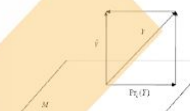


Нехаев И.Н., доцент Поволжского государственного технологического университета
Курс Волгатеха (ПГТУ) «Линейная алгебра и геометрия»
для направления «Программная инженерия»

■ ТЕМА

Подпространства. Проекция



Матрица линейного отображения
 (P_1, P_2, P_3)
 (P_1, P_2, P_3)
 (P_1, P_2, P_3)

Матрица линейного отображения
 (P_1, P_2, P_3)
 (P_1, P_2, P_3)
 (P_1, P_2, P_3)

Ключевые вопросы лекции

- Как уменьшить размерность векторного описания объектов?
- Что такое подпространство (п/п)? Как описываются п/п ?
- Как найти проекцию вектора на вектор, на произвольное п/п?
- Как построить матрицу проецирования на п/п ?
- Что такое сумма п/п, пересечение п/п, прямая сумма п/п?
- Как решается задача аппроксимации МНК с использованием операции проецирования?

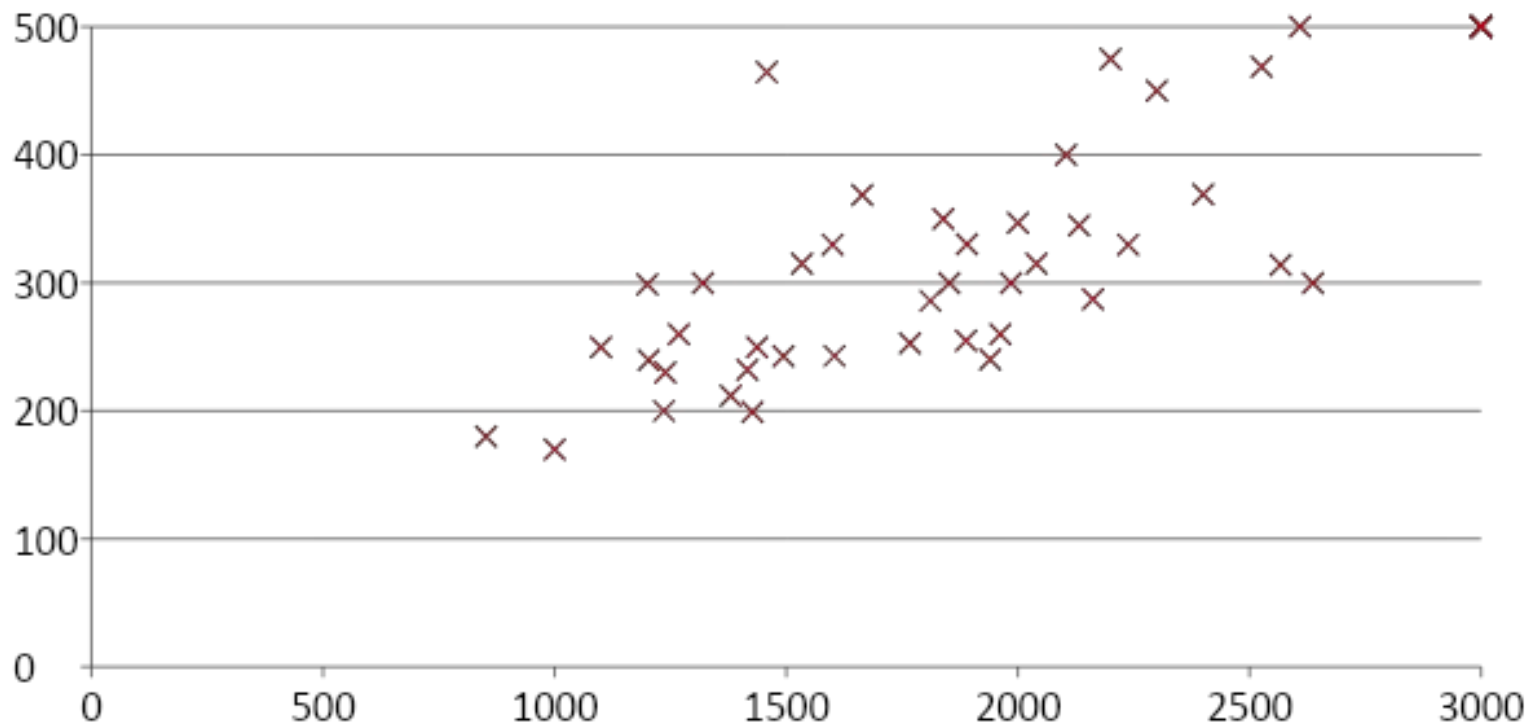
План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Постановка задачи аппроксимации

ТЕМА
Подпространства.
Проекции

Цена
дома,
тыс.\$



Задача регрессии:

Предсказать
величину цены
дома

Размер дома, кв. футов

Постановка задачи аппроксимации

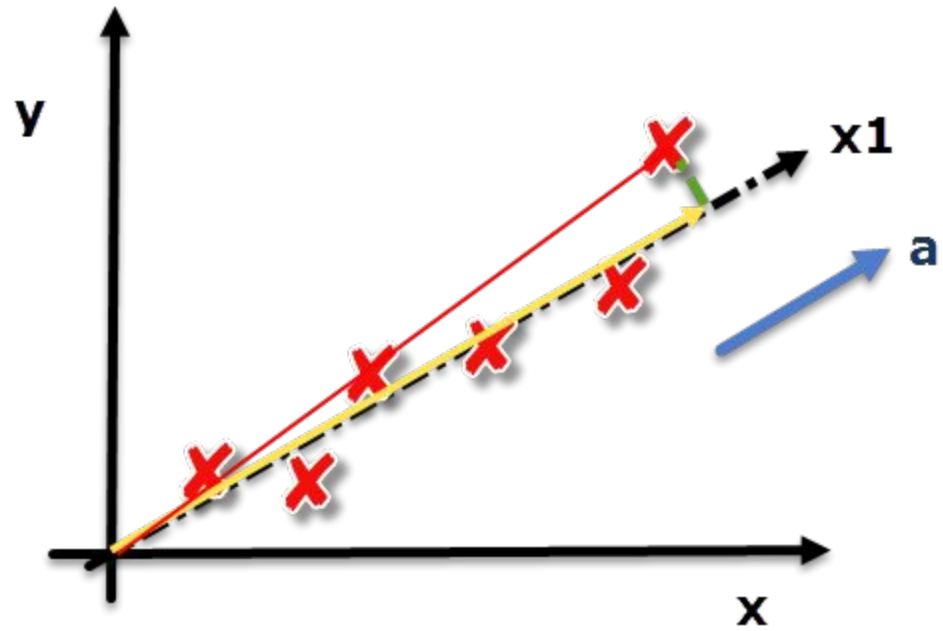
Рассмотрим простой пример	Возраст/10, лет (x)	Продуктивность/10,% (y)
	1	5
	2	10
	3	50

Гипотеза:

Модель линейная вида $y(x) = \text{SUM}(w_i * f_i(x))$

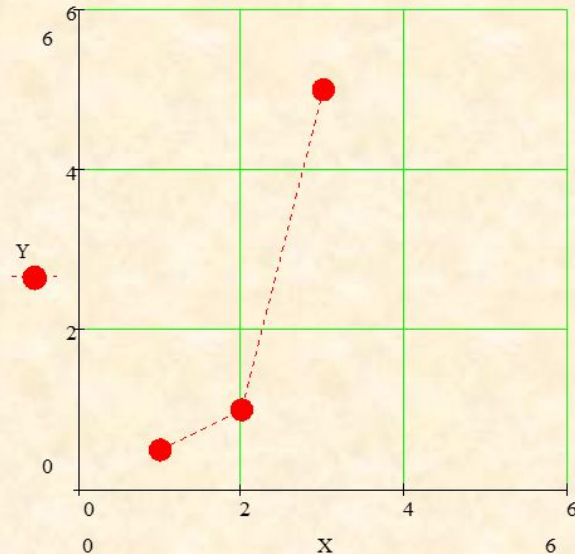
Как выбрать $f_i(x)$ – базисные функции?

Постановка задачи снижения размерности



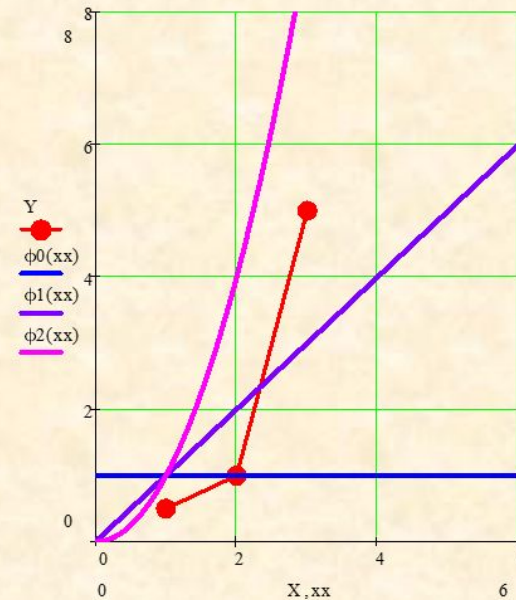
Постановка задачи аппроксимации

Графический анализ
исходных данных:



Рассмотрим базисные функции

$$\phi_0(x) := 1 \quad \phi_1(x) := x \quad \phi_2(x) := x^2$$



Какие (две) выбрать?

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Подпространство В.П.

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

•

Подпространство В.П.

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

•

Подпространство В.П.

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

•

Подпространство В.П.

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

•

Подпространство В.П.

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

•

Подпространство, порожденное векторами

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

-

Подпространство, порожденное векторами

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекция

-

Подпространство, порожденное векторами

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

-

Свойства подпространств

- **Теорема 1.** Если L — подпространство пространства V и A — порождающая матрица для L , то $\dim L = \text{rang } A$.

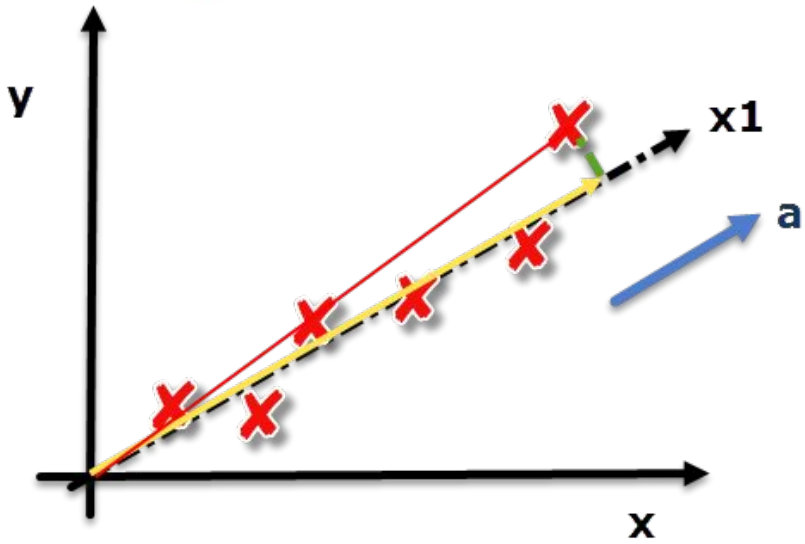
Одно и то же пространство может быть задано различными порождающими матрицами. В частности, имеет место

- Теорема 9.2. Если A — порождающая матрица пространства $L \subseteq V$ и U — любая невырожденная квадратная матрица, составленная из координат векторов V , то матрица $B = UA$ также является порождающей матрицей пространства L .

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Проекция вектора на одномерное п/п



- $\overline{pr_a b} = \frac{(a,b)}{(a,a)} \cdot a$

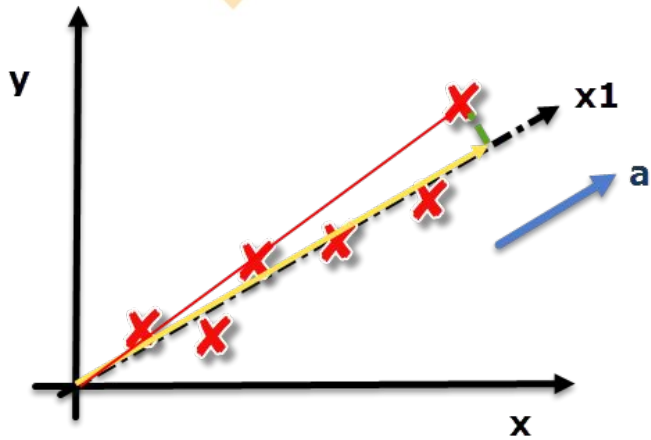
- $\overline{pr_a b} = \frac{a \cdot (a^T b)}{a^T a}$

- $\overline{pr_a b} = \frac{a \cdot a^T}{a^T a} \cdot b$

- $\overline{pr_a b} = M \cdot b$

- $M = \frac{a \cdot a^T}{a^T a}$

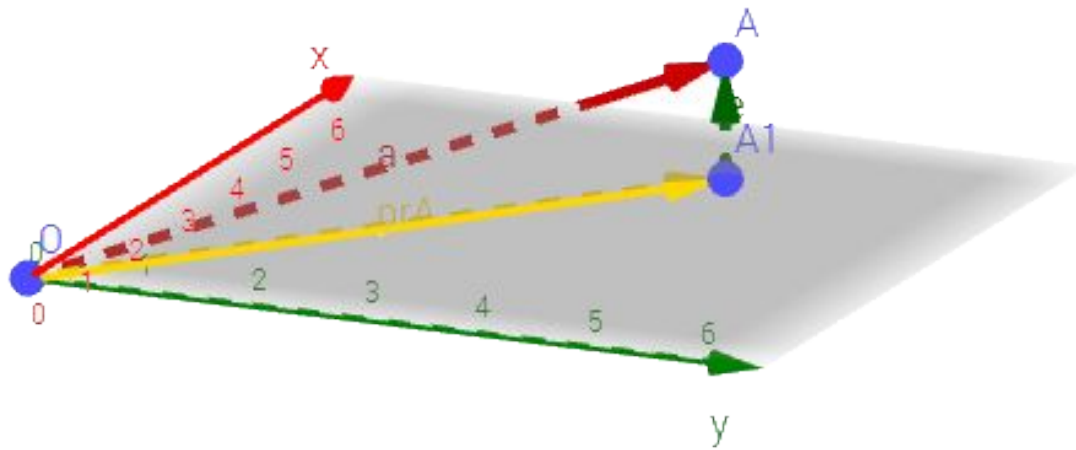
Проекция вектора на одномерное п/п



- $\overline{pr_a b} = M \cdot b$

- $M = \frac{a \cdot a^T}{a^T a}$

Проекция вектора на двумерное п/п

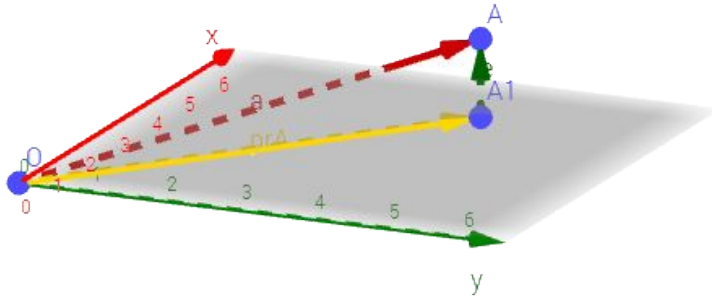


- $\overline{pr_{\langle a,b \rangle} OA} = \overline{OA_1}$

- $\overline{OA_1} = y_1 * \mathbf{f1} + y_2 * \mathbf{f2}$

- $\|\overline{OA} - (y_1 * \mathbf{f1} + y_2 * \mathbf{f2})\| \rightarrow \min$

Нормальная система уравнений

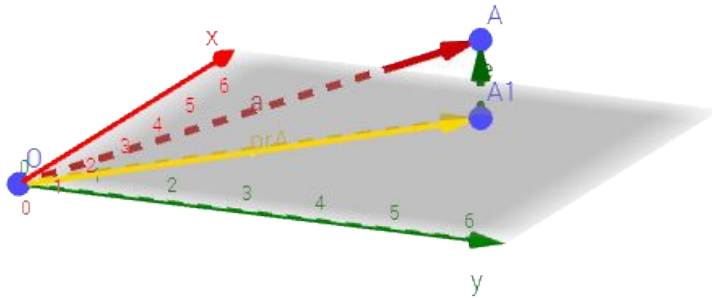


- $\|\overline{OA} - (y_1 * \mathbf{f}_1 + y_2 * \mathbf{f}_2)\| \rightarrow \min$

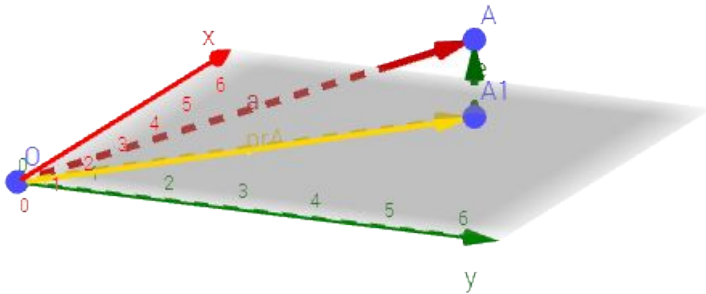
$$\|\overline{OA} - (y_1 * \mathbf{f}_1 + y_2 * \mathbf{f}_2)\|^2 \rightarrow \min$$

Нормальная система уравнений

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекция



Нормальная система уравнений



- $\overline{pr_L b} = M \cdot b$

-

- $M = X \cdot (X^T X)^{-1} \cdot X^T$

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Пересечение подпространств

- **Опр.** Пересечением двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 \cap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2$.

Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow$
 $L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$

Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T, L1 = \langle a \rangle$
 $L2 := \{x: a^T * x = 0\}$
 $L2 = ?, \quad L1 \cap L2 = ?$

Пересечение подпространств

- **Опр.** Пересечением двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 \cap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2$.

Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow$
 $L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$

Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T, L1 = \langle a \rangle$
 $L2 := \{x: a^T * x = 0\}$
 $L2 = ?, \quad L1 \cap L2 = ?$

Пересечение подпространств

- **Опр.** Пересечением двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 \cap L2 : z \in L3 \leftrightarrow z \in L1, z \in L2$.

Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow$
 $L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$

Пример 2. Пусть $a = (1, -2, 1)^T, L1 = \langle a \rangle$
 $L2 := \{x: a^T * x = 0\}$
 $L1 \cap L2 = ?$

Сумма подпространств

- **Опр.** Суммой двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 + L2$:

$$\forall z \in L3 \exists x \in L1, \exists y \in L2 : z = x + y .$$

- Пример 1. $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, L2 = \{(0, x2, 0)\} \Rightarrow$
 $L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}$

- Пример 2. Пусть $a = (1, 2, 5)^T, L1 = \langle a \rangle$
 $L2 := \{x : a^T * x = 0\},$
 $L1 + L2 = ?$

Сумма подпространств

- **Опр.** Суммой двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 + L2$:

$$\forall z \in L3 \exists x \in L1, \exists y \in L2 : z = x + y .$$

- **Пример 3.** $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, L2 = \{(0, x2, 0)\}$
 $L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}$

- **Пример 2.** Пусть $L1 = \langle a \rangle, L2 := \{x : a^T * x = 0\}$
 $L1 + L2 = ?$

Сумма подпространств

- **Опр. Суммой** двух п/п $L1, L2$ в.п. V называется множество векторов $L3 = L1 + L2$:

$$\forall z \in L3 \exists x \in L1, \exists y \in L2 : z = x + y .$$

- **Пример 4.** Пусть $L1 = \langle a \rangle$, $L2 := \{x : a^T * x = 0\}$
 $L1 + L2 = ?$

- **Пример 2.** Пусть $L1 = \langle a \rangle$, $L2 := \{x : a^T * x = 0\}$
 $L1 + L2 = ?$

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 3. Пересечение** двух п/п L_1, L_2 в.п. V $L_3 = L_1 \cap L_2$ также является п/п в.п. V .
(надо доказать замкнутость множества L_3 относительно операций $+, *$, определенных на V)
- Док-во:

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 3.** Пересечение двух п/п $L1, L2$ в.п. V $L3 = L1 \cap L2$ также является п/п в.п. V .

(надо доказать замкнутость множества $L3$ относительно операций $+$, $*$, определенных на V)

◦ Док-во:

- **Пример 1.** $L1 = \{(x1, x2, 0)\}$, $L2 = \{(0, x3, x4)\} \Rightarrow$
 $L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 4.** Сумма двух п/п L_1, L_2 в.п. V $L_3 = L_1 + L_2$ также является п/п. в.п. V .
(надо доказать замкнутость множества L_3 относительно операций $+, *$, определенных на V)
- Док-во:

Свойства пересечения и суммы п/п

- **Теорема 4.** Сумма двух п/п $L1, L2$ в.п. V $L3 = L1 + L2$ также является п/п. в.п. V .

(надо доказать замкнутость множества $L3$ относительно операций $+$, $*$, определенных на V)

◦ Док-во:

- **Пример 3.** $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, L2 = \{(0, x2, 0)\}$
 $L1 + L2 = \{(x1, x2, 0)\}$

Размерность пересечения п/п

- **Теорема 5.** Размерность пересечения двух п/п $L1, L2$ в.п. V $L3 = L1 \cap L2$ не превышает размерности п/п $L1$ и $L2$:

$$\dim(L3) \leq \min(\dim(L1), \dim(L2))_{\text{на } V}$$

• Док-во:

- **Пример 1.** $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x3, x4)\}$
 $L1 \cap L2 = \{(0, x, 0)\}$
 $\dim(L1 \cap L2) = 1$

Размерность суммы п/п

- **Теорема 6.** Размерность **Суммы** двух п/п $L1, L2$ в.п. V

$L3 = L1 + L2$ равна:

$$\dim(L1 + L2) = \dim(L1) + \dim(L2) - \dim(L1 \cap L2)$$

(примем без доказательства)

- **Пример 1.** $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x3, x4)\}$

$$L1 + L2 = \{(x1, x2, x3)\}$$

$$\dim(L1 + L2) = 2 + 2 - 1 = 3$$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $L1 \oplus L2$, если
$$\forall z \in L3 \exists ! x \in L1, \exists ! y \in L2 : z = x + y.$$
- Пример 1. $L1 = \{(x1, x2, 0)\}$, $L2 = \{(0, x3, x4)\}$
 $L1 + L2 = \{(x1, x2, x3)\}$ – не является прямой суммой!
- Пример 3. $L1 = \{(x1, 0, 0)\}$, $L2 = \{(0, x2, 0)\}$
 $L1 \oplus L2 = \{(x1, x2, 0)\}$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $L1 \oplus L2$, если
$$\forall z \in L3 \exists ! x \in L1, \exists ! y \in L2 : z = x + y.$$
- **Пример 1.** $L1 = \{(x1, x2, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x3, x4)\}$
 $L1 + L2 = \{(x1, x2, x3)\}$ – не является прямой суммой!
- **Пример 3.** $L1 = \{(x1, 0, 0)\}, \quad L2 = \{(0, x2, 0)\}$
 $L1 \oplus L2 = \{(x1, x2, 0)\}$

Прямая сумма п/п

- **Опр.** Сумму двух подпространств будем называть прямой суммой п/п и обозначать $L1 \oplus L2$, если
$$\forall z \in L3 \exists ! x \in L1, \exists ! y \in L2 : z = x + y.$$

- **Пример 3.**

$$L1 = \{(x1, 0, 0)\} \text{ (или } L1 = \langle e1 \rangle)$$

$$L2 = \{(0, x2, 0)\} \text{ (или } L2 = \langle e2 \rangle)$$

$$L3 = L1 \oplus L2 = \{(x1, x2, 0)\} \text{ (или } L3 = \langle e1, e2 \rangle)$$

Прямая сумма п/п

Теорема. Пусть L_1, L_2, \dots, L_m – подпространства конечномерного векторного пространства V . Сумма подпространств

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_m$$

является прямой суммой тогда и только тогда, когда объединение произвольно выбранных базисов в L_1, L_2, \dots, L_m дает базис в п/п L .

Следствие. Если e_1, e_2, \dots, e_m – линейно-независимая система векторов, то сумма их линейных оболочек

$$L = \langle e_1 \rangle + \langle e_2 \rangle + \dots + \langle e_m \rangle$$

является прямой суммой.

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Ортогональное дополнение

- **Опр.** П/п L_1, L_2 называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in L_1$ любому вектору $y \in L_2 : L_1 \perp L_2$.
- Опр. Ортогональным дополнением подпространства $L_1 \subseteq V$ до V называется подпространство $L_2 = L_1^\perp : L_1 \perp L_2$ и $L_1 + L_2 = V$
- Утв. Сумма двух ортогональных п/п L_1, L_2 является прямой суммой п/п $L_1 \oplus L_2$

Ортогональное дополнение

- **Опр.** П/п L_1, L_2 называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in L_1$ любому вектору $y \in L_2$: $L_1 \perp L_2$.
- **Опр.** Ортогональным дополнением подпространства $L_1 \subseteq V$ до V называется подпространство $L_2 = L_1^\perp$: $L_1 \perp L_2$ и $L_1 + L_2 = V$
- Утв. Сумма двух ортогональных п/п L_1, L_2 является прямой суммой п/п $L_1 \oplus L_2$

Ортогональное дополнение

- **Опр.** П/п L_1, L_2 называются **взаимно ортогональными** если любой вектор $x \in L_1$ любому вектору $y \in L_2$: $L_1 \perp L_2$.
- **Опр.** Ортогональным дополнением подпространства $L_1 \subseteq V$ до V называется подпространство $L_2 = L_1^\perp$: $L_1 \perp L_2$ и $L_1 + L_2 = V$
- **Утв.** Сумма двух ортогональных п/п L_1, L_2 является прямой суммой п/п $L_1 \oplus L_2$

Ортогональное дополнение

- **Пример.** Пусть $a = (1, 2, 5)^T$, $L1 = \langle a \rangle$,
 $L2 := \{x: a^T * x = 0\}$

Видим, что $L2 = L1^\perp$.

- **Пример.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L1 = \langle A_{\langle 1 \rangle}, A_{\langle 2 \rangle} \rangle$,

$$L2 := \{x: A * x = 0\}, \quad L2 = ?$$

Ясно, что и в этом случае $L2 = L1^\perp$. Т.е. решив систему уравнений $Ax=0$, мы найдем описание подпространства, являющегося ортогональным дополнением подпространства, образованного строками матрицы A .

Ортогональное дополнение

• **Пример.** Пусть $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $L1 = \langle A_{\langle 1 \rangle}, A_{\langle 2 \rangle} \rangle$,

$$L2 := \{x: A * x = 0\}, \quad L2 = ?$$

Ясно, что и в этом случае $L2 = L1^\perp$. Т.е. решив систему уравнений $Ax=0$, мы найдем описание подпространства, являющегося ортогональным дополнением подпространства, образованного строками матрицы A .

Такое п/п называется $N(A)$ - *ядром* матрицы A

Ортогональное разложение

Опр. Рассмотрим в некотором пространстве V вектор \mathbf{b} и подпространство L . Представление вектора \mathbf{b} в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{pr} + \mathbf{b}_n,$$

где \mathbf{b}_{pr} – есть проекция вектора \mathbf{b} на п/п L , а $\mathbf{b}_n \perp \mathbf{b}_{pr}$ называется ортогональным разложением вектора \mathbf{b} по подпространству L .

- Теорема. Ортогональное разложение любого вектора по любому п/п единственно

Ортогональное разложение

Опр. Рассмотрим в некотором пространстве V вектор \mathbf{b} и подпространство L . Представление вектора \mathbf{b} в виде

$$\mathbf{b} = \mathbf{b}_{pr} + \mathbf{b}_n,$$

где \mathbf{b}_{pr} – есть проекция вектора \mathbf{b} на п/п L , а $\mathbf{b}_n \perp \mathbf{b}_{pr}$ называется ортогональным разложением вектора \mathbf{b} по подпространству L .

- **Теорема.** Ортогональное разложение любого вектора по любому п/п единственно

Подпространство решений $Ax=0$

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекция

Из свойства п/п следует, что любая линейная комбинация решений СОУ также является решением.

- **Опр.** Базис п/п решений называется **фундаментальной** системой решений **СОУ**.

- Если $L1 = \langle A \rangle$, то $\dim(L1) = \text{rank}(A)$. А какова размерность $L1^\perp$

- *Теорема (о размерности п/п решений $Ax=0$). Количество фундаментальных решений n_f $Ax=0$ равно $n_f = n - \text{rank}(A)$*

Подпространство решений $Ax=0$

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекция

Из свойства п/п следует, что любая линейная комбинация решений СОР также является решением.

- **Опр.** Базис п/п решений называется **фундаментальной** системой решений **СОР**.
- Если $L1 = \langle A \rangle$, то $\dim(L1) = \text{rank}(A)$. А какова размерность $L1^\perp$?
- **Теорема** (о размерности п/п решений $Ax=0$). Количество фундаментальных решений n_f $Ax=0$ равно $n_f = n - \text{rank}(A)$

План уроков темы

- Постановка задач аппроксимации и снижения размерности описания объектов
- Подпространство (п/п). Описание п/п. Порождающие матрицы.
- Проецирование вектора на произвольное п/п. Вывод нормальной системы уравнений.
- Алгебраические операции на множестве п/п. Свойства операций
- Ортогональное разложение по п/п. Связь п/п с СЛАУ $Ax=0$
- Примеры проецирования

Приближенное решение СЛАУ

■ ТЕМА
Подпространства.
Проекции

Приближенное решение СЛАУ

1. Исходные данные

$$\begin{aligned}2x-3y &= 1 \\ 3x+2y &= 2 \\ x+y &= 2\end{aligned}$$

$$Am := \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

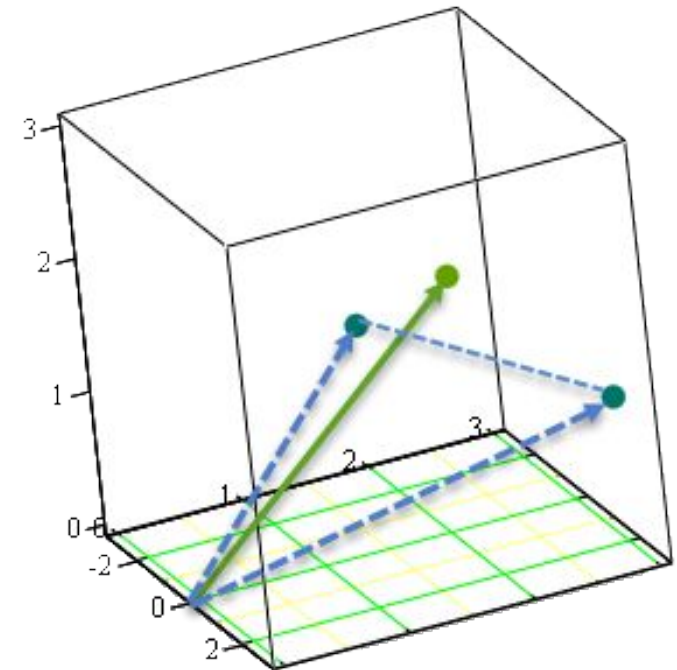
$$bm := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$Ab := \text{augment}(Am, bm)$$

$$Ab = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank}(Am) = 2$$

$$\text{rank}(Ab) = 3$$



Пример проецирования векторов

Построим проекцию вектора bm на линейную оболочку векторов-столбцов матрицы Am .

$$F := Am \quad Y := bm$$

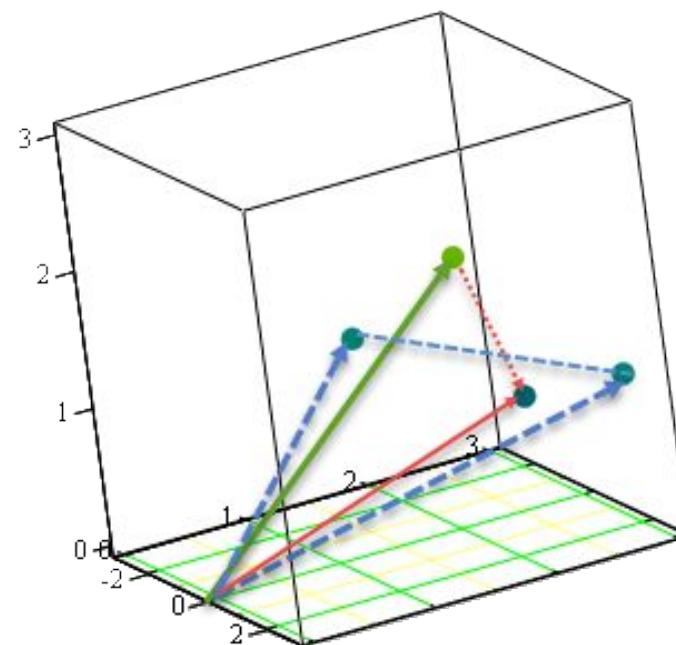
$$F^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad F^T \cdot F = \begin{pmatrix} 14 & 1 \\ 1 & 14 \end{pmatrix} \quad F^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 10 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{lsolve}(F^T \cdot F, F^T \cdot Y) \quad a^T = (0.703 \quad 0.164)$$

$$Ym := F \cdot a \quad Ym^T = (0.913 \quad 2.436 \quad 0.867) \quad Y^T = (1 \quad 2 \quad 2)$$

$$Err := Y - Ym \quad Err^T = (0.087 \quad -0.436 \quad 1.133)$$

$$|Err| = 1.217$$



Аппроксимация функций

Возраст/10, лет (x)	Продуктивность,% (y)
1	5
2	10
3	50
...	...

Постановка задачи.

Имеются наблюдения параметра Y – продуктивности (%) в зависимости от параметра x – лет.

Построить модель с базисными функциями вида: $1, x, x^2, x^3$

ORIGIN := 1

1. ВВОД исходных данных

$$X := (10 \ 20 \ 30 \ 50)^T$$

$$Y := (5 \ 10 \ 50 \ 100)^T$$

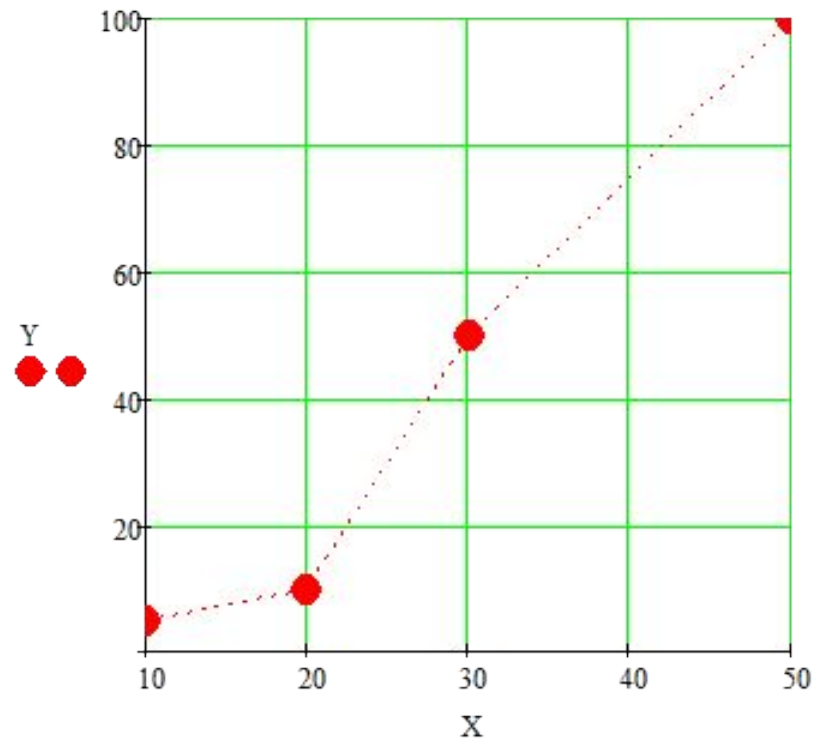
Аппроксимация функций

Возраст/10, лет (x)	Продуктивность,% (y)
1	5
2	10
3	50
...	...

$$X := (10 \ 20 \ 30 \ 50)^T$$

$$Y := (5 \ 10 \ 50 \ 100)^T$$

2. Графический анализ исходных данных



Аппроксимация функций

Будем строить линейную регрессионную модель $Y_m(x)$ с использованием некоторого набора базисных функций basfiVect , наилучшую среди всех возможных по точности прогноза. Для этого будем строить модель с помощью метода наименьших квадратов.

$$\phi_0(x) := 1 \quad \phi_1(x) := x \quad \phi_2(x) := x^2 \quad \phi_3(x) := x^3$$

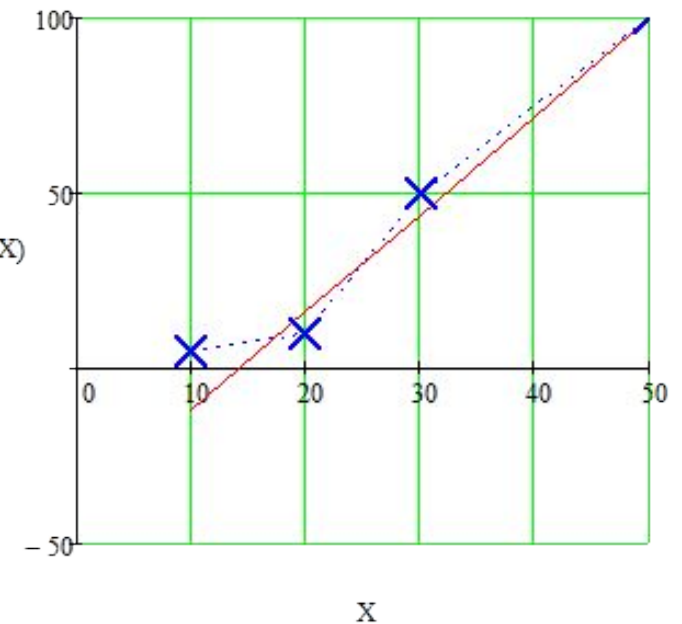
$$\text{basfiVect}(x) := (\phi_0(x) \ \phi_1(x) \ \phi_2(x) \ \phi_3(x))^T$$

$$\text{fmod1}(\text{basfi}, \text{coef}, x) := \sum_{i=1}^{\text{last}(\text{coef})} (\text{coef}_i \cdot \text{basfi}(x)_i)$$

Смоделируем функцию $y(x) = -40 + 2.8 \cdot x$

$$\text{coefs1} := (-40 \ 2.8 \ 0 \ 0)^T$$

$$\frac{\text{fmod1}(\text{basfiVect}, \text{coefs1}, X)}{Y}$$



Аппроксимация функций

Определим матрицу значений возможных базисных функций во всех точках обучающей выборки:

$ik := 1 \dots \text{last}(YL)$

$XLbasis^{(ik)} := \text{basfiVect}(XL_{ik})$

$XLbasis := XLbasis^T$

$bfunQ := \text{cols}(XLbasis) = 4$

$ibfun := 1 \dots bfunQ$

$\text{mod}XL_{ibfun} := |XLbasis^{(ibfun)}|$

$\text{mod}XL^T = (2 \quad 62.45 \quad 2.689 \times 10^3 \quad 1.281 \times 10^5)$

$\phi_0(x) := 1 \quad \phi_1(x) := x \quad \phi_2(x) := x^2 \quad \phi_3(x) := x^3$

$XLbasis = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1 \times 10^3 \\ 1 & 20 & 400 & 8 \times 10^3 \\ 1 & 30 & 900 & 2.7 \times 10^4 \\ 1 & 50 & 2.5 \times 10^3 & 1.25 \times 10^5 \end{pmatrix}$

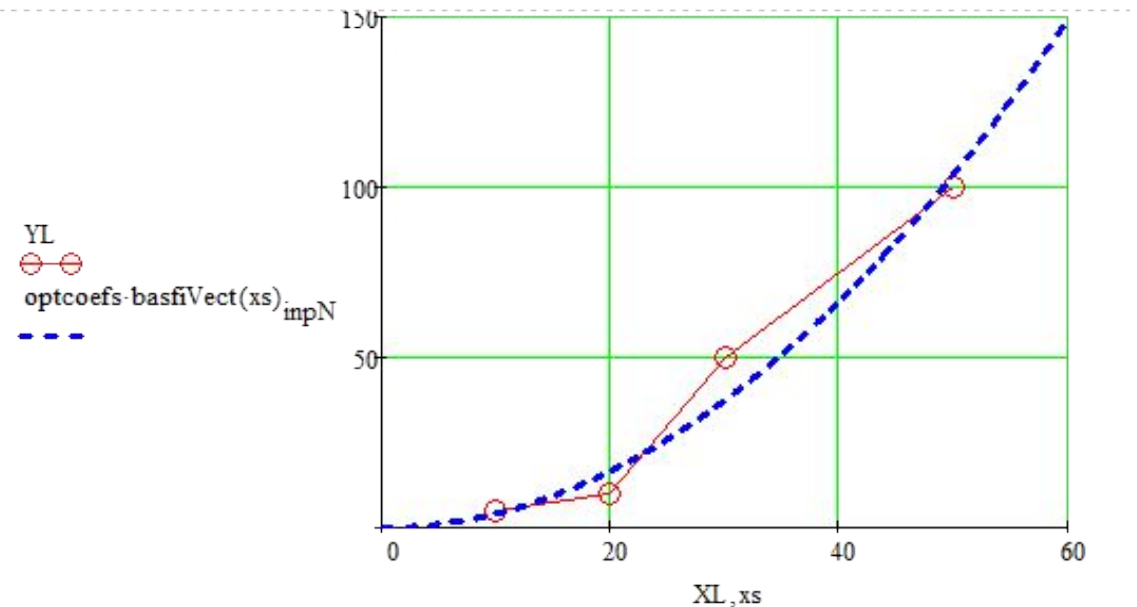
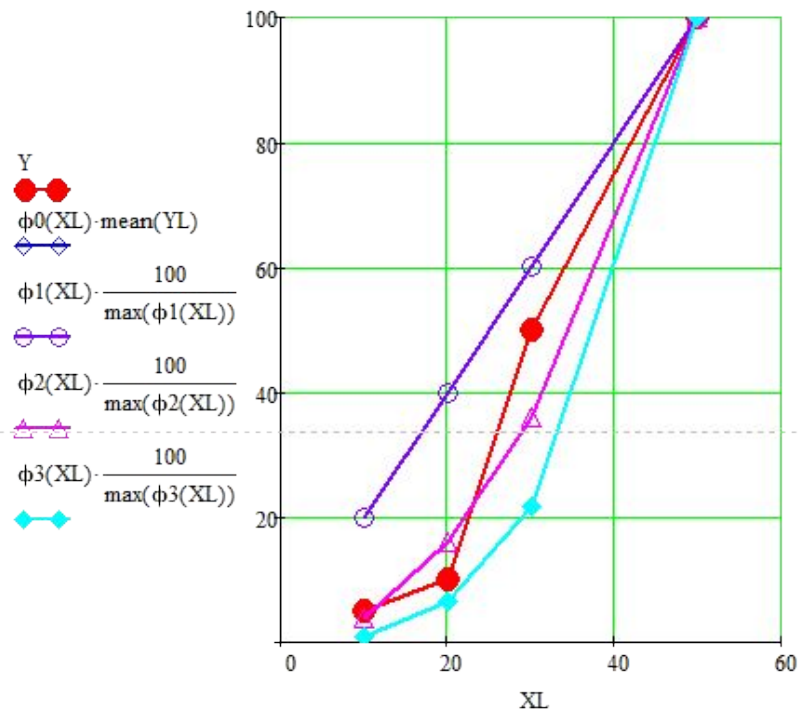
$YL = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$

Аппроксимация функций

Проанализируем сходство базисных функций

$$|YL| = 112.361 \quad |XLbasis^{(2)}| = 62.45$$

$$corr_{fi_{ibfun}} := \frac{YL \cdot XLbasis^{(ibfun)}}{|YL| \cdot |XLbasis^{(ibfun)}|} \quad corr_{fi} = \begin{pmatrix} 0.734 \\ 0.962 \\ 0.991 \\ 0.968 \end{pmatrix}$$



Аппроксимация функций

Решаем приближенно СЛАУ $F_m \cdot a = Y$

$F_m := XLbasis$

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1 \times 10^3 \\ 1 & 20 & 400 & 8 \times 10^3 \\ 1 & 30 & 900 & 2.7 \times 10^4 \\ 1 & 50 & 2.5 \times 10^3 & 1.25 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_m^T \cdot F_m = \begin{pmatrix} 4 & 110 & 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 \\ 110 & 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 \\ 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 & 3.401 \times 10^8 \\ 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 & 3.401 \times 10^8 & 1.642 \times 10^{10} \end{pmatrix} \quad F_m^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 165 \\ 6.75 \times 10^3 \\ 2.995 \times 10^5 \\ 1.393 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$$a := \text{lsolve}(F_m^T \cdot F_m, F_m^T \cdot Y) \quad Y_m := F_m \cdot a$$

$$Y^T = (5 \ 10 \ 50 \ 100)$$

$$Y_m^T = (5 \ 10 \ 50 \ 100)$$

Аппроксимация функций

Решаем приближенно СЛАУ $F_m \cdot a = Y$

$F_m := \text{XLbasis}$

$$F_m = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 100 & 1 \times 10^3 \\ 1 & 20 & 400 & 8 \times 10^3 \\ 1 & 30 & 900 & 2.7 \times 10^4 \\ 1 & 50 & 2.5 \times 10^3 & 1.25 \times 10^5 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 50 \\ 100 \end{pmatrix}$$

$$F_m^T \cdot F_m = \begin{pmatrix} 4 & 110 & 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 \\ 110 & 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 \\ 3.9 \times 10^3 & 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 & 3.401 \times 10^8 \\ 1.61 \times 10^5 & 7.23 \times 10^6 & 3.401 \times 10^8 & 1.642 \times 10^{10} \end{pmatrix} \quad F_m^T \cdot Y = \begin{pmatrix} 165 \\ 6.75 \times 10^3 \\ 2.995 \times 10^5 \\ 1.393 \times 10^7 \end{pmatrix}$$

$a := \text{lsolve}(F_m^T \cdot F_m, F_m^T \cdot Y)$ $Y_m := F_m \cdot a$

$$Y^T = (5 \ 10 \ 50 \ 100)$$

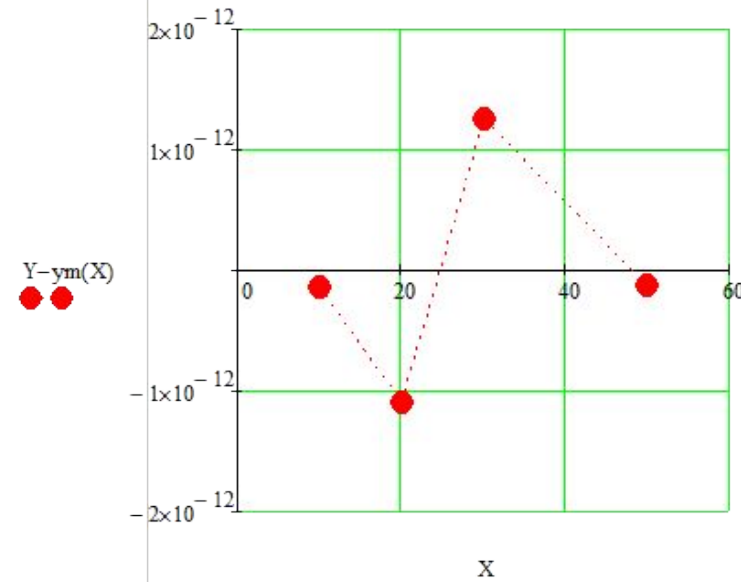
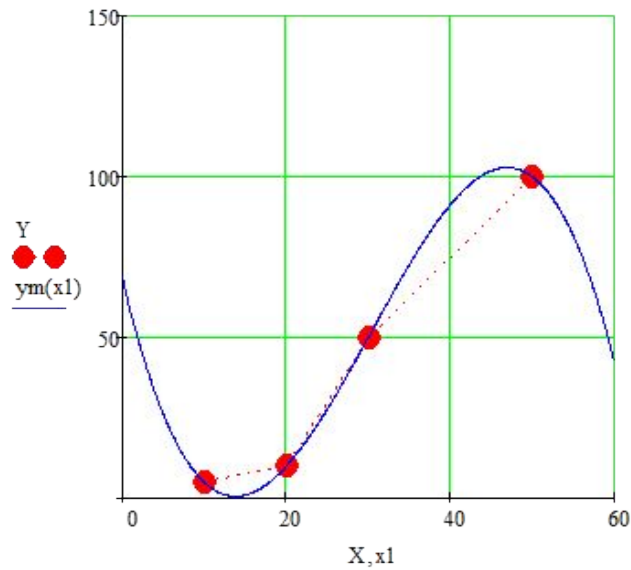
$$Y_m^T = (5 \ 10 \ 50 \ 100)$$

Аппроксимация функций

ORIGIN := 0


$$\mathbf{a}^T = (68.75 \quad -10.937 \quad 0.512 \quad -5.625 \times 10^{-3})$$

$$ym(x) := a_0 \cdot \phi_0(x) + a_1 \cdot \phi_1(x) + a_2 \cdot \phi_2(x) + a_3 \cdot \phi_3(x)$$



$$\text{err} := YL - ym(XL) \quad \text{err}^T = (-1.439 \times 10^{-13} \quad -1.094 \times 10^{-12} \quad 1.251 \times 10^{-12} \quad -1.137 \times 10^{-13})$$

$$|\text{err}| = 1.672 \times 10^{-12}$$



Для решения реальных задач анализа (больших) массивов данных очень важно уметь снижать их размерность, проецируя вектора профилей объектов на подпространства значительно меньшей размерности, чем исходное векторное пространство. При этом надо уметь оценивать потери информации. Для этого можно использовать ортогональное разложение векторов по подпространству...

