Простейшие логарифмические неравенства

Определение

- **Неравенство, содержащее переменную только под знаком логарифма, называется логарифмическим.**
- При $a>1$ – функция возрастает (знак сохраняется)
- При $0<a<1$ – функция убывает (знак меняется)

Некоторые методы решения логарифмических неравенств.

Назад

Простейшие логарифмические неравенства

Сведение неравенства к простейшему

Метод введения новой переменной

Сведение к равносильной совокупности

Метод рационализации (замены множителей)

Алгоритм решения логарифмического неравенства.

1. Найти (О.Д.З.) область допустимых значений (подлогарифмическое выражение больше нуля).
2. Левую и правую чисти неравенства в виде логарифмов по одному и тону же основанию:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

3. Определить, возрастающей или убывающей является логарифмическая функция.

(если а > 1, то возрастающая; если $0 < a < 1$, то убывающая).

4. Перейти к более простому неравенству (подлогарифми-ческих выражений), учитывая, что знак неравенства сохранится, если функция возрастает, и изменится, если она убывает:

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

если а > 1 , то

$$f(x) > g(x)$$

если 0 < а < 1 , то

$$f(x) < g(x)$$

5. Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических неравенств

$$\log_a f(x) > \log_a g(x)$$

$$a > 0,\ a \neq 1, \quad \textit{то}$$

1) *Если* $0 < a < 1$

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

меняется и

учитывается ОДЗ

2) *Если* $a > 1$

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

Знак неравенства

не меняется и

учитывается ОДЗ

Примеры решения логарифмических неравенств

Пример 1.

$\log_3(x+2) \le 3$

О.Д.З: $(x+2) > 0$, $X > -2$

$\log_3(x+2) \le \log_3 27$

Функция $y=\log_3 x$ возрастает, значит знак неравенства при переходе к подлогарифмическому выражению не меняется.

$x+2 \le 27$

$x \le 25$

Ответ: $(-2;25]$

Пример 2.

$\log_{0,5}(x-1) > \log_{0,5}(3x+2)$

О.Д.З: $\begin{cases} x-1>0, \\ 3X+2>0; \end{cases}$ $\begin{cases} x>1, \\ x>-2/3. \end{cases}$ Следовательно, $x>1$

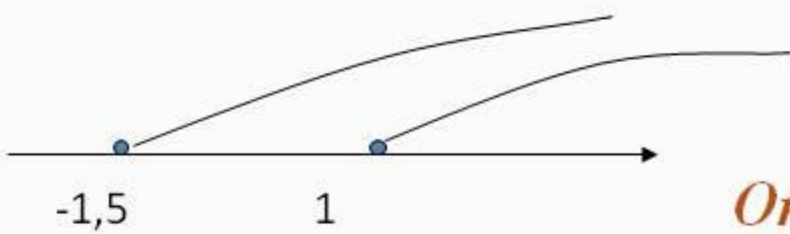
Функция $У=\log_{0,5} x$ убывает, значит знак неравенства при переходе к подлагорифмическому выражению меняется.

$x-1 < 3x+2$

$x-3x < 1+2$

$-2x < 3$ (при делении на отрицательное число знак неравенства меняется на противоположенный)

$x>-1,5$



Ответ: (1; ∞)

Р3

6. Примеры решения простейших логарифмических неравенств.

$$1)\ \log_5(2x) > \log_5(x-1)$$

Т.к. $5>1$, *то функция* $y=\log_5 t$ *– возрастающая*

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x > x-1 \\ x-1>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x > -1 \\ x > 1 \end{cases} \qquad x > 1$$

Ответ: $(1;+\infty)$

Примеры решения простейших логарифмических неравенств. (продолжение)

$$2)\quad \log_{\frac{1}{2}}(2x) \rangle \log_{\frac{1}{2}}(x-1)$$

$$Т.к.\ 0 \langle \frac{1}{2} \langle 1,\ \textit{то функция}\ y = \log_{\frac{1}{2}} t - \textit{убывающая}$$

и, учитывая ОДЗ, получаем

$$\begin{cases} 2x \langle x-1 \\ 2x \rangle 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \langle -1 \\ x \rangle 0 \end{cases} \qquad \textit{решений нет}$$

Ответ: решений нет

Способы решения логарифмических неравенств

- 1. ***Решение простейших логарифмических неравенств (по определению)***

$$\log_5(3x+1) < 2$$

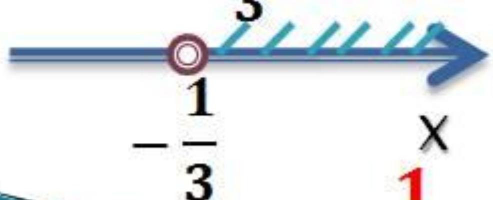
Решение:

1. $D(\log a) = R_+$

$$3x+1>0$$

$$3x>-1$$

$$x>-\frac{1}{3}$$



$$D(\log_5) = \left(-\frac{1}{3};+\infty\right)$$

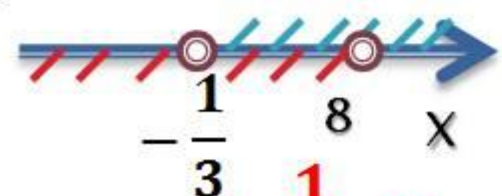
2. т.к a=5>1; функция $y=\log_5 t$ возрастает

$$3x+1<5^2$$

$$3x+1<25$$

$$3x<24$$

$$x<8$$



$$x \in \left(-\frac{1}{3};8\right)$$

Решите логарифмические неравенства

Домашняя работа

$a)\ log_3(x+4) > 1$

$b)\ log_{0,3}(2x+1) < log_{0,3}(4x-8)$

$c)\ \lg(3x-7) \le \lg(x+1)$