



Распределение непрерывных случайных величин

Случайна величина X называется непрерывной, если невозможно перечислить все ее значения





Распределение непрерывных случайных величин

Случайная величина X называется непрерывной, если невозможно перечислить все ее значения

Например, X – время работы электролампочки до перегорания

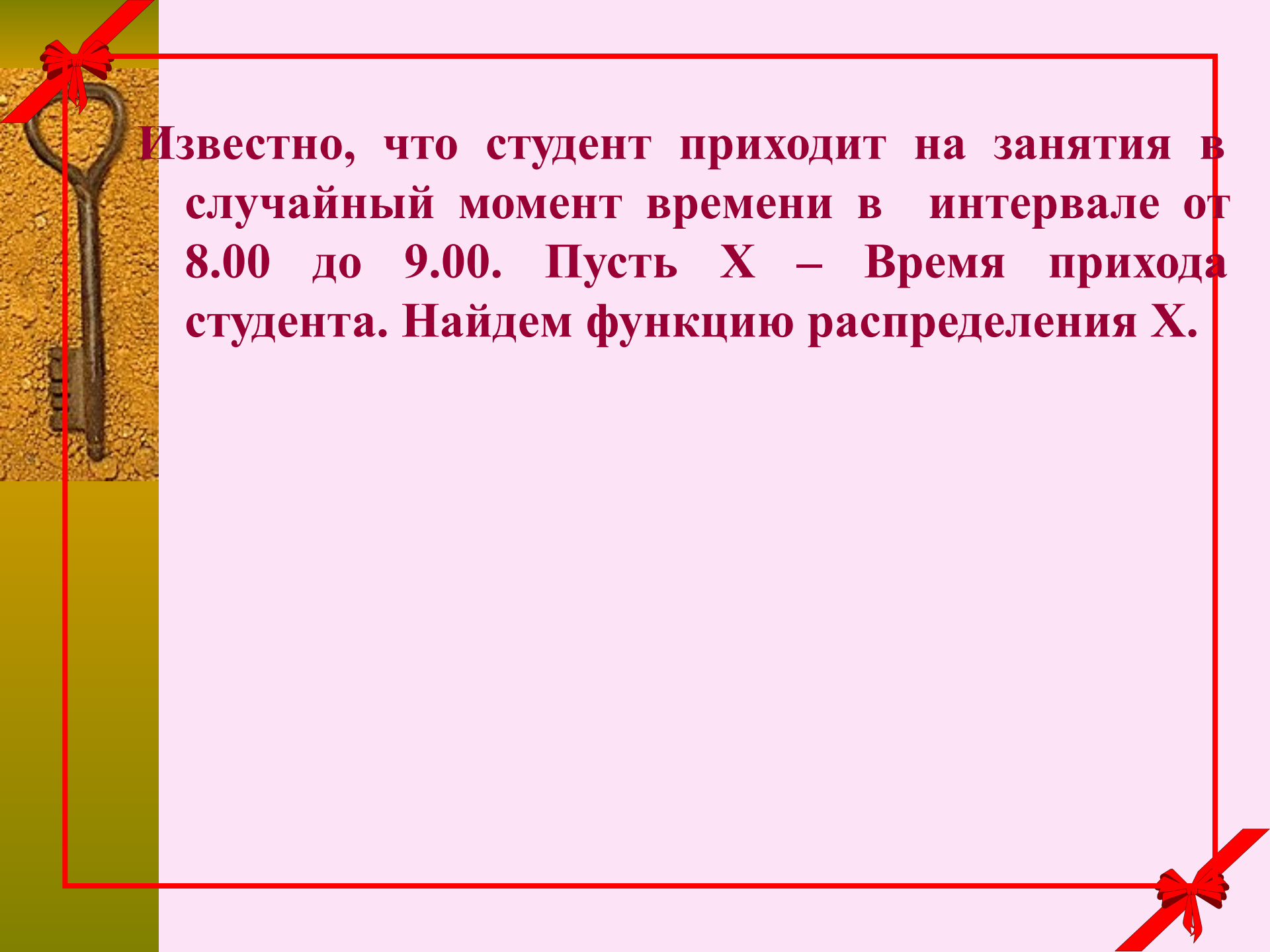
X – рост случайно выбранного человека

17. Распределение непрерывных случайных величин


Вместо вероятности того, что случайная величина X примет значение, равное x , т.е. $p(X=x)$, рассматривают $P(X < x)$

$$F(x) = P(X < x)$$

Функция распределения

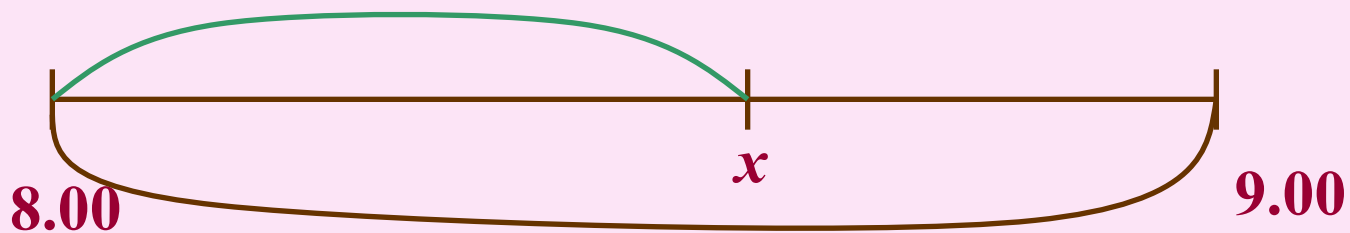


Известно, что студент приходит на занятия в случайный момент времени в интервале от 8.00 до 9.00. Пусть X – Время прихода студента. Найдем функцию распределения X .




$$F(x) = P(X < x)$$


событие $X < x$



Ω


$$F(x) = \frac{(x - 8)}{1} = x - 8 \quad \text{если} \quad x \in [8; 9]$$


$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \leq 8$$




$$F(x) = P(X < x)$$

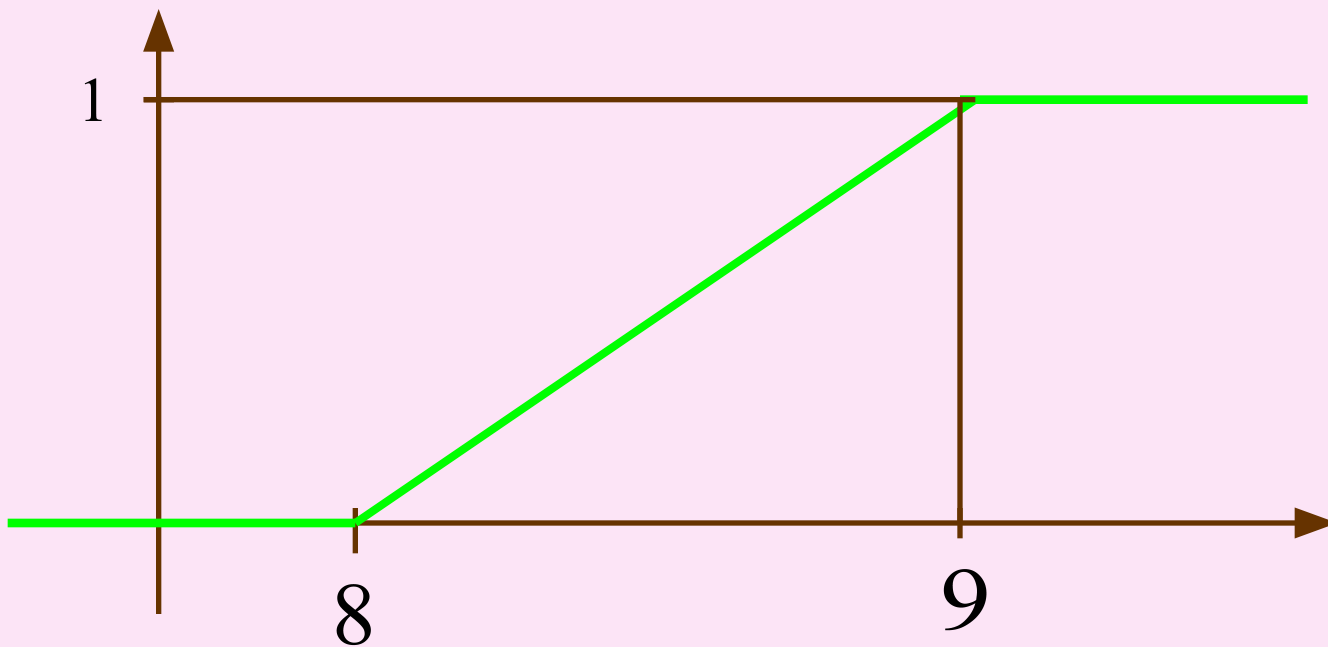
$$F(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \leq 8$$


$$F(x) = 1 \quad \text{если} \quad x > 9$$



$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 8 \\ x - 8, & x \in (8; 9] \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$


$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 8 \\ x - 8, & x \in [8; 9] \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$



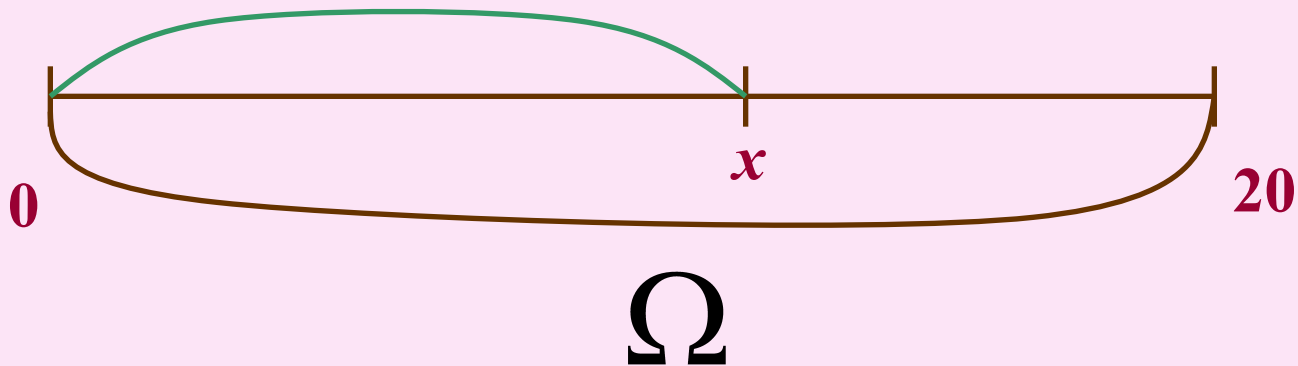


Автобусы ходят с интервалом 20 минут. Пассажир подходит к остановке в случайный момент времени. Пусть X – время ожидания автобуса пассажиром.

Найти функцию распределения X и построить ее график.


$$F(x) = P(X < x)$$

событие $X < x$



$$F(x) = \frac{x}{20} \quad \text{если } x \in [0; 20]$$



$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \leq 0$$





$$F(x) = P(X < x)$$

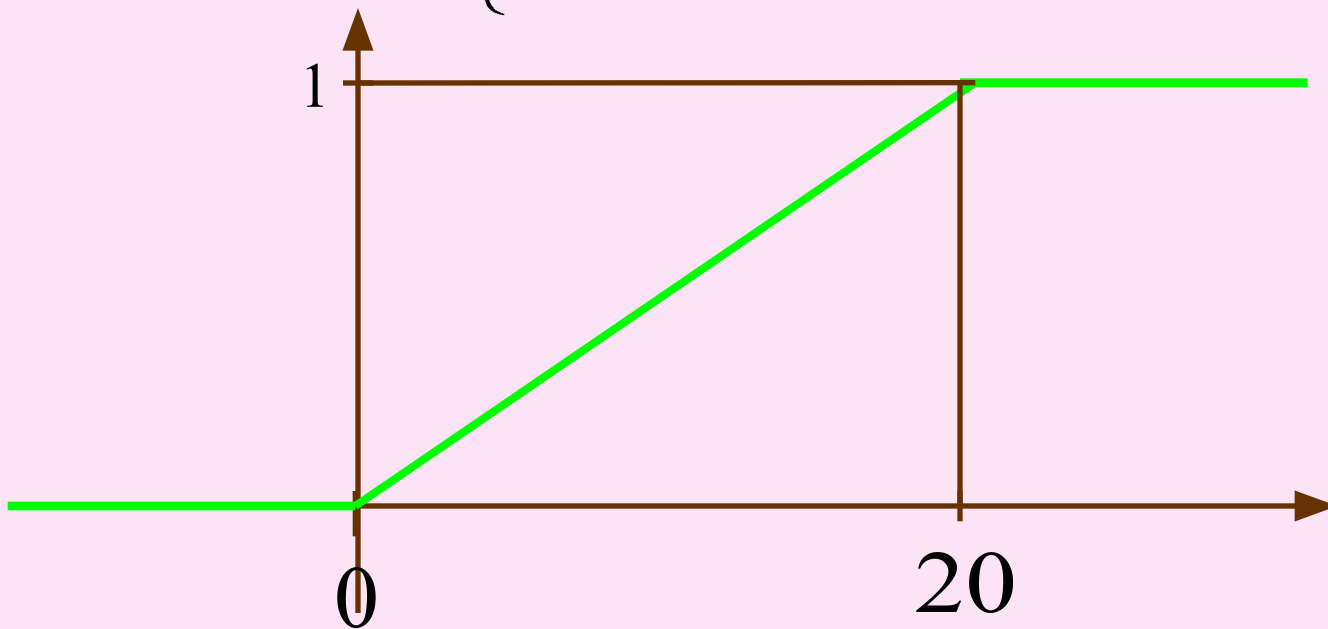
$$F(x) = 0 \quad \text{если} \quad x \leq 0$$

$$F(x) = 1 \quad \text{если} \quad x > 20$$


$$F(x) = P(X < x)$$

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{20}, & x \in (0; 20] \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$


$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{20}, & x \in (0; 20] \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$



свойства функции распределения

1

Функция распределения является неубывающей функцией. Для любых $x_1 < x_2$ выполнено

$$F(x_1) < F(x_2)$$

*На минус бесконечности функция
распределения равна нулю:*

$$F(-\infty) = 0$$


*На плюс бесконечности функция
распределения равна единице:*

$$F(+\infty) = 1$$

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = F(\beta) - F(\alpha)$$

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ СВ НА ЗАДАННЫЙ ИНТЕРВАЛ

$$p(X > \beta) = 1 - F(\beta)$$



Пример Используя функцию распределения величины X – Время прихода студента на лекцию, найти вероятность того, что он прибудет в интервал времени от 8.30 до 8.40.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 8 \\ x - 8, & x \in [8; 9] \\ 1, & x > 9 \end{cases}$$






Рассмотрим непрерывную случайную
величину X с функцией распределения $F(x)$.

Вычислим вероятность попадания этой
случайной величины на промежуток

$$[x; x + \Delta x]$$





Рассмотрим непрерывную случайную величину X с функцией распределения $F(x)$.

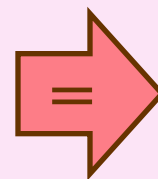
Вычислим вероятность попадания этой случайной величины на промежуток

$$[x; x + \Delta x]$$

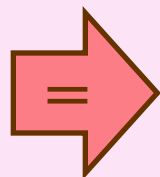
$$p(x \leq X \leq x + \Delta x) = F(x + \Delta x) - F(x)$$

Рассмотрим предел

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$




По определению производной этот предел равен производной функции $F(x)$:




$$F'(x) = f(x)$$

Функция $f(x)$, равная производной от функции распределения, называется плотностью вероятности случайной величины X .


$$f(x) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$\begin{aligned} f(x)\Delta x &\approx F(x + \Delta x) - F(x) = \\ &= P(x \leq X \leq x + \Delta x) \end{aligned}$$

При малых Δx величина $f(x)\Delta x$
приблизительно показывает вероятность попадания в

$$[x; x + \Delta x]$$




Пример Дана функция распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{20}, & x \in (0; 20] \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$


Найти плотность распределения

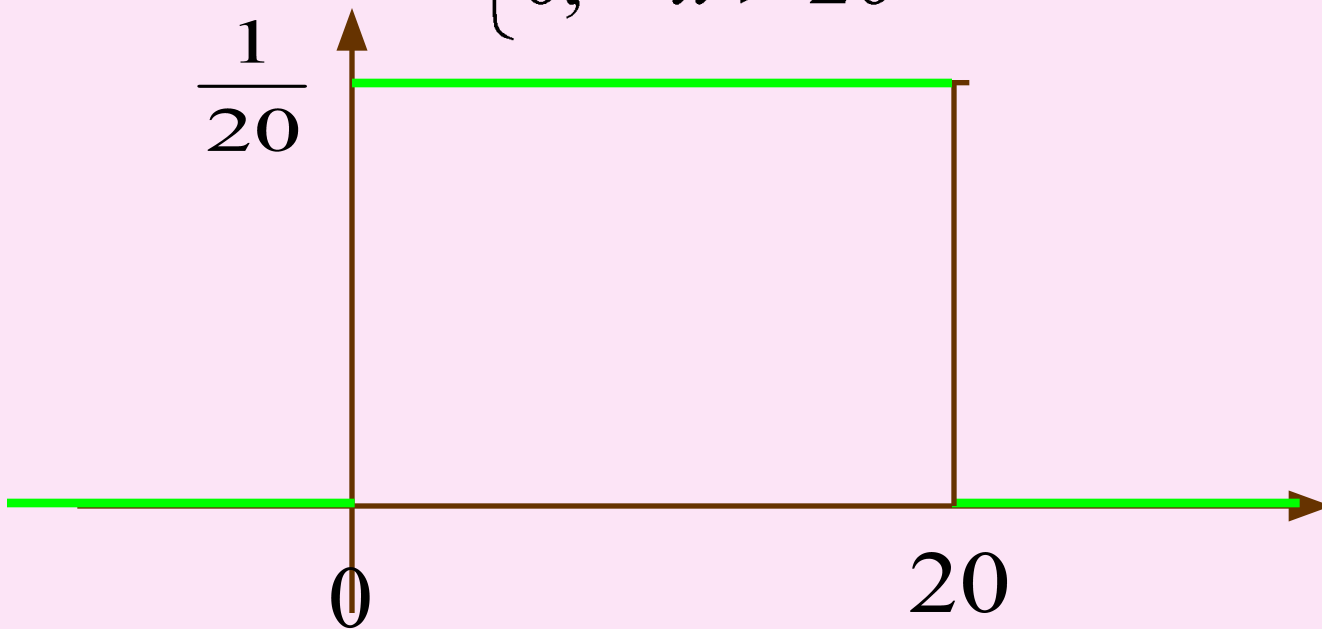


Пример Дана функция распределения.

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{x}{20}, & x \in (0; 20] \\ 1, & x > 20 \end{cases}$$

$$f(x) = F'(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{20}, & x \in (0; 20] \\ 0, & x > 20 \end{cases}$$


$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \frac{1}{20}, & x \in (0; 20] \\ 0, & x > 20 \end{cases}$$



СВОЙСТВА ПЛОТНОСТИ ВЕРОЯТНОСТИ

1

Плотность вероятности является неотрицательной функцией

$$f(x) \geq 0$$



2

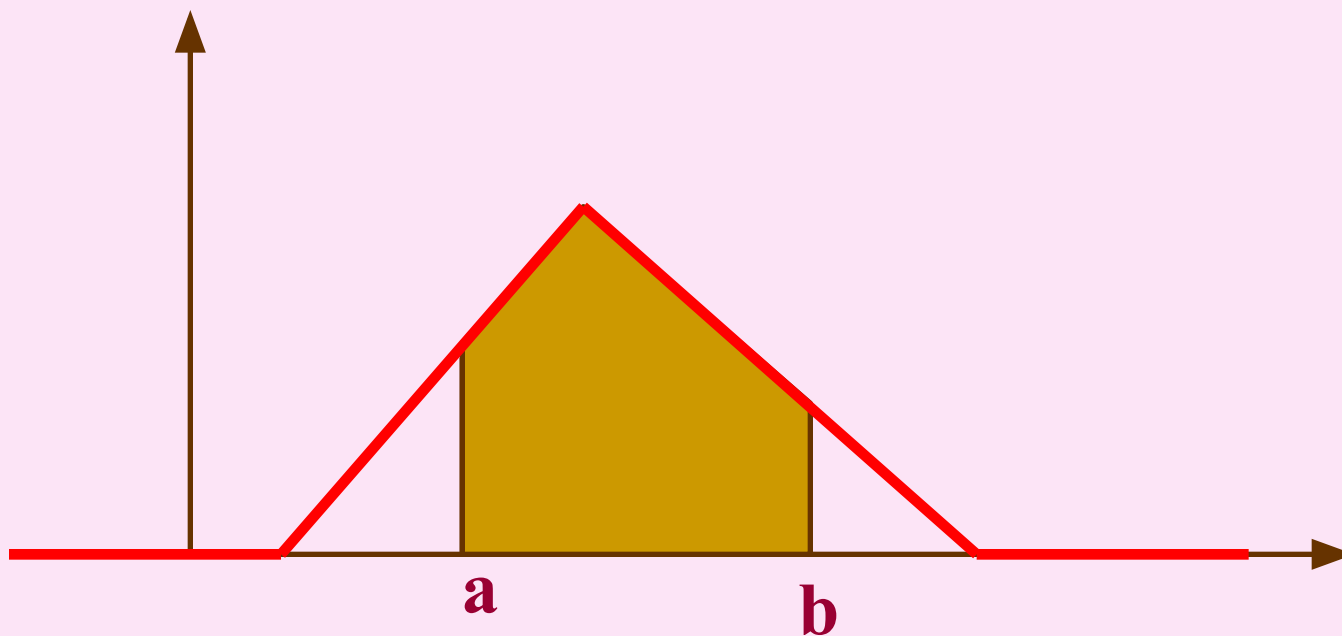
**Вероятность попадания случайной величины
в отрезок**

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} f(x) dx$$





Вероятность попадания случайной величины в отрезок равна площади под графиком плотности распределения на этом отрезке



*Интеграл в бесконечных пределах
от плотности вероятности равен 1:*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$