

Простейшие логарифмические неравенства

Определение

- ▶ Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим.
- ▶ При $a > 1$ – функция возрастает (знак сохраняется)
- ▶ При $0 < a < 1$ – функция убывает (знак меняется)

Некоторые методы решения логарифмических неравенств.

Назад

Простейшие логарифмические неравенства

Сведение неравенства к простейшему

Метод введения новой переменной

Сведение к равносильной совокупности

Метод рационализации (замены множителей)

Алгоритм решения логарифмического неравенства.

1. Найти (О.Д.З.) область допустимых значений (подлогарифмическое выражение больше нуля).
2. Левую и правую части неравенства в виде логарифмов по одному и тому же основанию:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

3. Определить, возрастающей или убывающей является логарифмическая функция.
(если $a > 1$, то возрастающая; если $0 < a < 1$, то убывающая).

4. Перейти к более простому неравенству (подлогарифмических выражений), учитывая, что знак неравенства сохранится, если функция возрастает, и изменится, если она убывает:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

если $a > 1$, то
 $f(x) > g(x)$

если $0 < a < 1$, то
 $f(x) < g(x)$



5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$a > 0, a \neq 1$, то

1) Если $0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

меняется и

учитывается ОДЗ

2) Если $a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

не меняется и

учитывается ОДЗ

Примеры решения логарифмических неравенств

Пример 1.

$$\log_3(x+2) \leq 3$$

$$\text{О.Д.З: } (x+2) > 0, X > -2$$

$$\log_3(x+2) \leq \log_3 27$$

Функция $y = \log_3 x$ возрастает, значит знак неравенства при переходе к подлогарифмическому выражению не меняется.

$$x+2 \leq 27$$

$$x \leq 25$$



Ответ: $(-2; 25]$



Пример 2.

$$\log_{0,5}(x-1) > \log_{0,5}(3x+2)$$

$$\text{О.Д.З: } \begin{cases} x-1 > 0, \\ 3x+2 > 0; \end{cases} \begin{cases} x > 1, \\ x > -2/3. \end{cases} \text{ Следовательно, } x > 1$$

Функция $Y = \log_{0,5} x$ убывает, значит знак неравенства при переходе к подлогарифмическому выражению меняется.

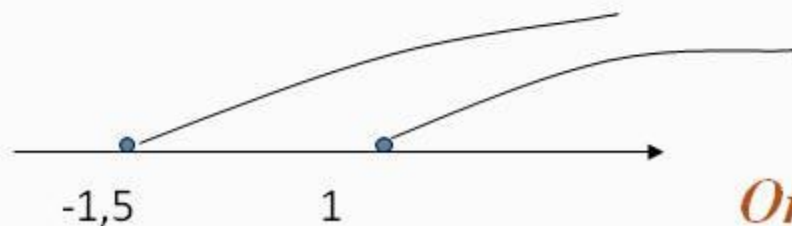
$$x-1 < 3x+2$$

$$x-3x < 1+2$$

$$-2x < 3$$

(при делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположенный)

$$x > -1,5$$



Ответ: (1; ∞)



6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

$$1) \log_5(2x) > \log_5(x-1)$$

Т.к. $5 > 1$, то функция $y = \log_5 t$ – возрастающая и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x > x-1 \\ x-1 > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \quad x > 1$$

Ответ: $(1; +\infty)$

Примеры решения простейших логарифмических неравенств. (продолжение)

$$2) \quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

Т.к. $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ – убывающая

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x < x-1 \\ 2x > 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x < -1 \\ x > 0 \end{cases} \quad \text{решений нет}$$

Ответ: решений нет

Способы решения логарифмических неравенств

▶ 1. Решение простейших логарифмических неравенств (по определению)

$$\log_5(3x + 1) < 2$$

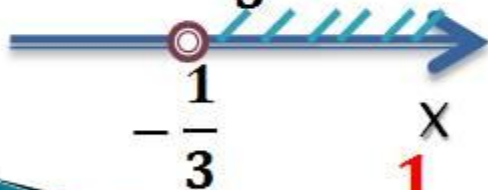
Решение:

1. $D(\log a) = R_+$

$$3x + 1 > 0$$

$$3x > -1$$

$$x > -\frac{1}{3}$$



$$D(\log_5) = \left(-\frac{1}{3}; +\infty\right)$$

2. т.к $a=5 > 1$; функция

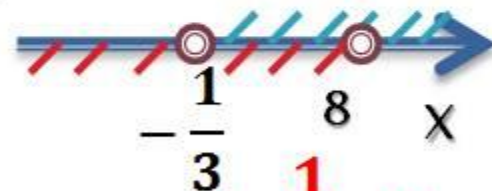
$y = \log_5 t$ возрастает

$$3x + 1 < 5^2$$

$$3x + 1 < 25$$

$$3x < 24$$

$$x < 8$$



$$x \in \left(-\frac{1}{3}; 8\right)$$

Решите логарифмические неравенства

Домашняя работа

a) $\log_3(x + 4) > 1$

b) $\log_{0,3}(2x + 1) < \log_{0,3}(4x - 8)$

c) $\lg(3x - 7) \leq \lg(x + 1)$