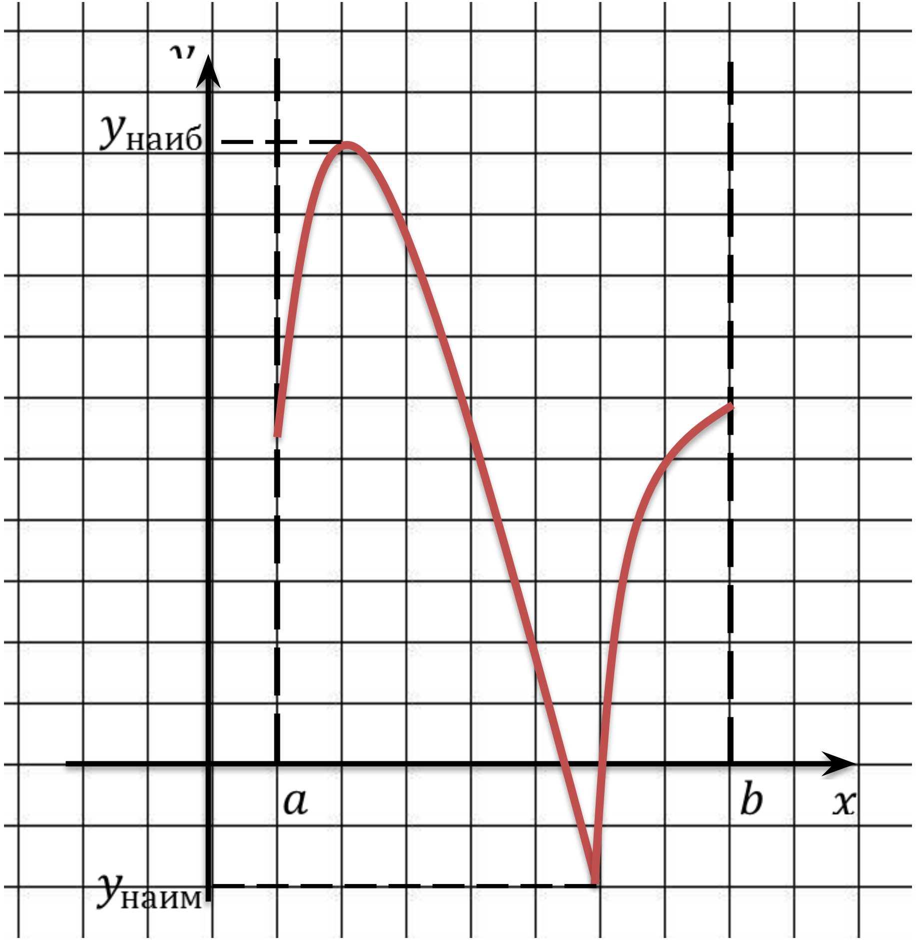
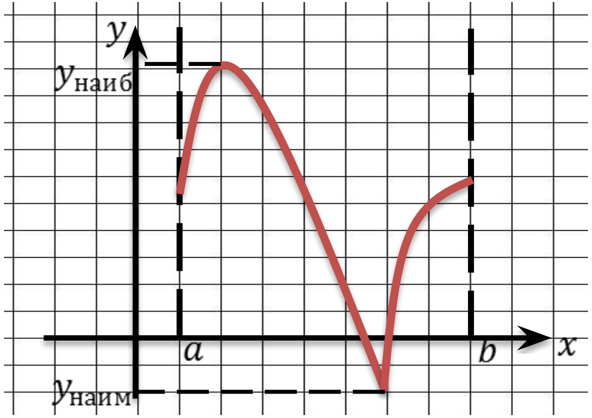
Отыскание наибольшего и наименьшего значений непрерывной функции на промежутке

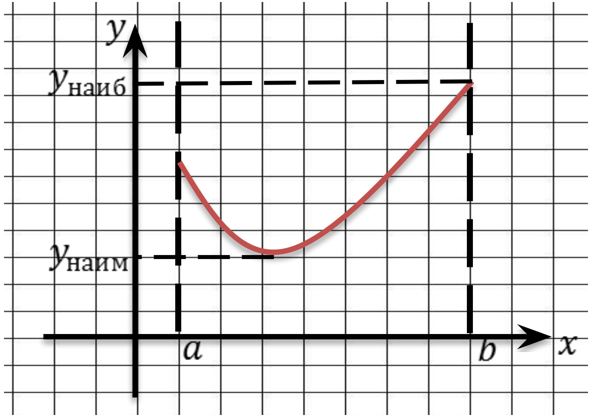


$y = \sqrt{4 - x^2}$

$\sqrt{4 - x^2} \geq 0 \Rightarrow y_{наим} = y(-2) = y(2) = 0$

$\sqrt{4 - x^2} \leq 4 \Rightarrow y_{наиб} = y(0) = 2$





1. Если функция непрерывна на отрезке, то она достигает на нем и своего наибольшего, и своего наименьшего значений.
2. Наибольшего и наименьшего значений непрерывная функция может достигать как на концах отрезка, так и внутри него.
3. Если наибольшее (наименьшее значение) достигается внутри отрезка, то только в стационарной или критической точке.

Алгоритм нахождения наименьшего и наибольшего значений непрерывной функции $y = f(x)$ на отрезке $[a; b]$:

1. Найти производную $f'(x)$.
2. Найти стационарные и критические точки функции, лежащие внутри отрезка $[a; b]$.
3. Вычислить значения функции $y = f(x)$ в найденных точках и в точках a и b; выбрать среди этих значений наименьшее (это будет $y_{\text{наим}}$) и наибольшее (это будет $y_{\text{наиб}}$).

Пример:

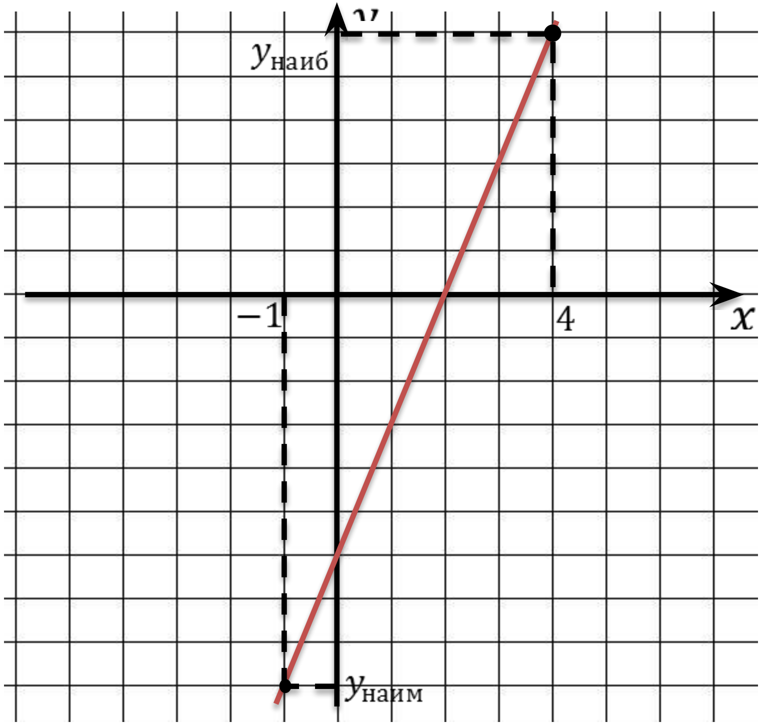
- Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = 3x - 6$ на отрезке $[-1; 4]$.

Решение:

$f'(x) = 3$

$f(-1) = -9 = y_{\text{наим}}$

$f(4) = 6 = y_{\text{наиб}}$



Пример:

- Найти наименьшее и наибольшее значения функции $y = x^2 - 8x + 19$ на отрезке $[-1; 5]$.

Решение:

$f'(x) = 2x - 8$

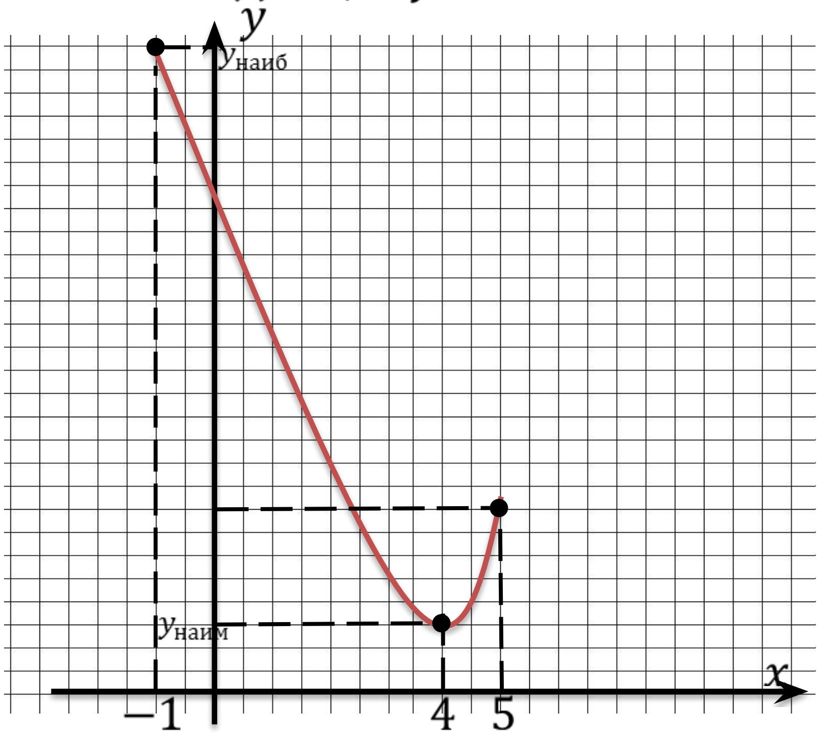
$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = 4$

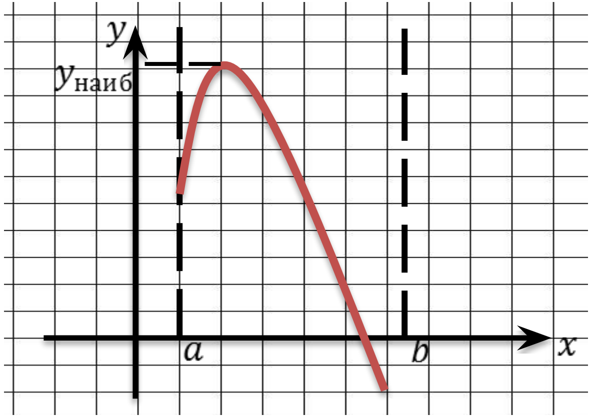
$4 \in [-1; 5]$

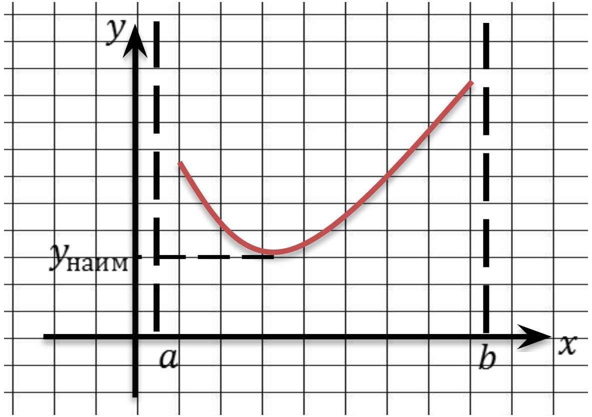
$f(-1) = 28 = y_{\text{наиб}}$

$f(5) = 4$

$f(4) = 3 = y_{\text{наим}}$







- **Теорема.** Пусть функция $y = f(x)$ непрерывна на промежутке X и имеет внутри него единственную стационарную или критическую точку $x = x_0$. Тогда:

а) если $x = x_0$ – точка максимума, то $y_{наиб} = f(x_0)$;

б) если $x = x_0$ – точка минимума, то $y_{наим} = f(x_0)$.

Пример:

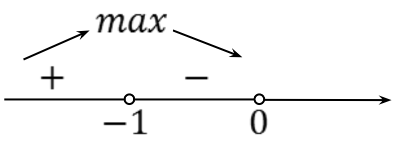
- Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x + \frac{1}{x}$ на промежутке $(-\infty; 0)$.

Решение:

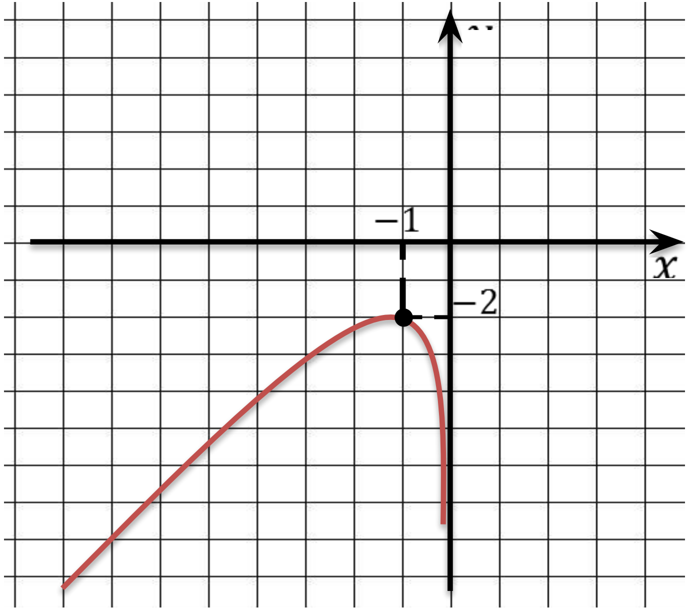
$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x = \pm 1$$

$$-1 \in (-\infty; 0)$$



$$f(-1) = -2 = y_{\text{наиб}}$$



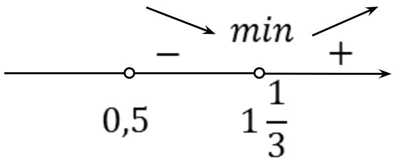
Пример:

- Найти наибольшее и наименьшее значения функции $y = x^3 - 2x^2 + 1$ на $[0{,}5;\ +\infty)$.

Решение:

$f'(x) = 3x^2 - 4x$

$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x(3x - 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ или $x = 1\frac{1}{3}$



$$f\left(1\frac{1}{3}\right) = -\frac{5}{27} = y_{\text{наим}}$$