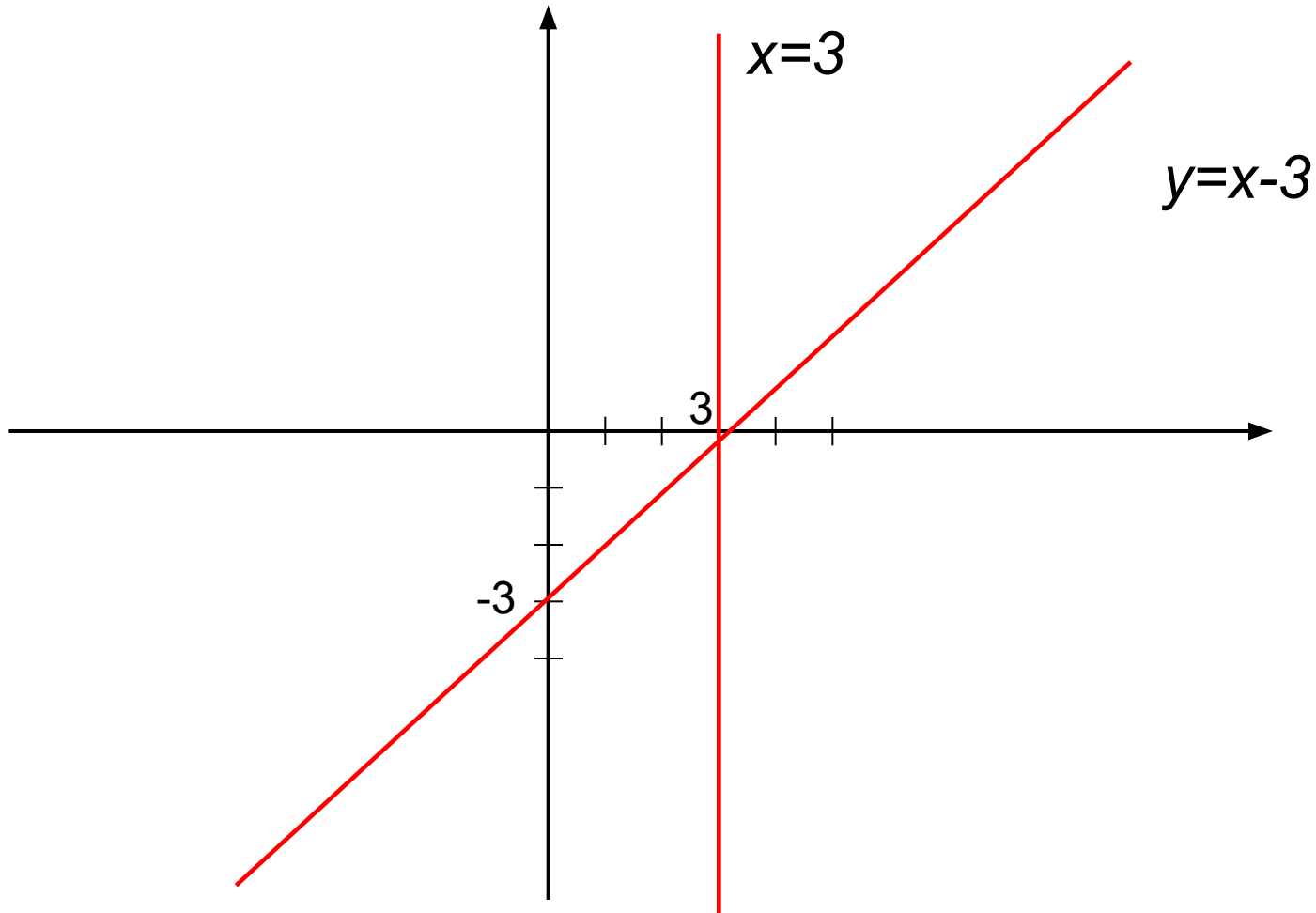
6. Точки пересечения с осями координат.

С осью OY $x=0$ $f(0) = \frac{13}{-3} = -4\frac{1}{3}$

Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

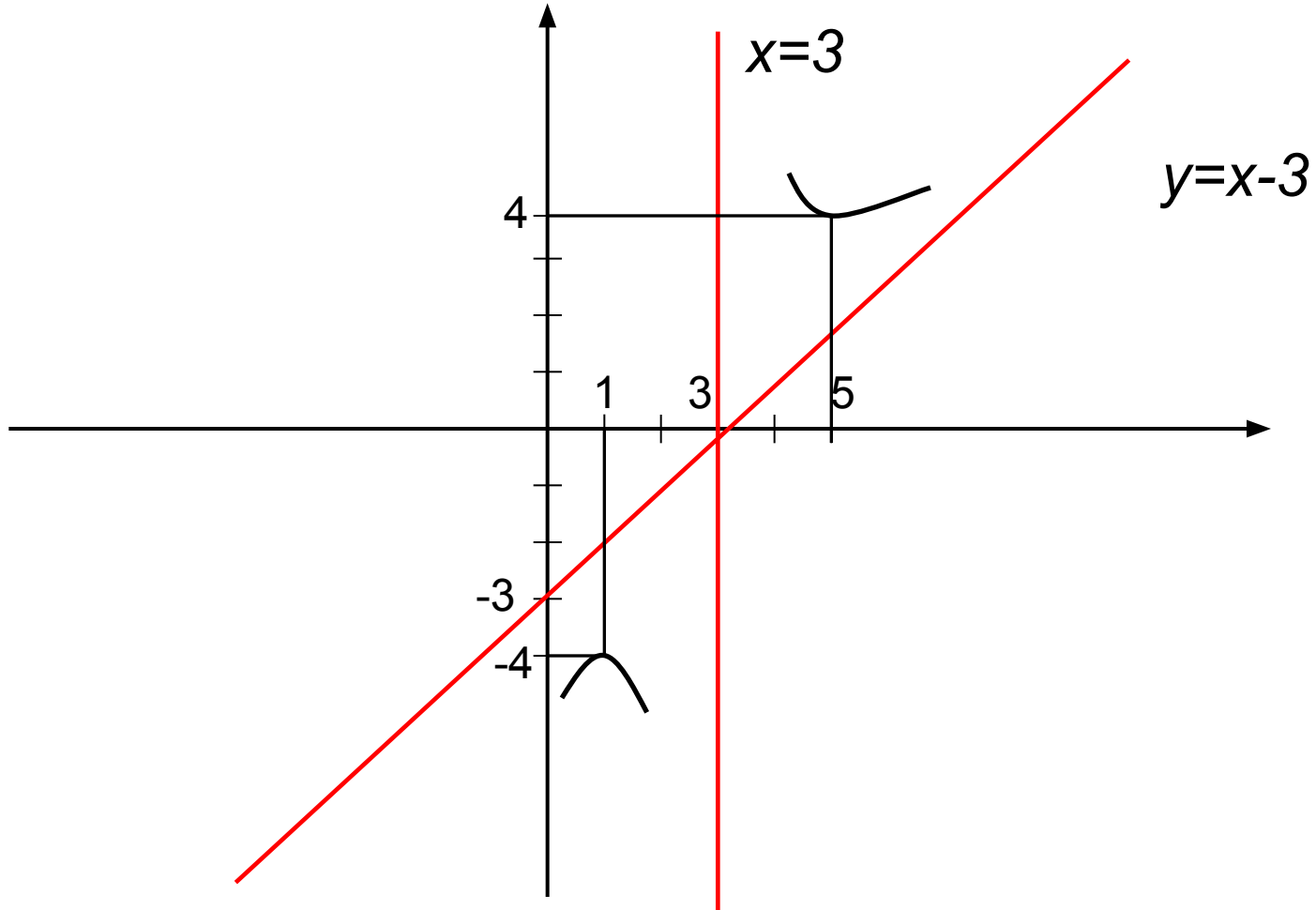
7. График функции. Сначала строим асимптоты



Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

7. График функции. Отмечаем точки экстремума



Пример

$$f(x) = \frac{x^2 - 6x + 13}{x - 3}$$

7. График функции. Отмечаем точки пересечения с осями и строим график

график

