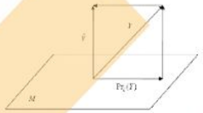
Нехаев И.Н., доцент Поволжского государственного технологического университета

Курс Волгатеха (ПГТУ) «Линейная алгебра и геометрия» для направления «Программная инженерия»

ТЕМА

Подпространства. Проекции



Ключевые вопросы лекции

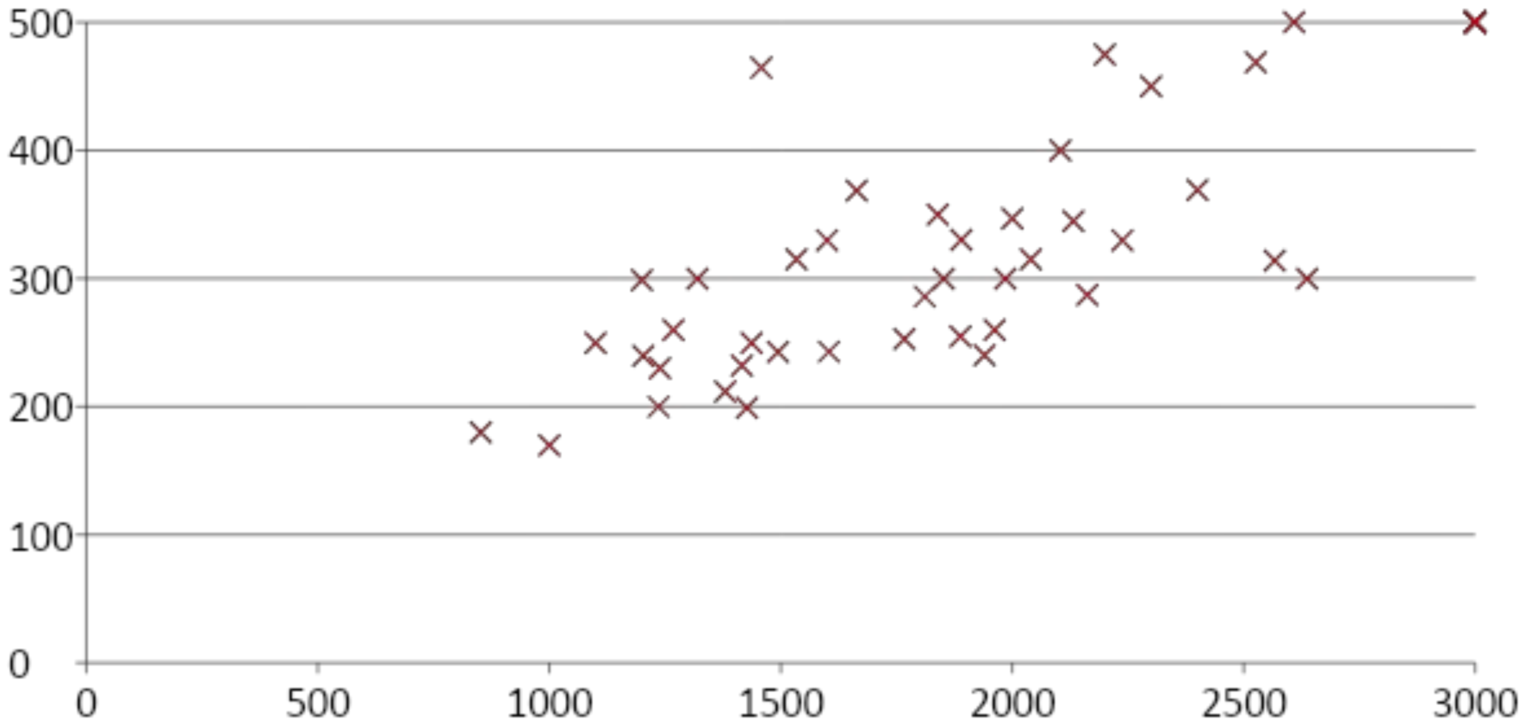
- Как уменьшить размерность векторного описания объектов?
- Что такое подпространство (п/п)? Как описываются п/п ?
- Как найти проекцию вектора на вектор, на произвольное п/п?
- Как построить матрицу проецирования на п/п ?
- Что такое сумма п/п, пересечение п/п, прямая сумма п/п?
- Как решается задача аппроксимации МНК с использованием операции проецирования?

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Постановка задачи аппроксимации

Цена дома, тыс.$



Размер дома, кв.футов

Задача регрессии:
Предсказать величину цены дома

Пример взят из курса «Machine Learning», Stanford University

Постановка задачи аппроксимации

Рассмотрим простой пример

Возраст/10, лет (x)	Продуктивность/10,% (y)
1	5
2	10
3	50
…	…

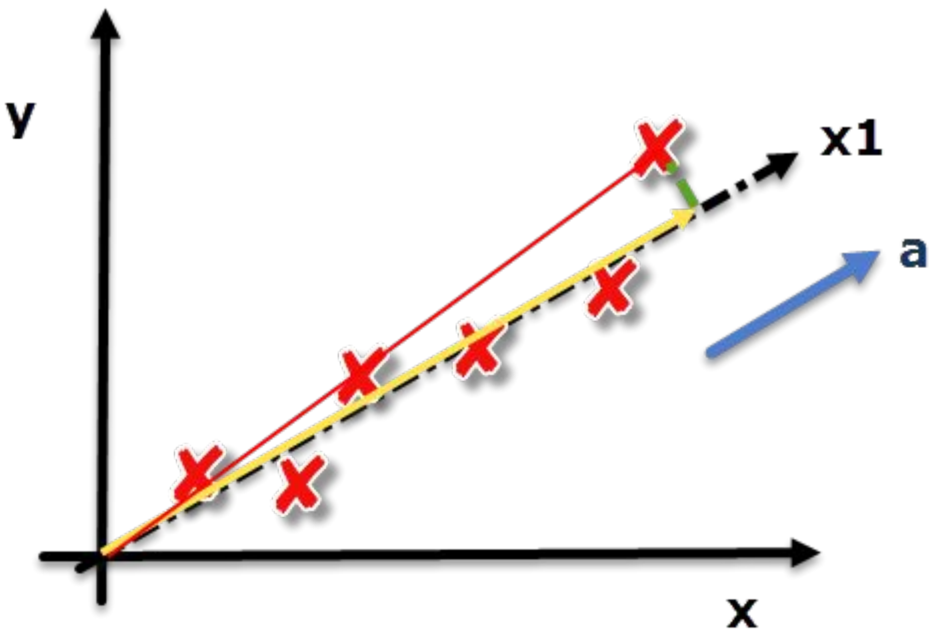
Гипотеза:

Модель линейная вида *y(x)=SUM(wi*fi(x))*

Как выбрать *fi(x) – базисные функции*?

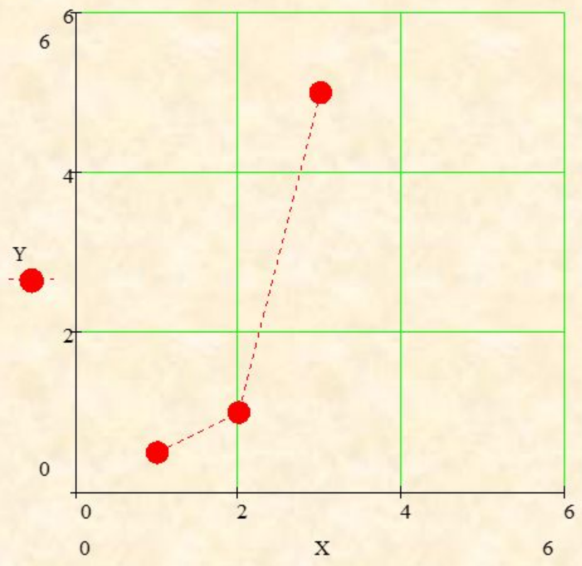
Нехаев И.Н. 2015г

Постановка задачи снижения размерности



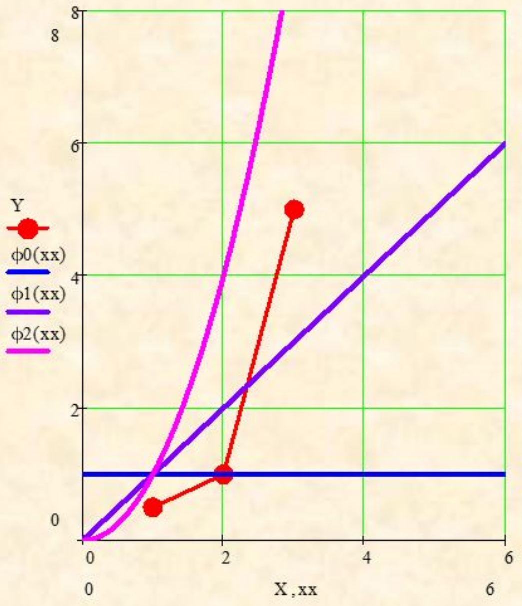
Постановка задачи аппроксимации

Графический анализ исходных данных:



Рассмотрим базисные функции

$\phi0(x) := 1 \qquad \phi1(x) := x \qquad \phi2(x) := x^2$



Какие (две) выбрать?

Нехаев И.Н. 2015г

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Подпространство В.П.

-

Подпространство В.П.

-

Подпространство В.П.

•

Подпространство В.П.

-

Подпространство В.П.

•

Подпространство, порожденное векторами

•

Подпространство, порожденное векторами

•

Подпространство, порожденное векторами

-

Свойства подпространств

- **Теорема 1.** *Если* ***L*** *— подпространство пространства* ***V*** *и A — порождающая матрица для* ***L****, то* dim ***L*** = rang *A*.

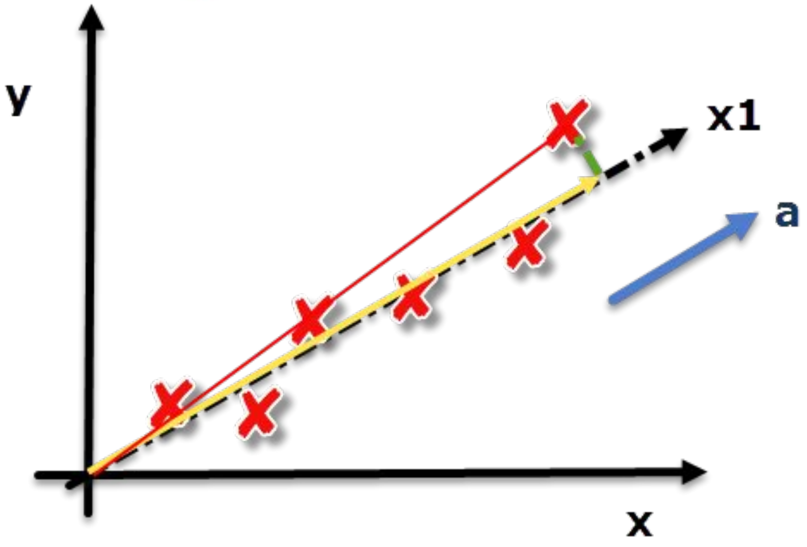
Одно и то же пространство может быть задано различными порождающими матрицами. В частности, имеет место

- **Теорема 9.2.** *Если A — порождающая матрица пространства $L \subseteq V$ и U — любая невырожденная квадратная матрица, составленная из координат векторов V, то матрица B = UA также является порождающей матрицей пространства L.*

План уроков темы

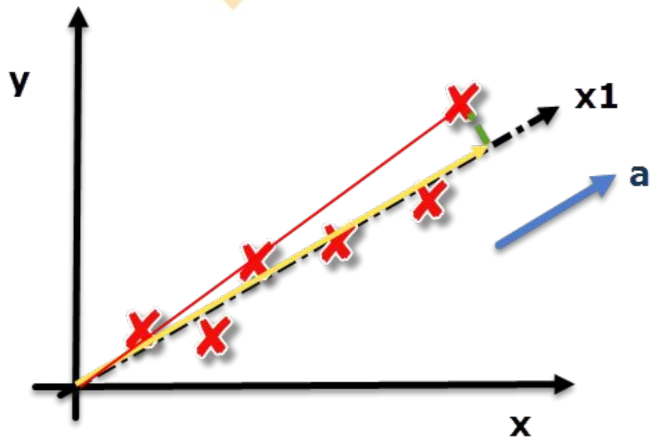
- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Проекция вектора на одномерное п/п



- $\overline{pr_a b} = \frac{(a,b)}{(a,a)} \cdot a$
- $\overline{pr_a b} = \frac{a \cdot (a^T b)}{a^T a}$
- $\overline{pr_a b} = \frac{a \cdot a^T}{a^T a} \cdot b$
- $\overline{pr_a b} = M \cdot b$
- $M = \frac{a \cdot a^T}{a^T a}$

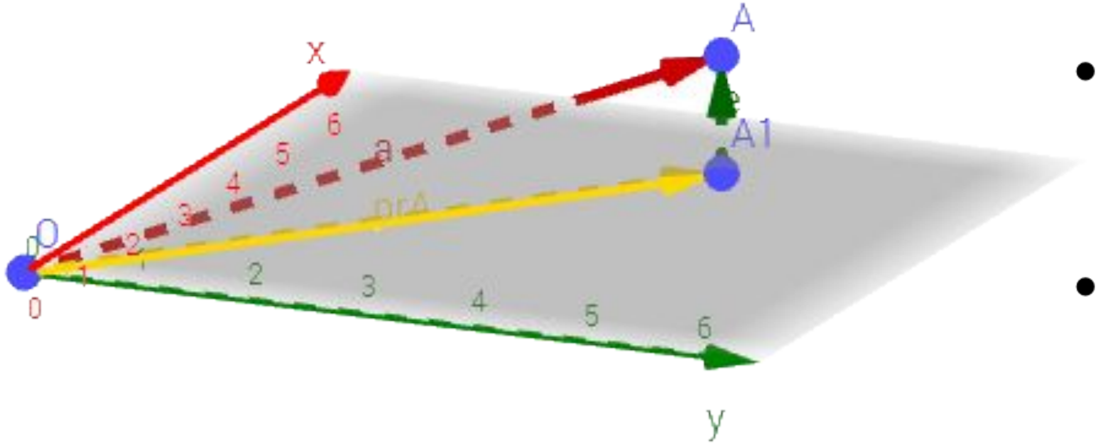
Проекция вектора на одномерное п/п



- $\overline{pr_a b} = M \cdot b$

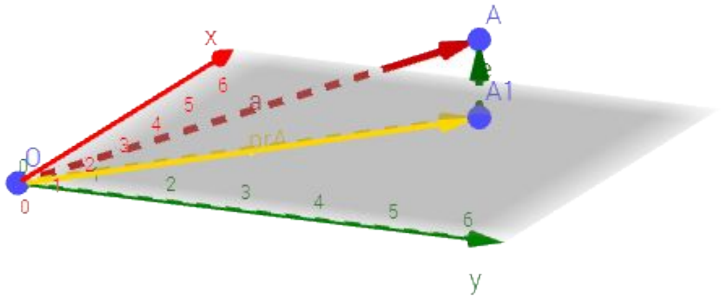
- $M = \frac{a \cdot a^T}{a^T a}$

Проекция вектора на двумерное п/п



- $\overline{pr_{<a,b>}OA} = \overline{OA_1}$
- $\overline{OA_1} = y1 * \boldsymbol{f1} + y2 * \boldsymbol{f2}$
- $\|\overline{OA} - (y1 * \boldsymbol{f1} + y2 * \boldsymbol{f2})\| \to min$

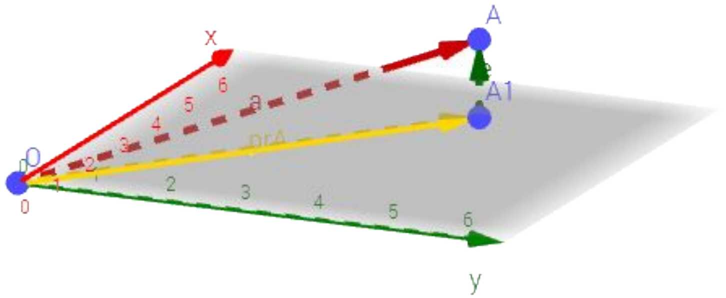
Нормальная система уравнений



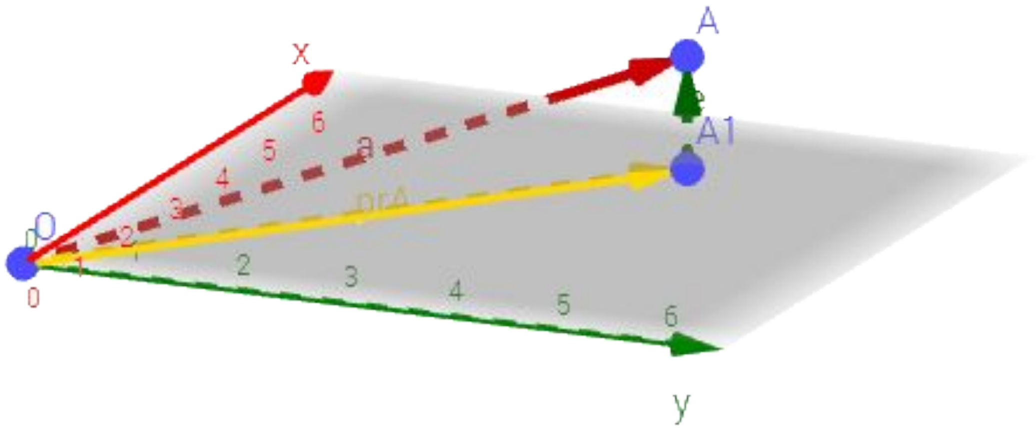
- $\|\overline{OA} - (y1 * \boldsymbol{f1} + y2 * \boldsymbol{f2})\| \rightarrow min$

$$\|\overline{OA} - (y1 * \boldsymbol{f1} + y2 * \boldsymbol{f2})\|^2 \rightarrow min$$

Нормальная система уравнений

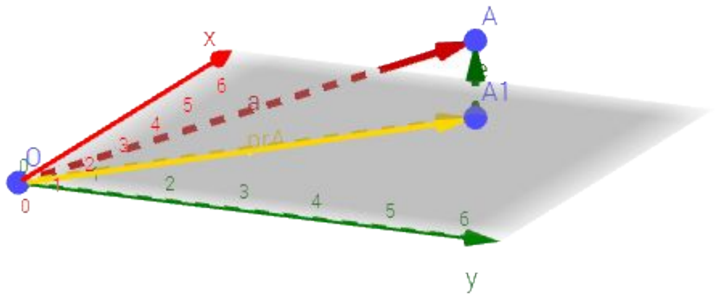


Нормальная система уравнений



- $\overline{pr_L b} = X \cdot (X^T X)^{-1} \cdot X^T \cdot b$
- $\overline{pr_L b} = M \cdot b$
-
- $M = X \cdot (X^T X)^{-1} \cdot X^T$

Нормальная система уравнений



- $\overline{pr_L b} = M \cdot b$
-
- $M = X \cdot (X^T X)^{-1} \cdot X^T$

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Пересечение подпространств

- **Опр. Пересечением** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. **V** называется множество векторов $L3 = L1 \bigcap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2$.

Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow$

$$L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$$

Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T$, $L1 =< a >$

$$L2 := \{x: a^T * x = 0\}$$

$$L2 = ?, \qquad L1 \cap L2 = ?$$

Пересечение подпространств

- **Опр. Пересечением** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. **V** называется множество векторов $L3 = L1 \bigcap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2.$

Пример 1. $\boldsymbol{L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}}$$

Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T, \; L1 = < a >$

$$L2 := \{x: a^T * x = 0\}$$

$$L2 = ?, \qquad L1 \cap L2 = ?$$

Пересечение подпространств

- **Опр. Пересечением** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. **V** называется множество векторов $L3 = L1 \bigcap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2.$

Пример 1. $\boldsymbol{L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}}$$

Пример 2. Пусть $\boldsymbol{a = (1, -2, 1)^T,\ L1 =< a >}$

$$\boldsymbol{L2 := \{x : a^T * x = 0\}}$$

$$\boldsymbol{L1 \cap L2 = ?}$$

Сумма подпространств

- **Опр. Суммой двух п/п $L1, L2$** в.п. ***V*** называется множество векторов $L3 = L1 + L2$:
$$\forall z \in L3 \ \exists x \in L1, \exists y \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}.$$

- Пример 1. $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, L2 = \{(0, x2, 0)\} \Rightarrow$
$$L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}$$

- Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T$, $L1 =< a >$
$$L2 := \{x : a^T * x = 0\},$$
$$L1 + L2 = ?$$

Сумма подпространств

- **Опр. Суммой двух п/п $L1, L2$** в.п. ***V*** называется множество векторов $L3 = L1 + L2$ **:**

$$\forall z \in L3 \;\; \exists x \in L1, \exists y \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}\,.$$

- **Пример 3.** $\boldsymbol{L1 = \{(x1, 0, 0)\}}, \quad \boldsymbol{L2 = \{(0, x2, 0)\}}$

$$\boldsymbol{L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}}$$

- Пример 2. Пусть $L1 =< a >, \; L2 := \{x: a^T * x = 0\}$

$$L1 + L2 = ?$$

Сумма подпространств

- **Опр. Суммой двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$** в.п. ***V*** называется множество векторов $L3 = L1 + L2$ **:**

$$\forall z \in L3 \ \ \exists x \in L1, \exists y \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}\,.$$

- **Пример 4.** Пусть $\boldsymbol{L1} =< \boldsymbol{a} >,\ \ \boldsymbol{L2} \coloneqq \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{a}^{\boldsymbol{T}} * \boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}\}$

$$\boldsymbol{L1} + \boldsymbol{L2} = ?$$

- **Пример 2.** Пусть $L1 =< a >,\ \ L2 \coloneqq \{x : a^T * x = 0\}$

$$L1 + L2 = ?$$

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 3. Пересечение** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 \cap L2$ также является п/п в.п. ***V***.
  (надо доказать замкнутость множества L3 относительно операций +,*, определенных на **V**)
- Док-во:

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 3. Пересечение** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 \cap L2$ также является п/п в.п. ***V***.
  (надо доказать замкнутость множества L3 относительно операций +,*, определенных на V)
- Док-во:
- **Пример 1.** $\boldsymbol{L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow}$

$$\boldsymbol{L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}}$$

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 4**. **Сумма** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 + L2$ также является п/п. в.п. ***V***.
  (надо доказать замкнутость множества L3 относительно операций +,*, определенных на **V**)
- Док-во:

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 4. Сумма** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 + L2$ также является п/п. в.п. ***V***.
  (надо доказать замкнутость множества L3 относительно операций +,*, определенных на V)
- Док-во:
- **Пример 3.** $\boldsymbol{L1 = \{(x1, 0, 0)\}}, \quad \boldsymbol{L2 = \{(0, x2, 0)\}}$

$$\boldsymbol{L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}}$$

Размерность пересечения п/п

- **Теорема 5**. Размерность **пересечения** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 \cap L2$ не превышает размерности п/п L1 и L2:

$$\dim(L3) \leq \min(\dim(L1), \dim(L2))$$ на V)

- Док-во:

- **Пример 1.** $\boldsymbol{L1 = \{(x1, x2, 0)\}}$, $\boldsymbol{L2 = \{(0, x3, x4)\}}$

$$\boldsymbol{L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}}$$

$$\boldsymbol{dim(L1 \cap L2) = 1}$$

Размерность суммы п/п

- **Теорема 6**. Размерность **Суммы** двух п/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ в.п. ***V*** $L3 = L1 + L2$ равна:

$$\dim(L1 + L2) = \dim(L1) + \dim(L2) - \dim(L1 \cap L2)$$

(примем без доказательства)

- **Пример 1.** $\boldsymbol{L1 = \{(x1, x2, 0)\}}$, $\boldsymbol{L2 = \{(0, x3, x4)\}}$

$$\boldsymbol{L1 + L2 = \{(x1, x2, x3)\}}$$

$$\boldsymbol{dim(L1 + L2) = 2 + 2 - 1 = 3}$$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $\boldsymbol{L1} \oplus \boldsymbol{L2}$, если
$$\forall z \in L3 \;\; \exists!\, x \in L1, \exists y! \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}\,.$$

- Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x3, x4)\}$
$L1 + L2 = \{(x1, x2, x3)\}$ – не является прямой суммой!

- Пример 3. $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x2, 0)\}$
$$L1 \oplus L2 = \{(x1, x2, 0)\}$$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $\boldsymbol{L1} \oplus \boldsymbol{L2}$, если
$$\forall z \in L3 \;\; \exists!\, x \in L1, \exists y! \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}\,.$$

- **Пример 1.** $\boldsymbol{L1} = \{(\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{0})\}$, $\boldsymbol{L2} = \{(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{x3}, \boldsymbol{x4})\}$
$\boldsymbol{L1} + \boldsymbol{L2} = \{(\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \boldsymbol{x3})\}$ – не является прямой суммой!

- **Пример 3.** $L1 = \{(x1, 0, 0)\}$, $L2 = \{(0, x2, 0)\}$
$$L1 \oplus L2 = \{(x1, x2, 0)\}$$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $\boldsymbol{L1} \oplus \boldsymbol{L2}$, если

$$\forall z \in L3 \ \ \exists!\, x \in L1, \exists y! \in L2 : \mathrm{z} = \mathrm{x} + \mathrm{y}\,.$$

- **Пример 3.**

$$\boldsymbol{L1} = \{(\boldsymbol{x1}, \mathbf{0}, \mathbf{0})\} \ \ (\text{или} \ \ \boldsymbol{L1} =< \boldsymbol{e1} >)$$
$$\boldsymbol{L2} = \{(\mathbf{0}, \boldsymbol{x2}, \mathbf{0})\} \ (\text{или } \boldsymbol{L2} =< \boldsymbol{e2} >)$$
$$\boldsymbol{L3} = \boldsymbol{L1} \oplus \boldsymbol{L2} = \{(\boldsymbol{x1}, \boldsymbol{x2}, \mathbf{0})\} \ (\text{или } \boldsymbol{L3} =< \boldsymbol{e1}, \boldsymbol{e2} >)$$

Прямая сумма п/п

Теорема. Пусть $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}, \dots \boldsymbol{Lm}$ – подпространства конечномерного векторного пространства ***V***. Сумма подпространств

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L1} + \boldsymbol{L2} + \cdots + \boldsymbol{Lm}$$

является прямой суммой тогда и только тогда, когда объединение произвольно выбранных базисов в $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}, \dots \boldsymbol{Lm}$ дает базис в п/п ***L***.

Следствие. *Если* $e\mathbf{1}, \boldsymbol{e2}, \dots \boldsymbol{em}$ – линейно-независимая система векторов, то сумма их линейных оболочек

$$\boldsymbol{L} = <\boldsymbol{e1}> + <\boldsymbol{e2}> + \cdots + <\boldsymbol{em}>$$

является прямой суммой.

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Ортогональное дополнение

- **Опр**. П/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in \boldsymbol{L1}$ любому вектору $y \in \boldsymbol{L2}$: $\boldsymbol{L1} \perp \boldsymbol{L2}$.

- Опр. Ортогональным дополнением подпространства $L1 \subseteq V$ до V называется подпространство $L2 = L1^{\perp}$: $L1 \perp L2$ и $L1 + L2 = V$

- Утв. Сумма двух ортогональных п/п $L1, L2$ является прямой суммой п/п $L1 \bigoplus L2$

Ортогональное дополнение

- **Опр**. П/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in \boldsymbol{L1}$ любому вектору $y \in \boldsymbol{L2}$: $\boldsymbol{L1} \perp \boldsymbol{L2}$.

- **Опр.** Ортогональным дополнением подпространства $\boldsymbol{L1} \subseteq \boldsymbol{V}$ до $\boldsymbol{V}$ называется подпространство $\boldsymbol{L2} = \boldsymbol{L1}^{\perp}$: $\boldsymbol{L1} \perp \boldsymbol{L2}$ и $\boldsymbol{L1} + \boldsymbol{L2} = \boldsymbol{V}$

- Утв. Сумма двух ортогональных п/п $L1, L2$ является прямой суммой п/п $L1 \oplus L2$

Ортогональное дополнение

- **Опр**. П/п $\boldsymbol{L1}, \boldsymbol{L2}$ называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in \boldsymbol{L1}$ любому вектору $y \in \boldsymbol{L2}$: $\boldsymbol{L1} \perp \boldsymbol{L2}$.

- **Опр.** Ортогональным дополнением подпространства $\boldsymbol{L1} \subseteq \boldsymbol{V}$ до $\boldsymbol{V}$ называется подпространство $\boldsymbol{L2} = \boldsymbol{L1}^{\perp}$: $\boldsymbol{L1} \perp \boldsymbol{L2}$ и $\boldsymbol{L1} + \boldsymbol{L2} = \boldsymbol{V}$

- **Утв.** Сумма двух ортогональных п/п $L1, L2$ является прямой суммой п/п $L1 \oplus L2$

Ортогональное дополнение

- **Пример.** Пусть $\boldsymbol{a} = (1, 2, 5)^T$, $\boldsymbol{L1} =< \boldsymbol{a} >$,

$$\boldsymbol{L2} \coloneqq \{\boldsymbol{x}\colon \boldsymbol{a}^T * \boldsymbol{x} = 0\}$$

Видим, что $\boldsymbol{L2} = \boldsymbol{L1}^{\perp}$.

- **Пример.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L1 =< A_{<1>}, A_{<2>} >$,

$$L2 \coloneqq \{x\colon A * x = 0\}, \qquad L2 = ?$$

Ясно, что и в этом случае $L2 = L1^{\perp}$. Т.е. решив систему уравнений Ax=0, мы найдем описание подпространства, являющегося ортогональным дополнением подпространства, образованного строками матрицы A.

Ортогональное дополнение

- **Пример.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L1 =< A_{<1>}, A_{<2>} >$,

$$L2 := \{x: A * x = 0\}, \qquad L2 = ?$$

Ясно, что и в этом случае $L2 = L1^{\perp}$. Т.е. решив систему уравнений **Ax=0**, мы найдем описание подпространства, являющегося ортогональным дополнением подпространства, образованного строками матрицы **A**.

Такое п/п называется ***N(A) - ядром*** *матрицы A*

Ортогональное разложение

Опр. Рассмотрим в некотором пространстве V вектор **b** и подпространство L**.** Представление вектора **b** в виде

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{pr}} + \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}},$$

где $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{pr}}$ – *есть проекция вектора* ***b*** *на п/п* ***L****, а* $\boldsymbol{b}_{\boldsymbol{n}} \perp \boldsymbol{b}_{\boldsymbol{pr}}$ *называется ортогональным разложением вектора b по подпространству L.*

- *Теорема. Ортогональное разложение любого вектора по любому п/п единственно*

Ортогональное разложение

Опр. Рассмотрим в некотором пространстве V вектор **b** и подпространство ***L*****.** Представление вектора **b** в виде

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{b_{pr}} + \boldsymbol{b_n},$$

где $\boldsymbol{b_{pr}}$ *– есть проекция вектора* ***b*** *на п/п* ***L****, а* $\boldsymbol{b_n} \perp \boldsymbol{b_{pr}}$ *называется ортогональным разложением вектора b по подпространству* ***L****.*

- ***Теорема****. Ортогональное разложение любого вектора по любому п/п единственно*

Подпространство решений Ax=0

- Из свойства п/п следует, что любая линейная комбинация решений СОУ также является решением.

- **Опр.** Базис п/п решений называется **фундаментальной** системой решений **СОУ.**

- Если $L1 = \langle A \rangle$, то $\dim(L1) = rank(A)$. А какова размерность $L1^{\perp}$

- *Теорема (о размерности п/п решений Ax=0). Количество фундаментальных решений n_f Ax=0 равно $n_f = n - rank(A)$*

Подпространство решений Ax=0

- Из свойства п/п следует, что любая линейная комбинация решений СОУ также является решением.

- **Опр.** Базис п/п решений называется **фундаментальной** системой решений **СОУ.**

- Если $\boldsymbol{L1} =< \boldsymbol{A} >$, то $\dim(L1) = rank(\mathrm{A})$**.** А какова размерность $\boldsymbol{L1}^{\perp}$?

- ***Теорема*** *(о размерности п/п решений **Ax=0**). Количество фундаментальных решений n_f **Ax=0** равно* $n_f = n - rank(A)$

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ **Ax=0**
- Примеры проецирования

Приближенное решение СЛАУ

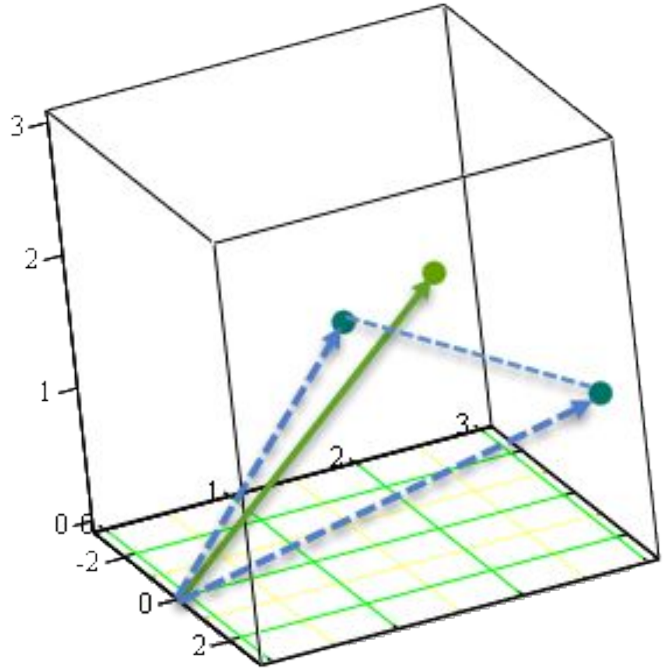
Приближенное решение СЛАУ

1. Исходные данные

2x-3y=1
3x+2y=2
x+y=2

$$Am := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad bm := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \qquad Ab := \mathrm{augment}(Am, bm)$$

$$Ab = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{rank}(Am) = 2 \qquad \mathrm{rank}(Ab) = 3$$



Пример проецирования векторов

Построим проекцию вектора bm на линейную оболочку векторов-столбцов матрицы Am.

$F := Am \qquad Y := bm$

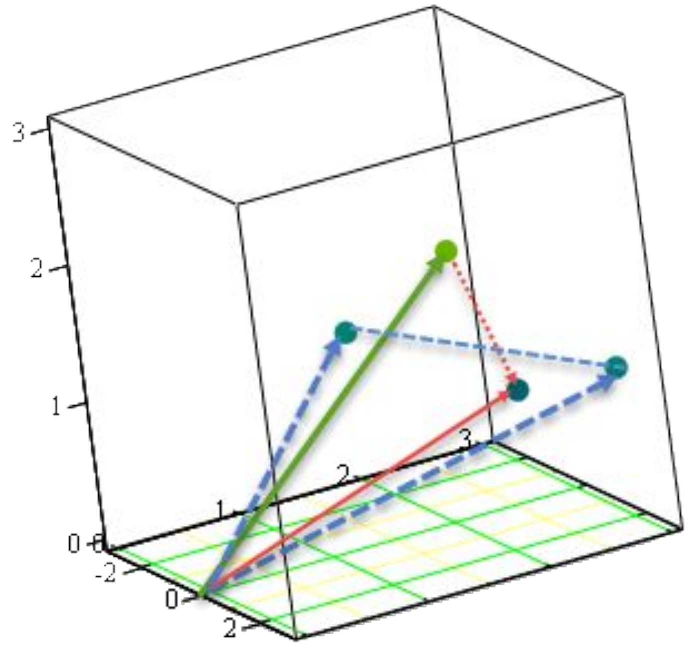
$F^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \qquad F^T \cdot F = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \qquad F^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$

$a := \mathrm{lsolve}\left(F^T \cdot F, F^T \cdot Y\right) \qquad a^T = (0.703 \quad 0.164)$

$Ym := F \cdot a \qquad Ym^T = (0.913 \quad 2.436 \quad 0.867) \qquad Y^T = (1 \quad 2 \quad 2)$

$Err := Y - Ym \qquad Err^T = (0.087 \quad -0.436 \quad 1.133)$

$|Err| = 1.217$



Аппроксимация функций

Возраст/10, лет (x)	Продуктивность,% (y)
1	5
2	10
3	50
…	…

Постановка задачи.
Имеются наблюдения параметра Y – продуктивности (%) в зависимости от параметра x – лет.
Построить модель с базисными функциями вида: 1, x, x^2, x^3

$ORIGIN := 1$

1. ВВОД исходных данных

$X := (10\ \ 20\ \ 30\ \ 50)^T$

$Y := (5\ \ 10\ \ 50\ \ 100)^T$

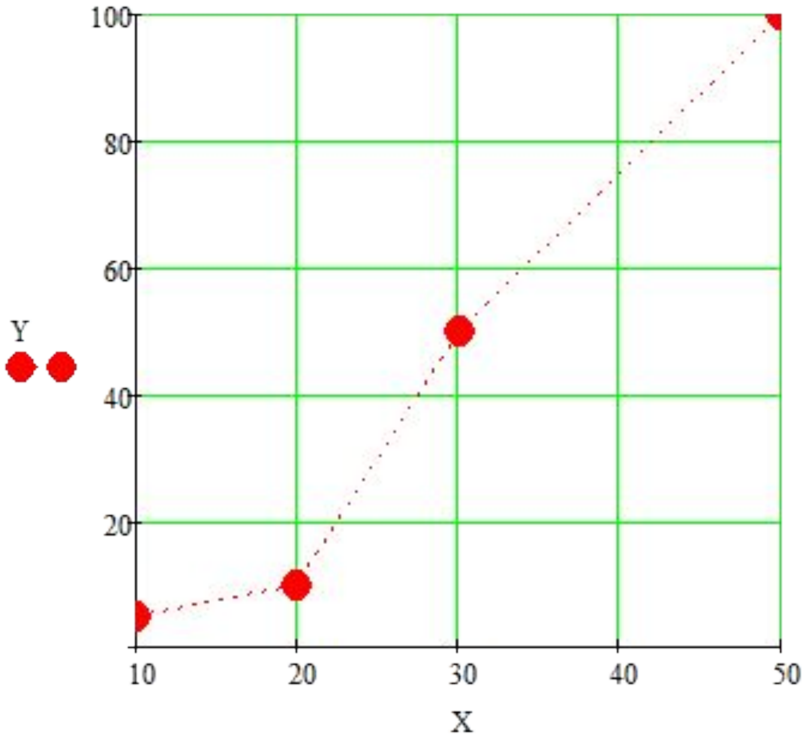
Аппроксимация функций

Возраст/10, лет (x)	Продуктивность,% (y)
1	5
2	10
3	50
…	…

$$X := (10 \;\; 20 \;\; 30 \;\; 50)^T$$

$$Y := (5 \;\; 10 \;\; 50 \;\; 100)^T$$

2. Графический анализ исходных данных



Аппроксимация функций

Будем строить линейную регрессионную модель Ym(x) с использованием некоторого набора базисных функций basfiVect, наилучшую среди всех возможных по точности прогноза. Для этого будем строить модель с помощью метода наименьших квадратов.

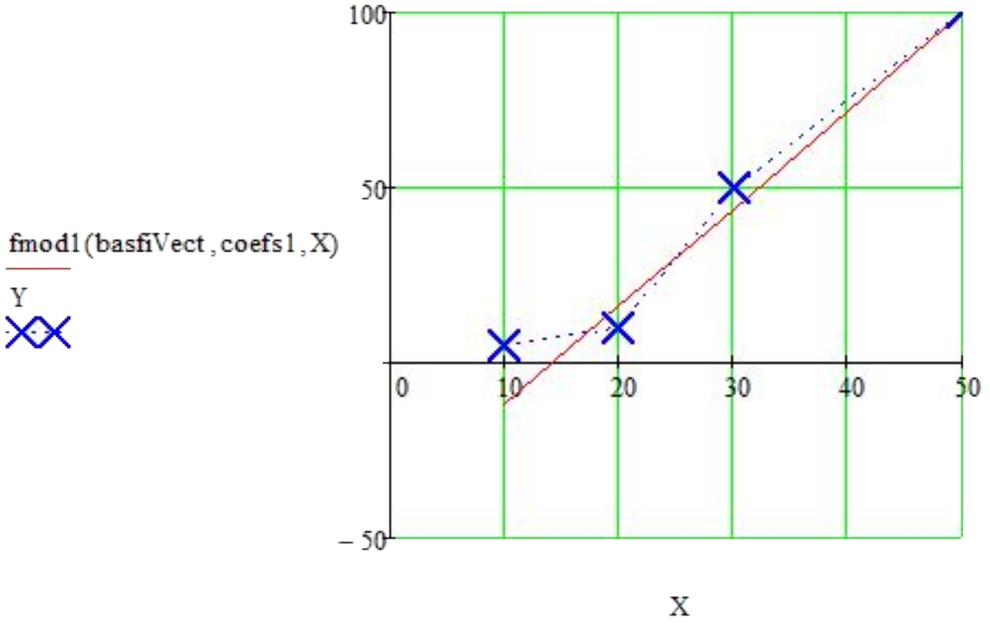
$$\phi0(x) := 1 \qquad \phi1(x) := x \qquad \phi2(x) := x^2 \qquad \phi3(x) := x^3$$

$$\mathrm{basfiVect}(x) := (\phi0(x) \quad \phi1(x) \quad \phi2(x) \quad \phi3(x))^T$$

$$\mathrm{fmod1}(\mathrm{basfi}, \mathrm{koef}, x) := \sum_{i=1}^{\mathrm{last(koef)}} \left(\mathrm{koef}_i \cdot \mathrm{basfi}(x)_i\right)$$

Смоделируем функцию y(x) = -40+2.8*x

$$\mathrm{coefs1} := (-40 \quad 2.8 \quad 0 \quad 0)^T$$



Аппроксимация функций

Определим матрицу значений возможных базисных функций во всех точках обучающей выборки:

$ik := 1..\mathrm{last}(YL)$

$XLbasis^{\langle ik \rangle} := \mathrm{basfiVect}(XL_{ik})$ $\qquad XLbasis := XLbasis^T$

$bfunQ := \mathrm{cols}(XLbasis) = 4$ $\qquad ibfun := 1..bfunQ$

$modXL_{ibfun} := \left|XLbasis^{\langle ibfun \rangle}\right|$ $\qquad modXL^T = \begin{pmatrix} 2 & 62.45 & 2.689 \times 10^3 & 1.281 \times 10^5 \end{pmatrix}$

$\phi 0(x) := 1 \qquad \phi 1(x) := x \qquad \phi 2(x) := x^2 \qquad \phi 3(x) := x^3$

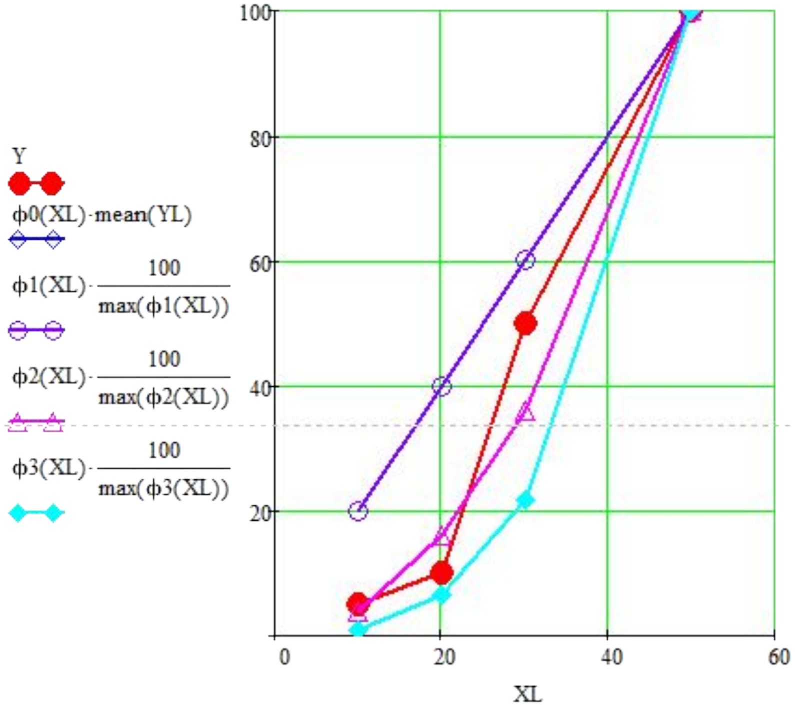
$$XLbasis = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1 \times 10^3 \\ 1 & 20 & 400 & 8 \times 10^3 \\ 1 & 30 & 900 & 2.7 \times 10^4 \\ 1 & 50 & 2.5 \times 10^3 & 1.25 \times 10^5 \end{pmatrix} \qquad YL = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

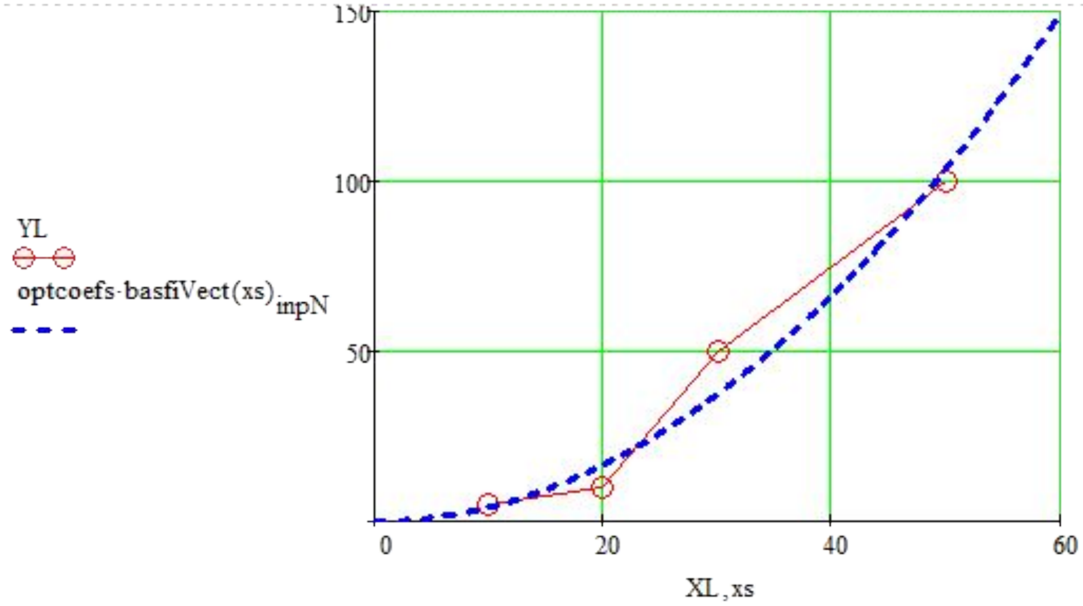
Аппроксимация функций

Проанализируем сходство базисных функций

$$\left|YL\right| = 112.361 \qquad \left|XLbasis^{\langle 2\rangle}\right| = 62.45$$

$$corrfi_{ibfun} := \frac{YL\cdot XLbasis^{\langle ibfun\rangle}}{\left|YL\right|\cdot\left|XLbasis^{\langle ibfun\rangle}\right|} \qquad corrfi = \begin{pmatrix} 0.734 \\ 0.962 \\ 0.991 \\ 0.968 \end{pmatrix}$$





Аппроксимация функций

Решаем приближенно СЛАУ Fm*a=Y

$$Fm := XLbasis$$

$$Fm = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1\times10^{3} \\ 1 & 20 & 400 & 8\times10^{3} \\ 1 & 30 & 900 & 2.7\times10^{4} \\ 1 & 50 & 2.5\times10^{3} & 1.25\times10^{5} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$Fm^{T}\cdot Fm = \begin{pmatrix} 4 & 110 & 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} \\ 110 & 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} \\ 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} & 3.401\times10^{8} \\ 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} & 3.401\times10^{8} & 1.642\times10^{10} \end{pmatrix} \qquad Fm^{T}\cdot Y = \begin{pmatrix} 165 \\ 6.75\times10^{3} \\ 2.995\times10^{5} \\ 1.393\times10^{7} \end{pmatrix}$$

$$a := \mathrm{lsolve}\left(Fm^{T}\cdot Fm, Fm^{T}\cdot Y\right) \qquad Ym := Fm\cdot a$$

$$Y^{T} = (5 \;\; 10 \;\; 50 \;\; 100)$$

$$Ym^{T} = (5 \;\; 10 \;\; 50 \;\; 100)$$

Аппроксимация функций

Решаем приближенно СЛАУ Fm*a=Y

$$Fm := XLbasis$$

$$Fm = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1\times10^{3} \\ 1 & 20 & 400 & 8\times10^{3} \\ 1 & 30 & 900 & 2.7\times10^{4} \\ 1 & 50 & 2.5\times10^{3} & 1.25\times10^{5} \end{pmatrix} \qquad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$Fm^{T}\cdot Fm = \begin{pmatrix} 4 & 110 & 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} \\ 110 & 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} \\ 3.9\times10^{3} & 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} & 3.401\times10^{8} \\ 1.61\times10^{5} & 7.23\times10^{6} & 3.401\times10^{8} & 1.642\times10^{10} \end{pmatrix} \qquad Fm^{T}\cdot Y = \begin{pmatrix} 165 \\ 6.75\times10^{3} \\ 2.995\times10^{5} \\ 1.393\times10^{7} \end{pmatrix}$$

$$a := \mathrm{lsolve}\left(Fm^{T}\cdot Fm, Fm^{T}\cdot Y\right) \qquad Ym := Fm\cdot a$$

$$Y^{T} = (5 \quad 10 \quad 50 \quad 100)$$

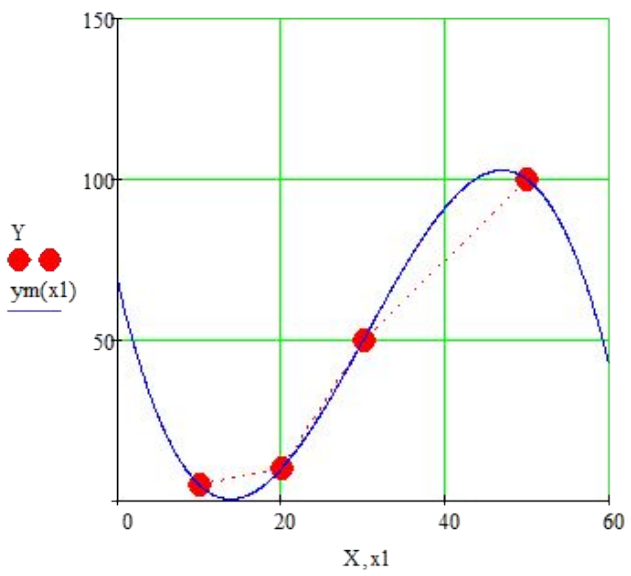
$$Ym^{T} = (5 \quad 10 \quad 50 \quad 100)$$

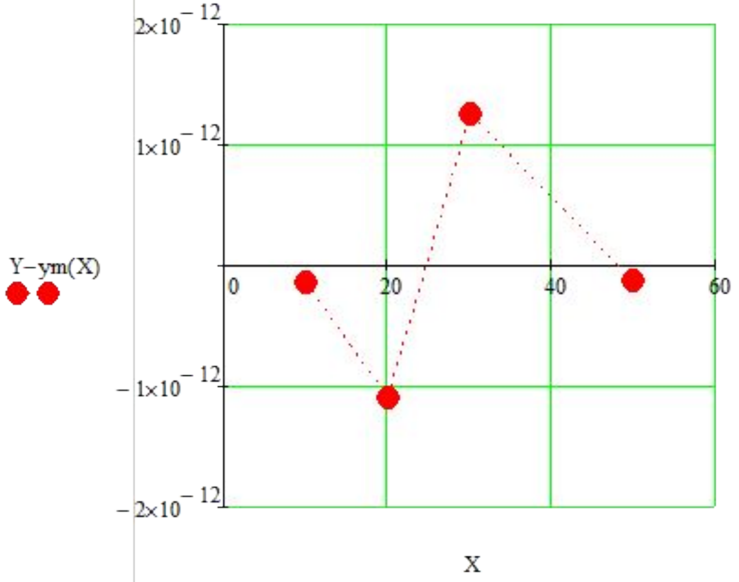
Аппроксимация функций

ORIGIN := 0

$a^T = \left(68.75 \quad -10.937 \quad 0.512 \quad -5.625\times10^{-3}\right)$

$ym(x) := a_0\cdot\phi0(x) + a_1\cdot\phi1(x) + a_2\cdot\phi2(x) + a_3\cdot\phi3(x)$





$err := YL - ym(XL)$ $\qquad err^T = \left(-1.439\times10^{-13} \quad -1.094\times10^{-12} \quad 1.251\times10^{-12} \quad -1.137\times10^{-13}\right)$

$|err| = 1.672\times10^{-12}$

Для решения реальных задач анализа (больших) массивов данных очень важно уметь снижать их размерность, проецируя вектора профилей объектов на подпространства значительно меньшей размерности, чем исходное векторное пространство. При этом надо уметь оценивать потери информации. Для этого можно использовать ортогональное разложение векторов по подпространству…