

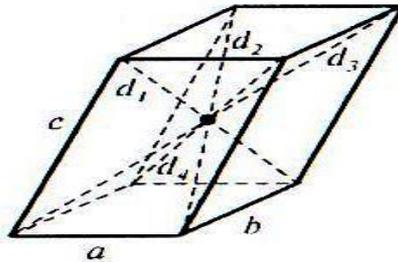
Прямоугольный параллелепипед в задачах В8 ЕГЭ

Геометрия 11 класс

Прямоугольный параллелепипед

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД

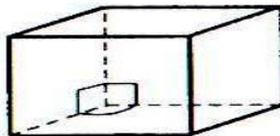
Так называется призма, основания которой — параллелограммы.



Все грани параллелепипеда — параллелограммы.
 Противоположные грани параллельны и равны.
 Все четыре диагонали пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.
 Точка пересечения диагоналей — центр симметрии.

Сумма квадратов диагоналей равна сумме квадратов всех ребер:

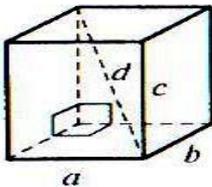
$$d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 = 4a^2 + 4b^2 + 4c^2$$



Прямой параллелепипед:

боковые ребра перпендикулярны основаниям.

Боковые грани — *прямоугольники*, а основания — *параллелограммы*.

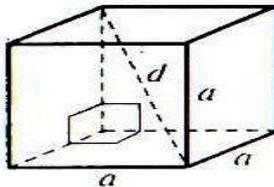


Прямоугольный параллелепипед: прямой параллелепипед, основания которого — *прямоугольники*.

Все диагонали равны.

Квадрат диагонали равен сумме квадратов ребер, исходящих из одной вершины: $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

$$S_{\text{полн}} = 2(ab + bc + ac); V = abc.$$



Куб:

все грани — квадраты.

Все ребра равны.

$$d = \sqrt{3}a, S_{\text{полн}} = 6a^2, V = a^3.$$

Формулы полной поверхности и объёма прямоугольного параллелепипеда

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

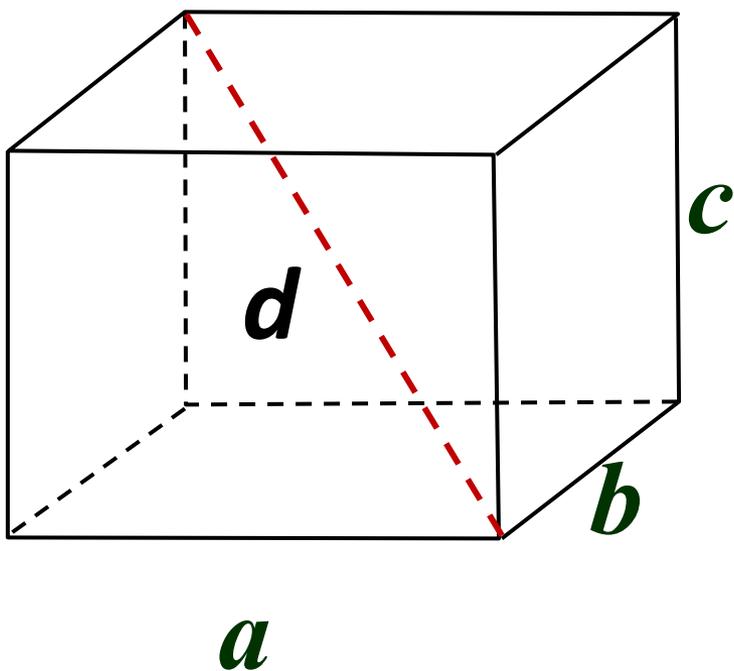
$$S_{\text{пов.}} = 2(ab + bc + ac)$$

$$V = a \cdot b \cdot c$$

$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$S_{\text{пов.}} = S_{\text{бок.}} + 2S_{\text{осн.}}$$

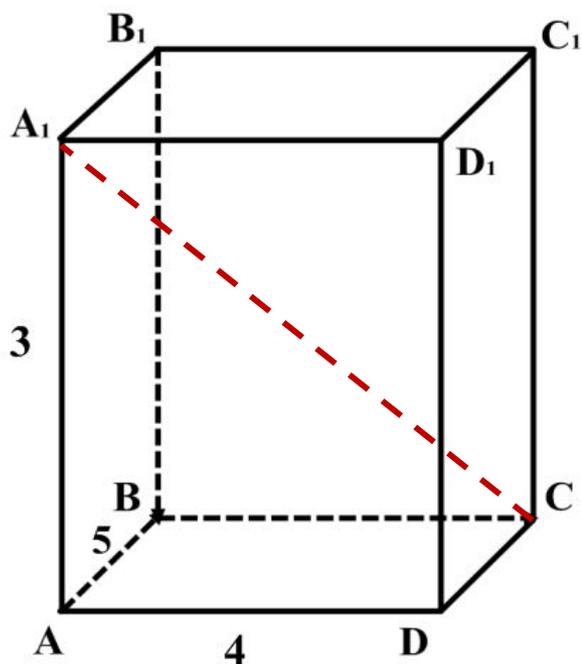
$$S_{\text{бок.}} = P_{\text{осн.}} \cdot h$$



№1.

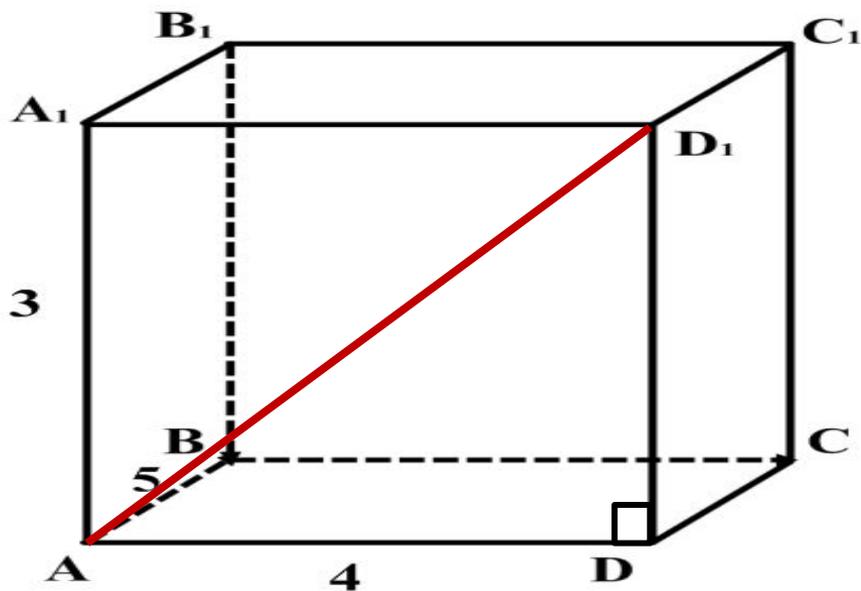
Найдите квадрат расстояния между вершинами C и A_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.

$$CA_1^2 = ?$$



$$CA_1^2 = 4^2 + 5^2 + 3^2 = 16 + 25 + 9 = 50.$$

№2. Найдите расстояние между вершинами A и D_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$.



$$AD_1 = ?$$

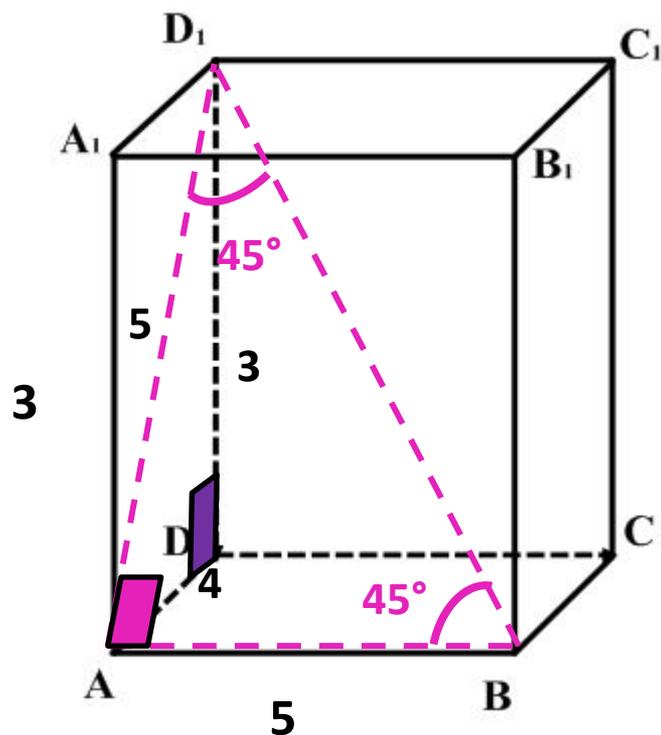
$$\text{В } \triangle AD_1D$$

$$\angle D = 90^\circ$$

$$AD_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

№3.

Найдите угол ABD_1 прямоугольного параллелепипеда, для которого $AB = 5$, $AD = 4$, $AA_1 = 3$. Ответ дайте в градусах.



$$ABD_1 = ?$$

$$\text{В } \triangle ADD_1 \quad \angle D = 90^\circ ;$$

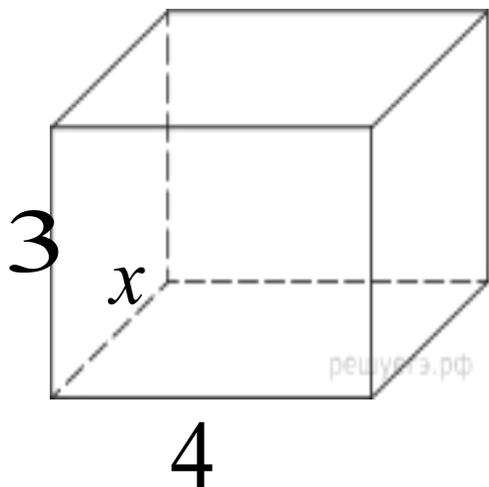
$$AD_1 = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5.$$

$$AD_1 = AB = 5;$$

$\triangle ADD_1$ - равнобедренный треугольник, $\angle A = 90^\circ$;

$$\angle D_1 = \angle B = 45^\circ; \quad \angle ABD_1 = 45^\circ.$$

№4. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 3 и 4. Площадь поверхности этого параллелепипеда равна 94. Найдите третье ребро, выходящее из той же вершины.



Пусть неизвестное ребро

$$S_{\text{пов.}} = 2(ab + bc + ac) = x$$

$$2(3 \cdot 4 + 3 \cdot X + 4 \cdot X) = 94$$

$$| :2$$

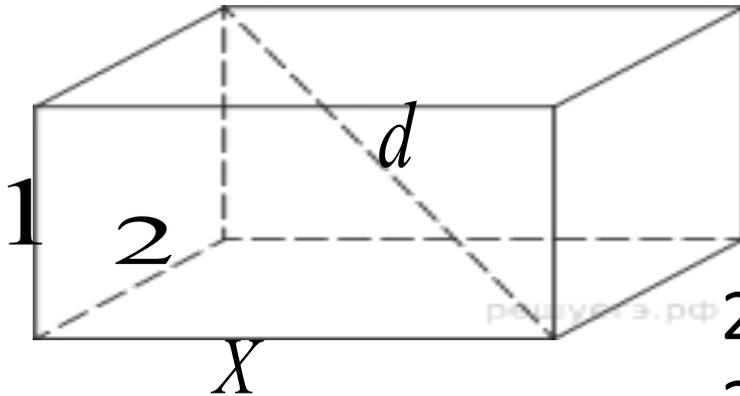
$$12 + 7X = 47$$

$$7X = 47 - 12 = 35$$

$$X = 35 : 7 = 5$$

Ответ: 5.

5. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 1, 2. Площадь поверхности параллелепипеда равна 16. Найдите его диагональ.



Пусть неизвестное ребро равно x
 $S_{\text{пов.}} = 2(ab + bc + ac)$

$$2(1 \cdot 2 + 1 \cdot X + 2 \cdot X) = 16 \quad | :2$$

$$2 + 3X = 8$$

$$3X = 8 - 2 = 6$$

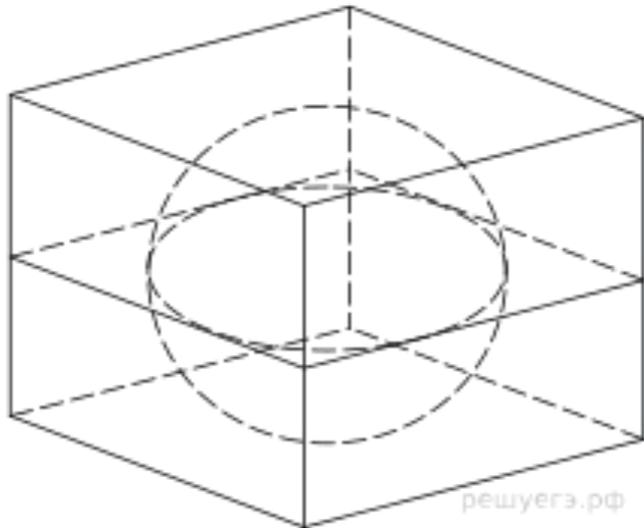
$$X = 6 : 3 = 2$$

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2$$

$$d = \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} = 3.$$

Ответ: 3

6. Прямоугольный параллелепипед описан около единичной сферы. Найдите его площадь поверхности



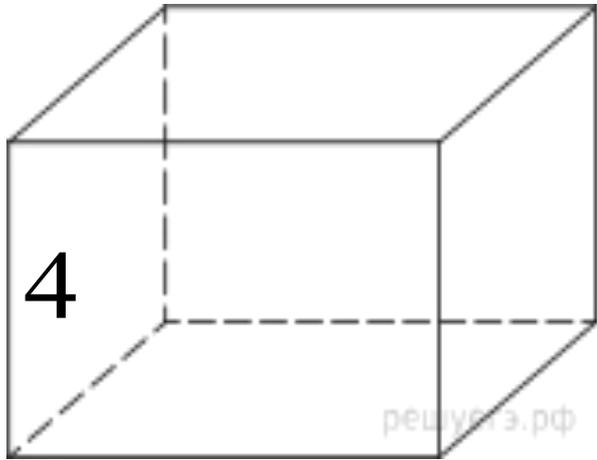
Т.к сфера единичная, то $R=1$.
Высота и рёбра такого параллелепипеда равны диаметру сферы, поэтому это куб с ребром 2.

$$S = 6a^2$$

$$S = 6 \cdot 2^2 = 6 \cdot 4 = 24$$

Ответ: 24.

7. Площадь грани прямоугольного параллелепипеда равна 12. Ребро, перпендикулярное этой грани, равно 4. Найдите объем параллелепипеда.



$$S_{\text{грани}} = S_{\text{осн}} = 12$$

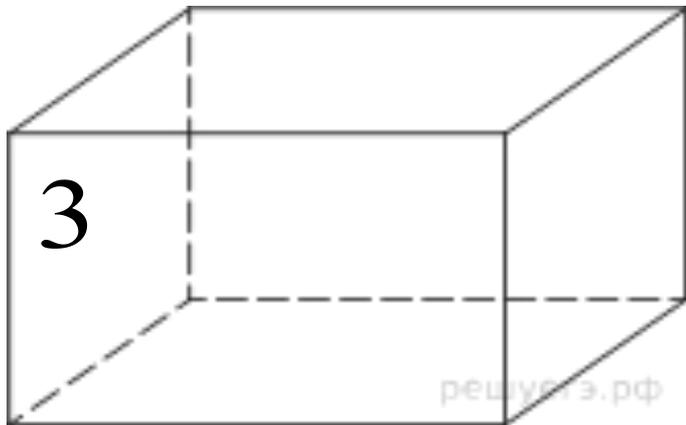
$$V = S_{\text{осн}} \cdot h$$

$$V = 12 \cdot 4 = 48$$

Ответ: 48.

8. Объем прямоугольного параллелепипеда равен 24. Одно из его ребер равно 3. Найдите площадь грани параллелепипеда, перпендикулярной этому ребру.

Объем прямоугольного параллелепипеда равен

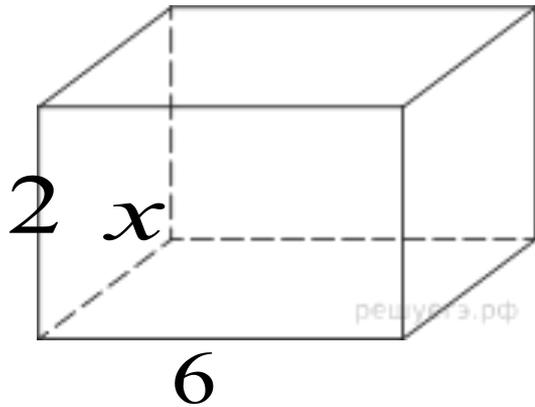


$$V = Sh$$

$$S = \frac{V}{h} = \frac{24}{3} = 8.$$

Ответ: 8.

9. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2 и 6. Объем параллелепипеда равен 48. Найдите третье ребро параллелепипеда, выходящее из той же вершины.



Пусть неизвестное ребро

равно x $V = 48$ $V = abc$

$$2 \cdot 6 \cdot x = 48$$

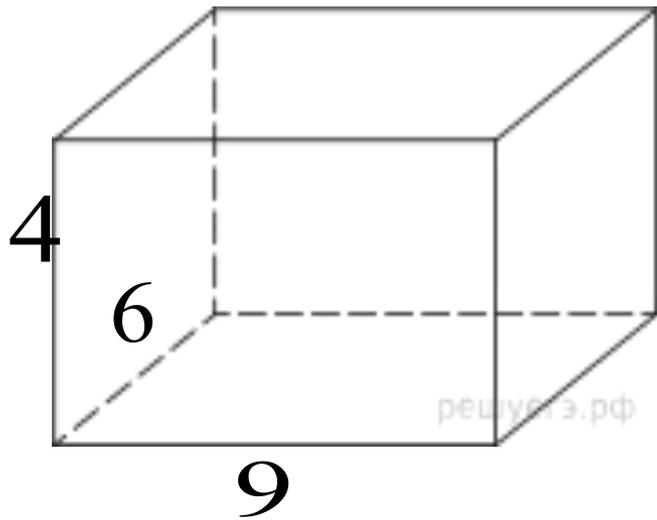
$$12x = 48,$$

$$x = 4.$$

Ответ:

4.

10. Три ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 4, 6, 9. Найдите ребро равновеликого ему куба.



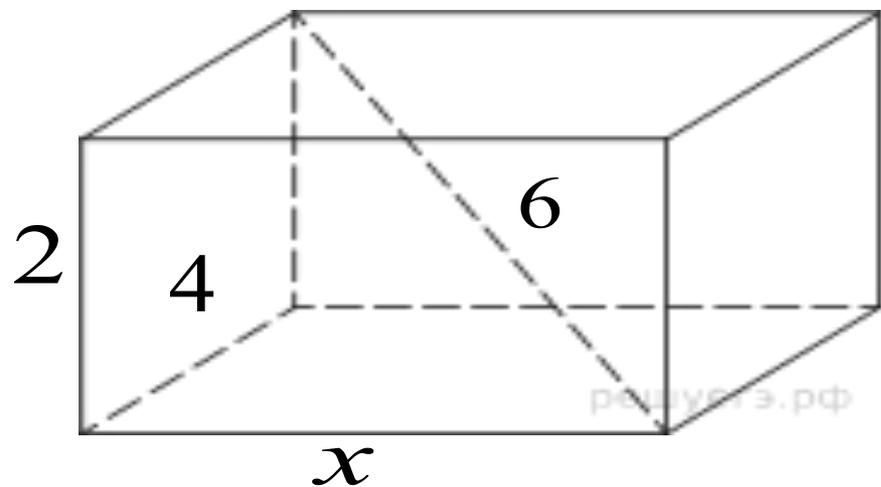
Объем куба $V = a^3$ равен
объему
параллелепипеда
 $V = 4 \cdot 6 \cdot 9 = 216$.
Значит для ребра куба
имеем:

$$a = \sqrt[3]{216} = 6.$$

Ответ:

6.

11. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4. Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите объем параллелепипеда.



Пусть неизвестное ребро равно x

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$d = \sqrt{2^2 + 4^2 + x^2}$$

=2

$$d = \sqrt{20 + x^2}$$

$$d^2 = 20 + x^2$$

$$x^2 = d^2 - 20$$

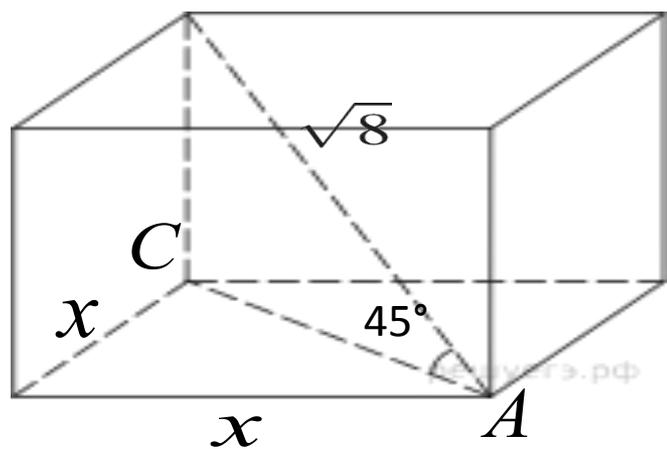
$$x = \sqrt{d^2 - 20} = \sqrt{6^2 - 20} = \sqrt{16} = 4$$

$$V = abc = 2 \cdot 4 \cdot 4 = 32$$

Ответ:

32.

12. Одна из граней параллелепипеда — квадрат. Диагональ параллелепипеда равна $\sqrt{8}$ и образует с плоскостью этой грани угол 45° . Найдите объем параллелепипеда.



ABC- прямоугольный и
 \triangle
 p/6

$$\sin 45^\circ = \frac{BC}{AB}$$

$$BC = AB \cdot \sin 45^\circ = \sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{16}}{2} = 2$$

$$BC = AC = 2$$

Основание — квадрат,
 а диагональ квадрата
 $AC = 2$

$$AC = \sqrt{x^2 + x^2} = 2 \Rightarrow \sqrt{2x^2} = 2$$

$$4 = 2x^2 \Rightarrow x^2 = 4 : 2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

$$V = Sh = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \cdot 2 = 2 \cdot 2 = 4$$

Ответ: 4.

13. Два ребра прямоугольного параллелепипеда, выходящие из одной вершины, равны 2, 4.

Диагональ параллелепипеда равна 6. Найдите

площадь поверхности параллелепипеда.

Пусть неизвестное ребро

равно x .

$$d = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

$$6 = \sqrt{2^2 + 4^2 + x^2}$$

$$6 = \sqrt{20 + x^2} \quad \Rightarrow \quad 36 = 20 + x^2$$

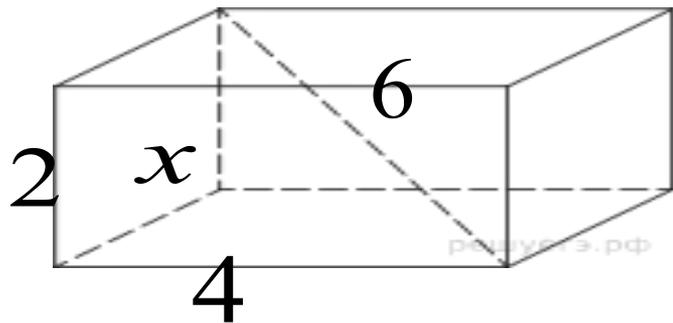
$$16 = x^2 \quad \Rightarrow \quad x = 4$$

$$S_{\text{пов.}} = 2(ab + bc + ac)$$

$$S = 2(2 \cdot 4 + 4 \cdot 4 + 2 \cdot 4) = 64$$

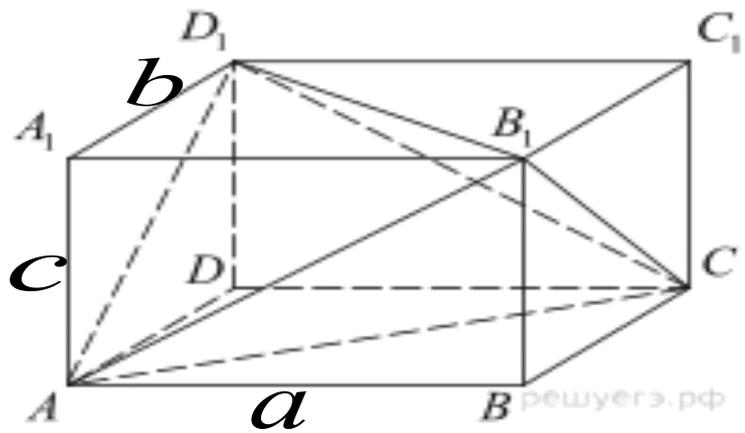
Ответ:

64.



14. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,5.

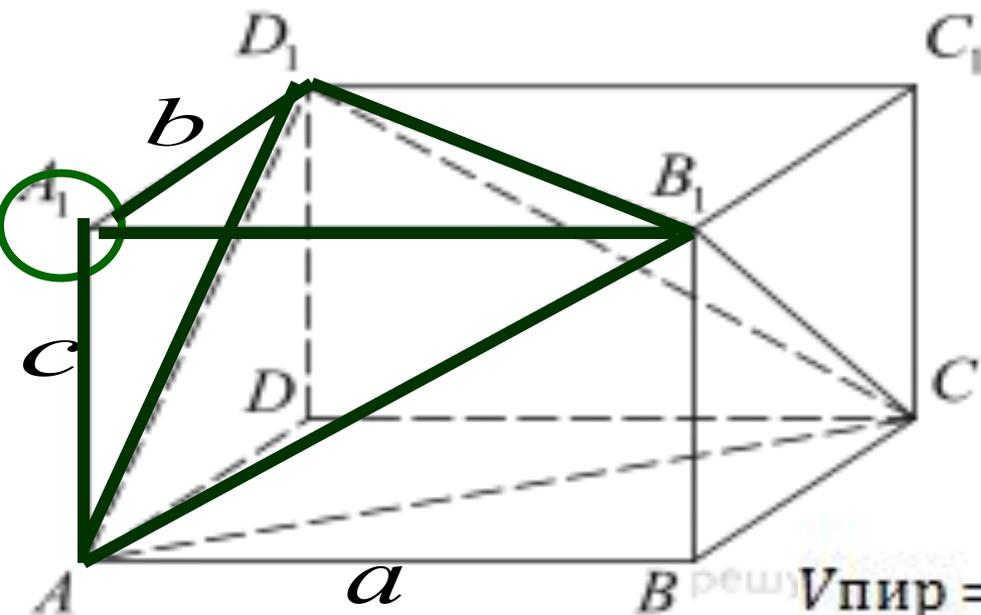
Найдите объем треугольной пирамиды $D_1 CB_1$.



$$V = 4,5 = abc$$

14. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,5.

Найдите объем треугольной пирамиды $CB_1 D_1$.

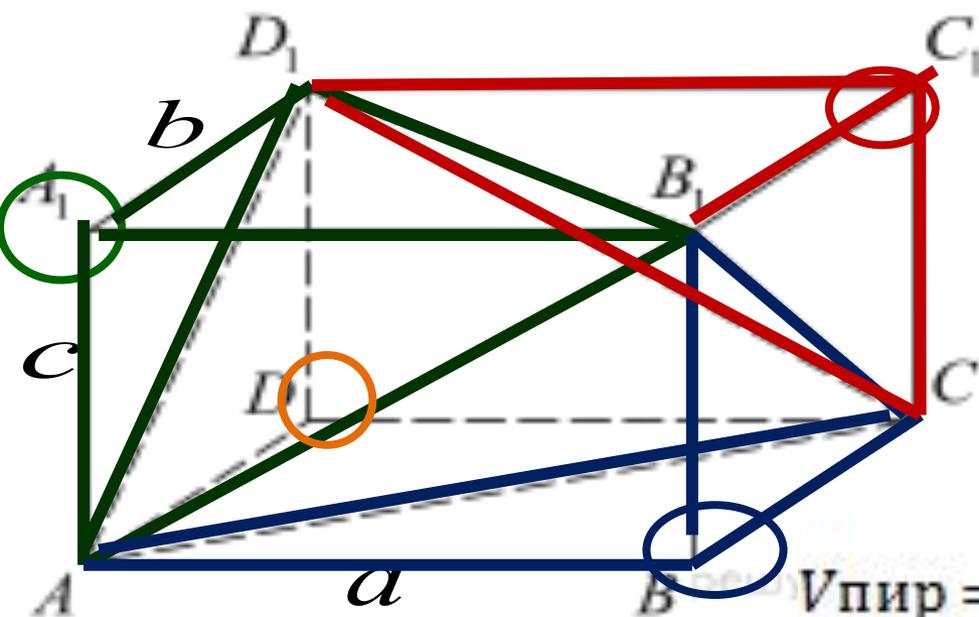


$$V = 4,5 = abc$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc$$

14. Объем параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$ равен 4,5.

Найдите объем треугольной пирамиды $D_1 C B_1$.



$$V = 4,5 = abc$$

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} abc = \frac{1}{6} abc$$

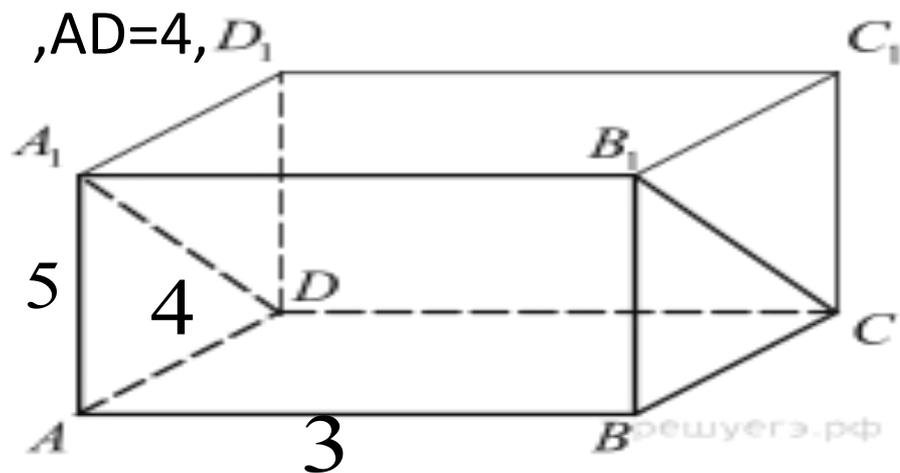
$$V_x = V - 4V_{\text{пир.}} = abc - 4 \cdot \frac{1}{6} abc = abc - \frac{2}{3} abc = \frac{1}{3} abc$$

$$V_x = \frac{1}{3} \cdot 4,5 = 1,5$$

Ответ:
1,5.

которого являются
точки A, D, A_1, B, C, B_1 прямоугольного
параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$

, у которого $AB=3$ $AA_1=5$.



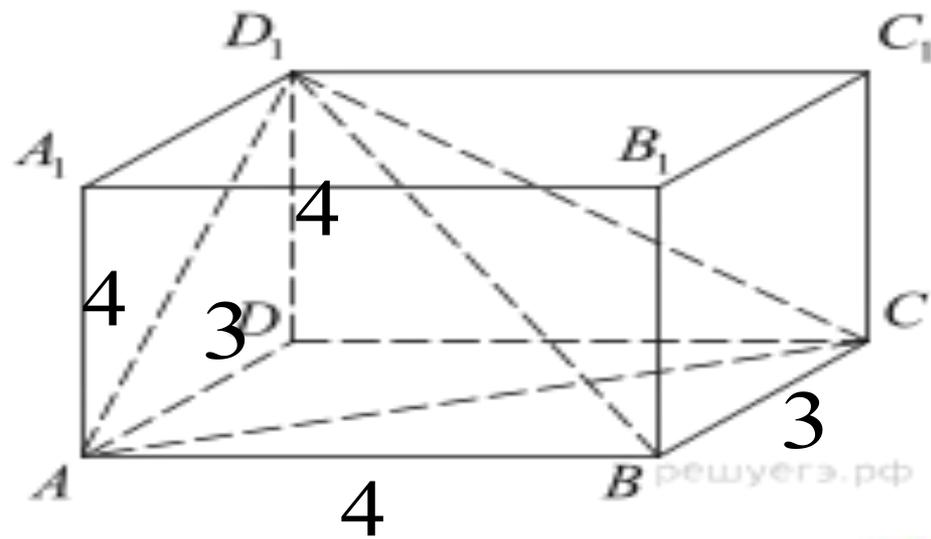
$$V = abc = 3 \cdot 4 \cdot 5 = 60$$

Из рисунка видно, что
многогранник является
половиной данного
прямоугольного
параллелепипеда.

$$V_x = \frac{1}{2} V = \frac{1}{2} \cdot 60 = 30$$

Ответ:
30.

16. Найдите объем многогранника, вершинами которого являются точки A, B, D, D_1 прямоугольного параллелепипеда $ABCD A_1 B_1 C_1 D_1$, у которого $AB=4, AD=3, AA_1=4$.



$$V_x = V_{\text{пир.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн.}} \cdot h$$

В основании пирамиды
прямоугольный треугольник
ABC

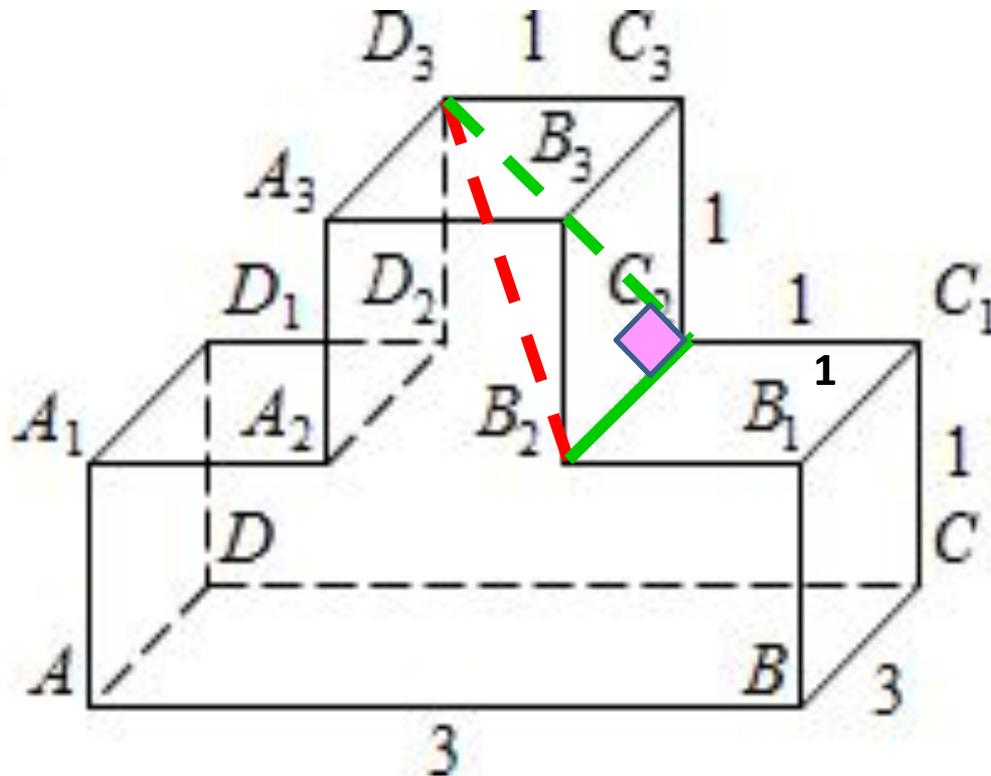
$$V_x = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3 \cdot 4 = \frac{1}{6} \cdot 48 = 8$$

Ответ:

8

№5. ОБЗ ЕГЭ №245376.

Найдите квадрат расстояния между вершинами B_2 и D_3 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые.



$\triangle C_2B_2D_3$ -
прямоугольный
треугольник.

$$B_2D_3^2 = (1^2 + 1^2) + 3^2 = 11.$$

Ответ: 11.

В 9

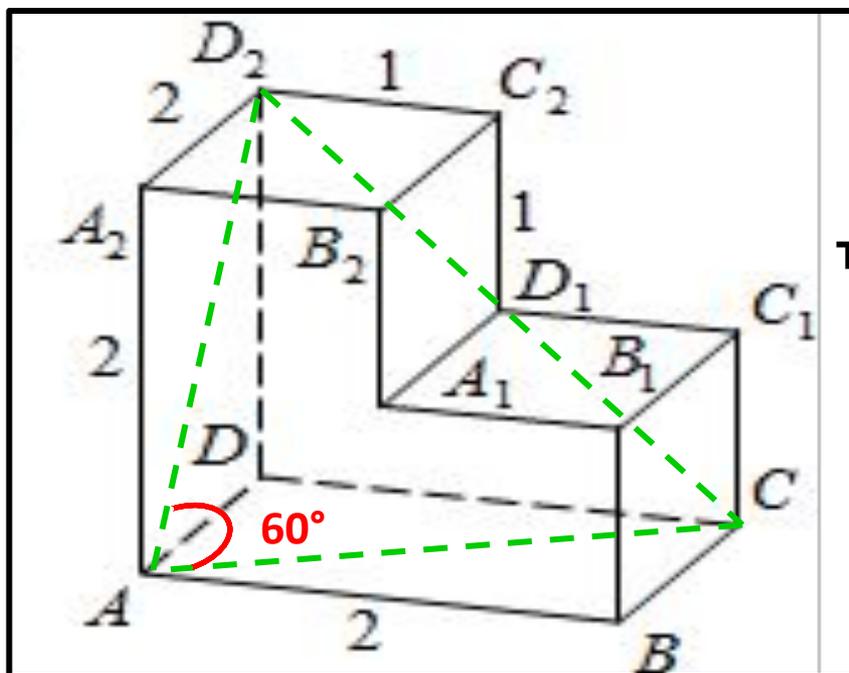
1 1

№ 6.

ОБЗ ЕГЭ №245373.

Найдите угол CAD_2 многогранника, изображенного на рисунке. Все двугранные углы многогранника прямые. Ответ дайте в градусах.

$AD_2 = CD_2 = CA$ - диагонали
равных квадратов .



$\triangle CAD_2$ - равносторонний
треугольник.

\angle

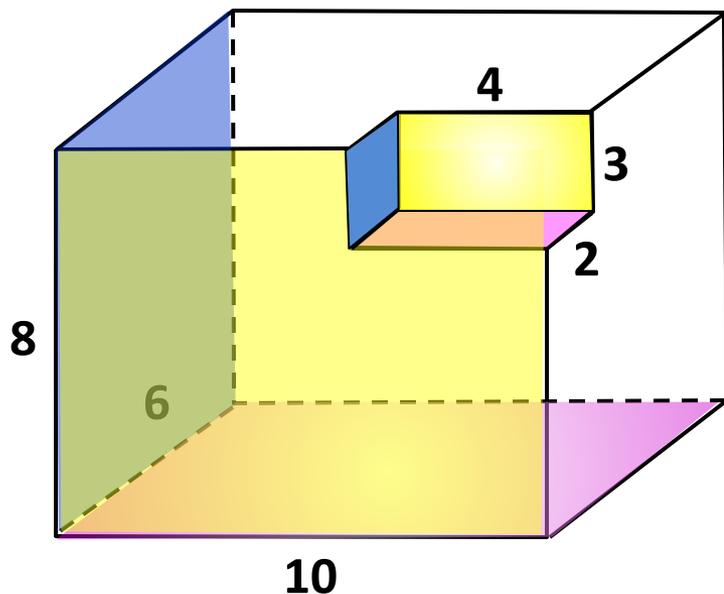
$$CAD_2 = 60^\circ.$$

Ответ:60

В 9

6 0

№ 7. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).

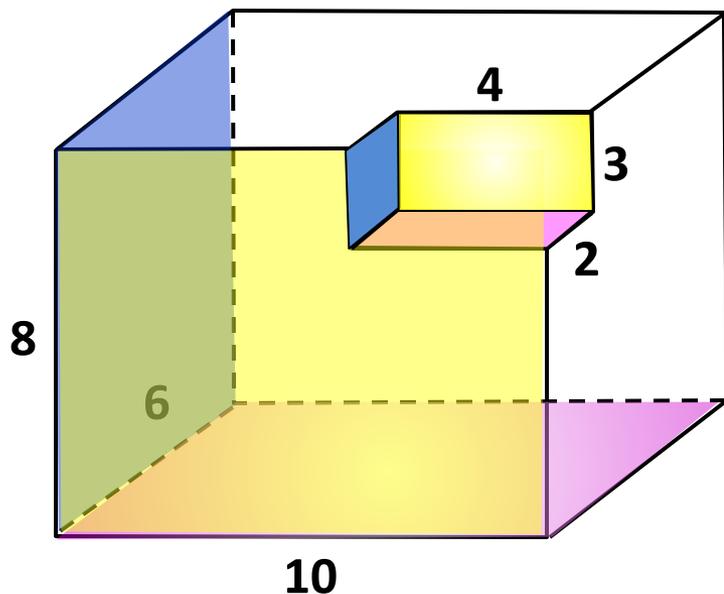


Площадь поверхности данной фигуры будет равна площади поверхности прямоугольного параллелепипеда.

$$S_{mn} = 2(8 \cdot 10 + 8 \cdot 6 + 6 \cdot 10) = 188$$

В 9	1	8	8			
------------	----------	----------	----------	--	--	--

№8. Найдите объём многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



$$V_1 = 8 \cdot 10 \cdot 6 = 480$$

$$\{8; 6; 10\}$$

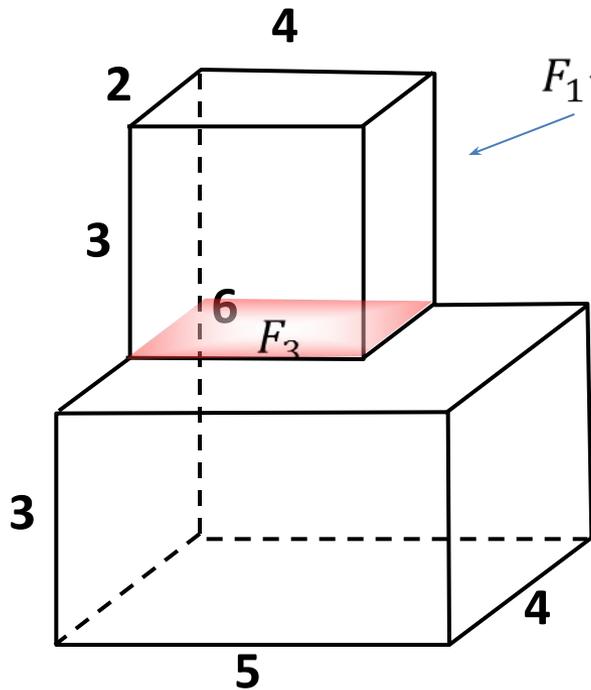
$$V_2 = 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$$

$$\{2; 3; 4\}$$

$$V = V_1 - V_2 = 480 - 24 = 456$$

В 9	4	5	6			
-----	---	---	---	--	--	--

№9. Найдите площадь поверхности многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



$F_1\{3,2,4\}$

$$S_1 = 2 \cdot (3 \cdot 2 + 2 \cdot 4 + 4 \cdot 3) = 52$$

$F_2\{3,5,4\}$

$$S_2 = 2 \cdot (3 \cdot 5 + 5 \cdot 4 + 4 \cdot 3) = 94$$

$F_3\{2,4\}$

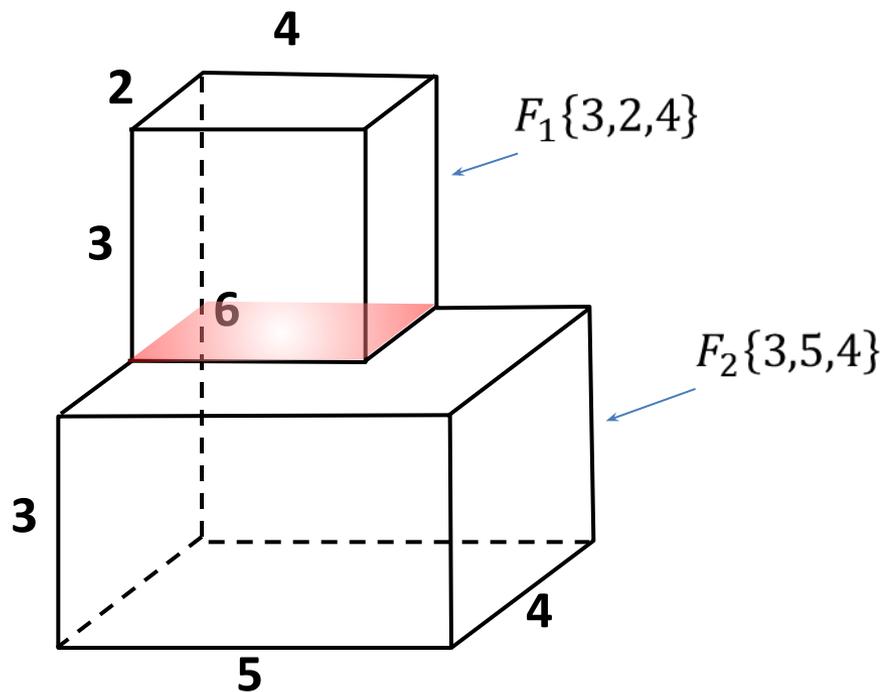
$$S_3 = 2 \cdot 4 = 8$$

$$S = S_1 + S_2 - 2 \cdot S_3 = 52 + 94 - 2 \cdot 8 = 130$$

В 9

1 3 0

№10. Найдите объём многогранника, изображенного на рисунке (все двугранные углы прямые).



$$V_1 = 3 \cdot 2 \cdot 4 = 24$$

$$V_2 = 3 \cdot 5 \cdot 4 = 60$$

$$V = V_1 + V_2 = 24 + 60 = 84$$

В 9	8	4				
------------	----------	----------	--	--	--	--

Домашнее задание

№1-10.

Приложение 3.