

Нелинейные регрессионные модели

Линейные регрессионные модели

$$y = \beta_0 + \beta_1 x -$$

модель линейной парной регрессии

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k -$$

модель линейной множественной регрессии

Примеры нелинейных регрессионных моделей

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$ – логарифмическая модель

$\left. \begin{array}{l} \ln y = \beta_0 + \beta_1 x \\ y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \end{array} \right\}$ полулогарифмические модели

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ – квадратичная функция

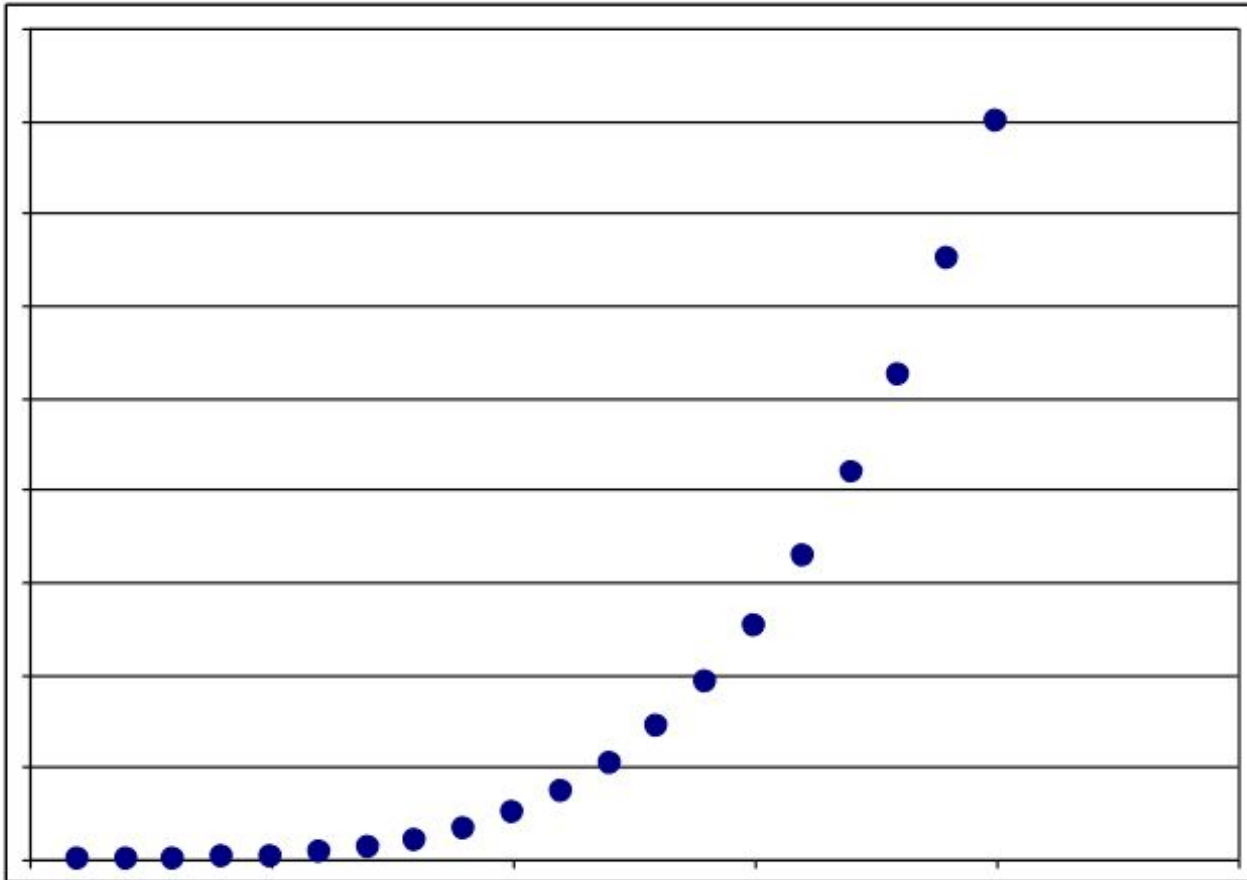
Как определить нелинейную зависимость?

- 1) Построить график (диаграмму рассеяния)
- 2) Теоретические предпосылки (экономическая теория)
- 3) Логические рассуждения
- 4) Статистические критерии

Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

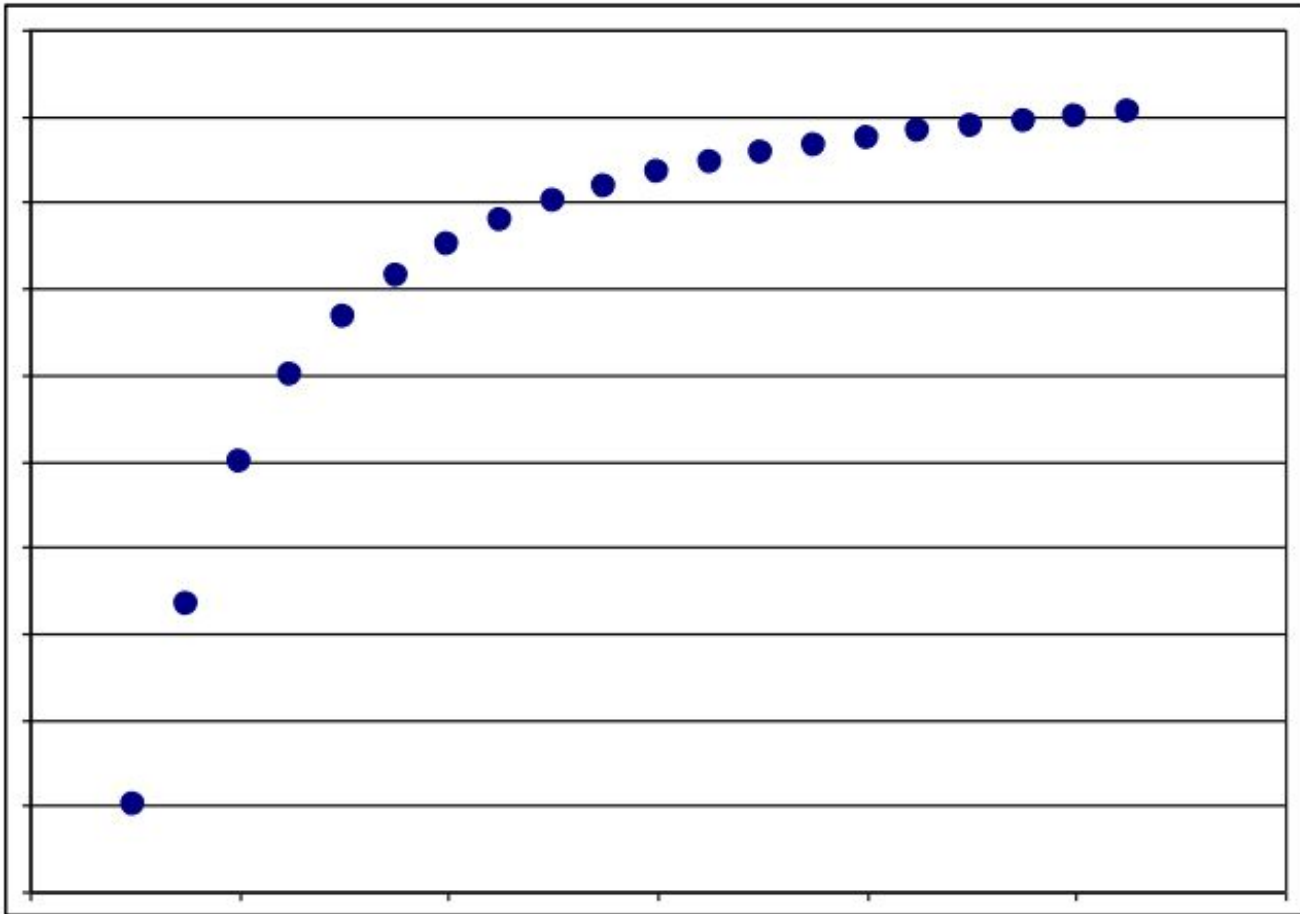
$$\alpha > 1$$



Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

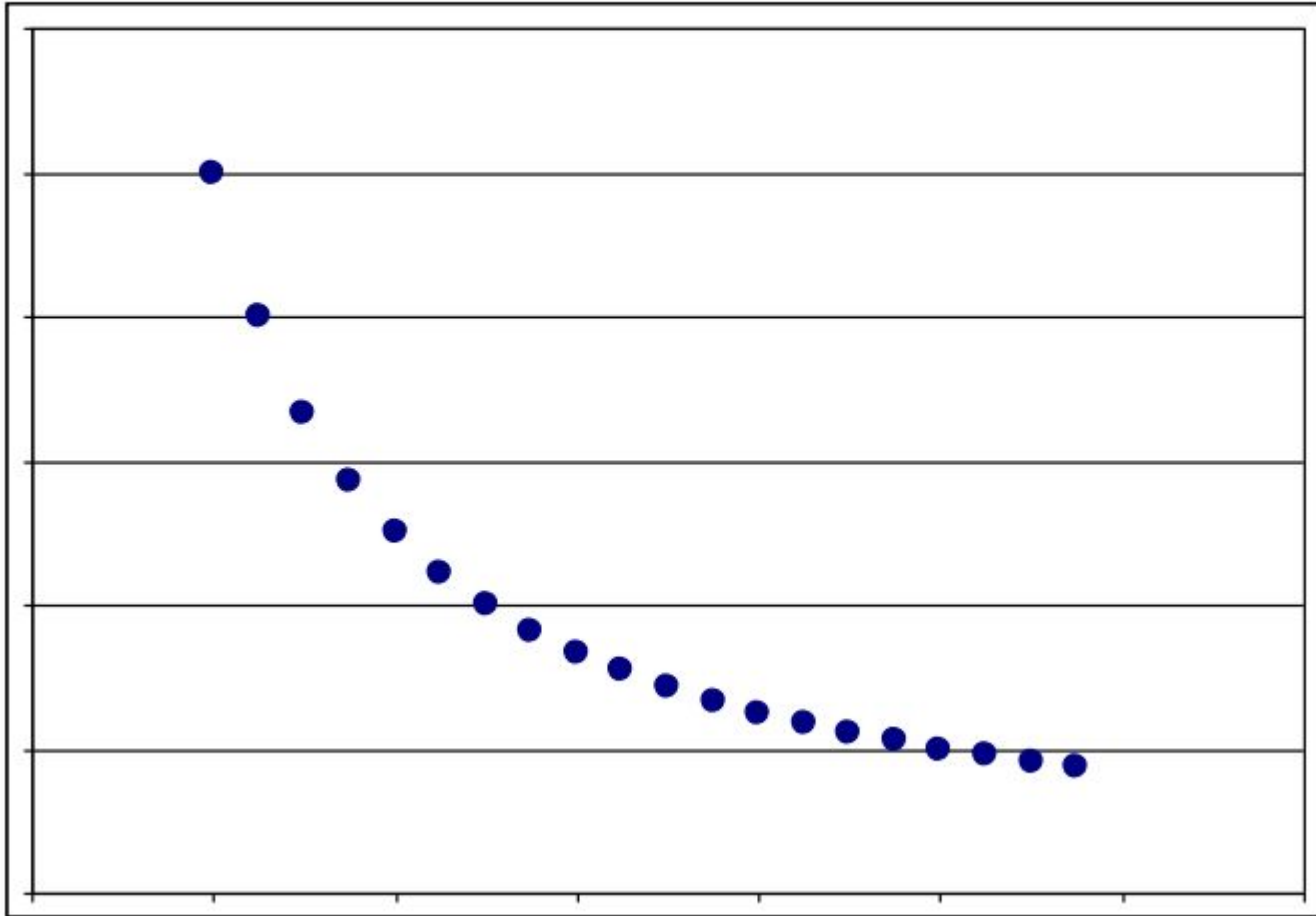
$$0 < \alpha < 1$$



Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

$$\alpha < 0$$



Логарифмическая модель

Как, используя метод наименьших квадратов, оценить параметры такой модели?

$$y = Ax^\alpha$$

Нужно сделать ее линейной по параметрам:

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln x$$

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Логарифмическая модель

Интерпретация коэффициентов

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 \frac{dx}{x} \quad (\text{вспомним, что } (\ln x)' = \frac{1}{x})$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{y} - \text{относительное изменение } y \text{ (в долях)} \\ \frac{\Delta x}{x} - \text{относительное изменение } x \text{ (в долях)} \end{array} \right\} \text{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x} \text{ (приближенная формула)}$$

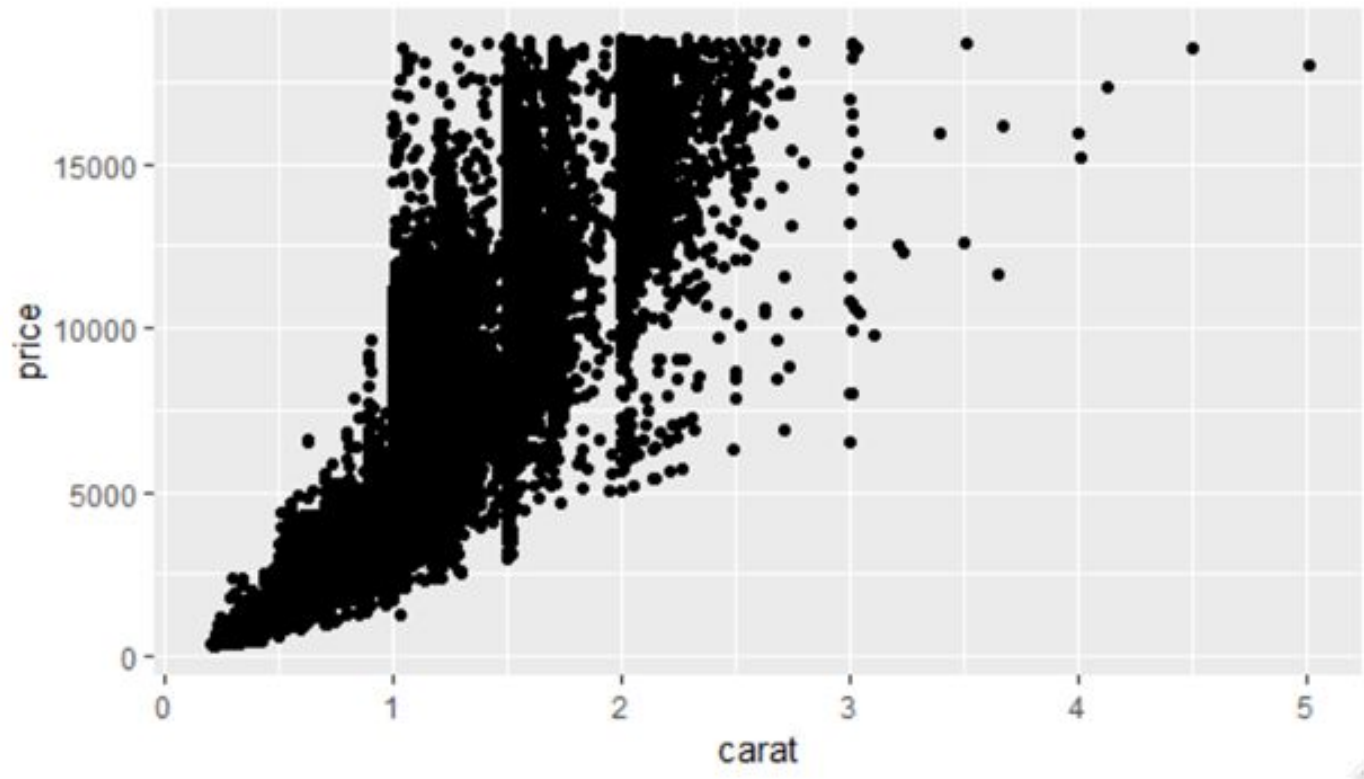
$$\text{Если } x \text{ увеличивается на } 1\%, \text{ то } \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100}$$

Соответственно, если β_1 положительное, то при увеличении x на 1% y увеличится на $\beta_1\%$.

β_1 – это эластичность y по x

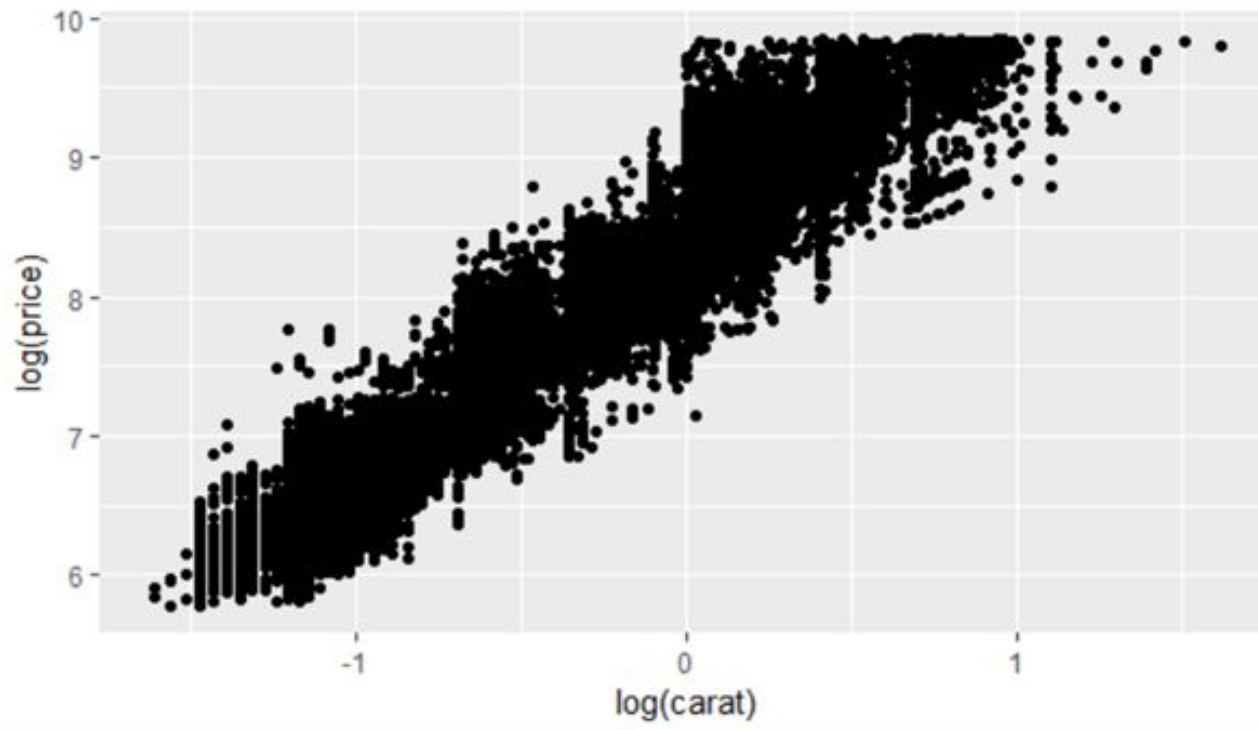
Логарифмическая модель

Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



Логарифмическая модель

Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

Экспоненциальная зависимость

$$y = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

Прологарифмируем обе части уравнения.

Получим

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) МОДЕЛЬ

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 dx \quad (\text{вспомним, что } (\ln y)' = \frac{1}{y}, (x)' = 1)$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{y} - \text{относительное изменение } y \text{ (в долях)} \\ \Delta x - \text{абсолютное изменение } x \end{array} \right\} \text{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \Delta x \text{ (приближенная формула)}$$

Соответственно, если β_1 положительное, то при увеличении x на 1 единицу y увеличится на $100 \cdot \beta_1\%$.

Замечание: если $\beta_1 > 0,1$ то лучше пользоваться не приближенными вычислениями, а точными.

Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

Пример

Моделирование экономического роста

$$\ln GDP_t = 4,2 + 0,03t$$

Увеличение t на единицу \Rightarrow
увеличение **GDP** на $(100*0,03)\%$

Темп прироста ВВП составляет 3% в год

Полулогарифмическая (линейно-логарифмическая) модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$dy = \beta_1 \frac{dx}{x} \quad (\text{вспомним, что } (\ln x)' = \frac{1}{x}, (y)' = 1)$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

Δy – абсолютное изменение y

$\frac{\Delta x}{x}$ – относительное изменение x (в долях)

Получаем: $\Delta y \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x}$ (приближенная формула)

Если x увеличивается на 1%, то $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100}$

Соответственно, если β_1 положительное, то при увеличении x на 1% y увеличится на $\frac{\beta_1}{100}$ единиц.

Полиномы относительно регрессоров

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$



Сравнение нелинейных моделей

Модели вида

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{и} \quad \ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

*некорректно сравнивать, используя R^2 ,
т.к. зависимые переменные разные*

Сравнение нелинейных моделей

Модели вида

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{и} \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + \varepsilon_i$$

можно сравнивать, используя R^2 ,

т. к. зависимая переменная одна и та же