Нелинейные регрессионные модели

Линейные регрессионные модели

$$y = \beta_0 + \beta_1 x -$$

модель линейной парной регрессии

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots \beta_k x_k -$$

модель линейной множественной регрессии

Примеры нелинейных регрессионных моделей

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$ – *логарифмическая модель*

$$\left.\begin{aligned} \ln y &= \beta_0 + \beta_1 x \\ y &= \beta_0 + \beta_1 \ln x \end{aligned}\right\} \text{полулогарифмические модели}$$

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$ – *квадратичная функция*

Как определить нелинейную зависимость?

1) *Построить график (диаграмму рассеяния)*

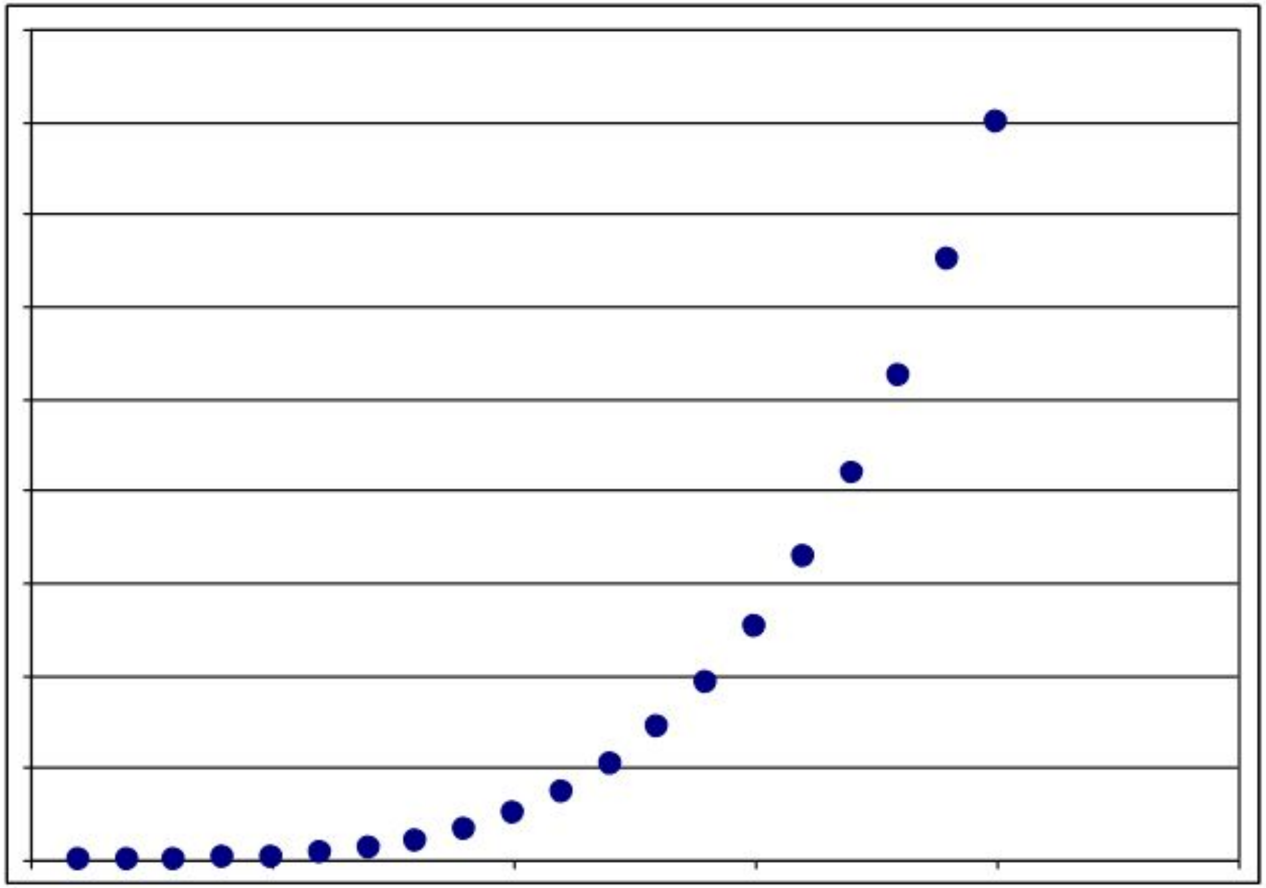
2) *Теоретические предпосылки (экономическая теория)*

3) *Логические рассуждения*

4) *Статистические критерии*

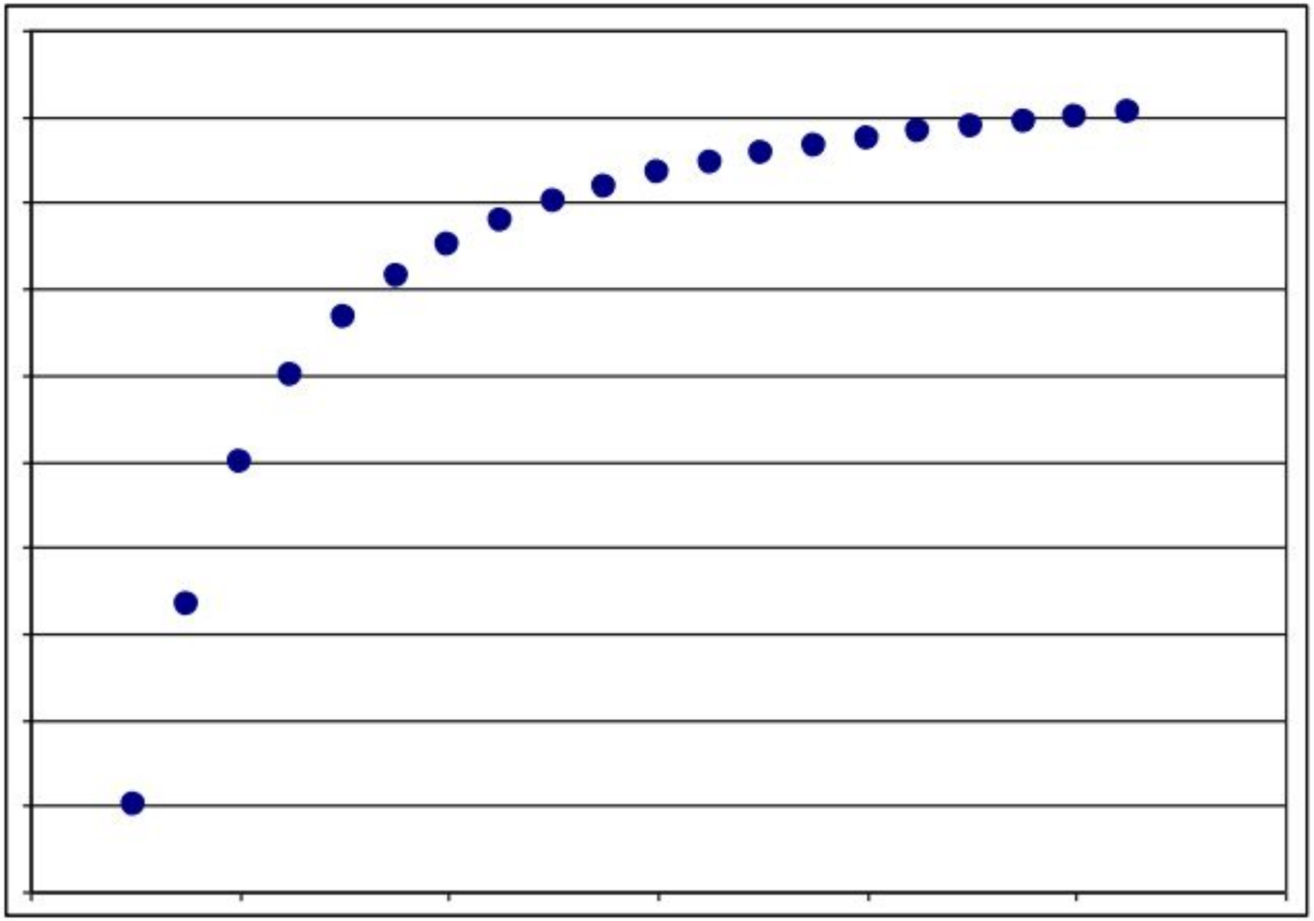
Логарифмическая модель

$$y = Ax^{\alpha} \qquad \boxed{\alpha > 1}$$



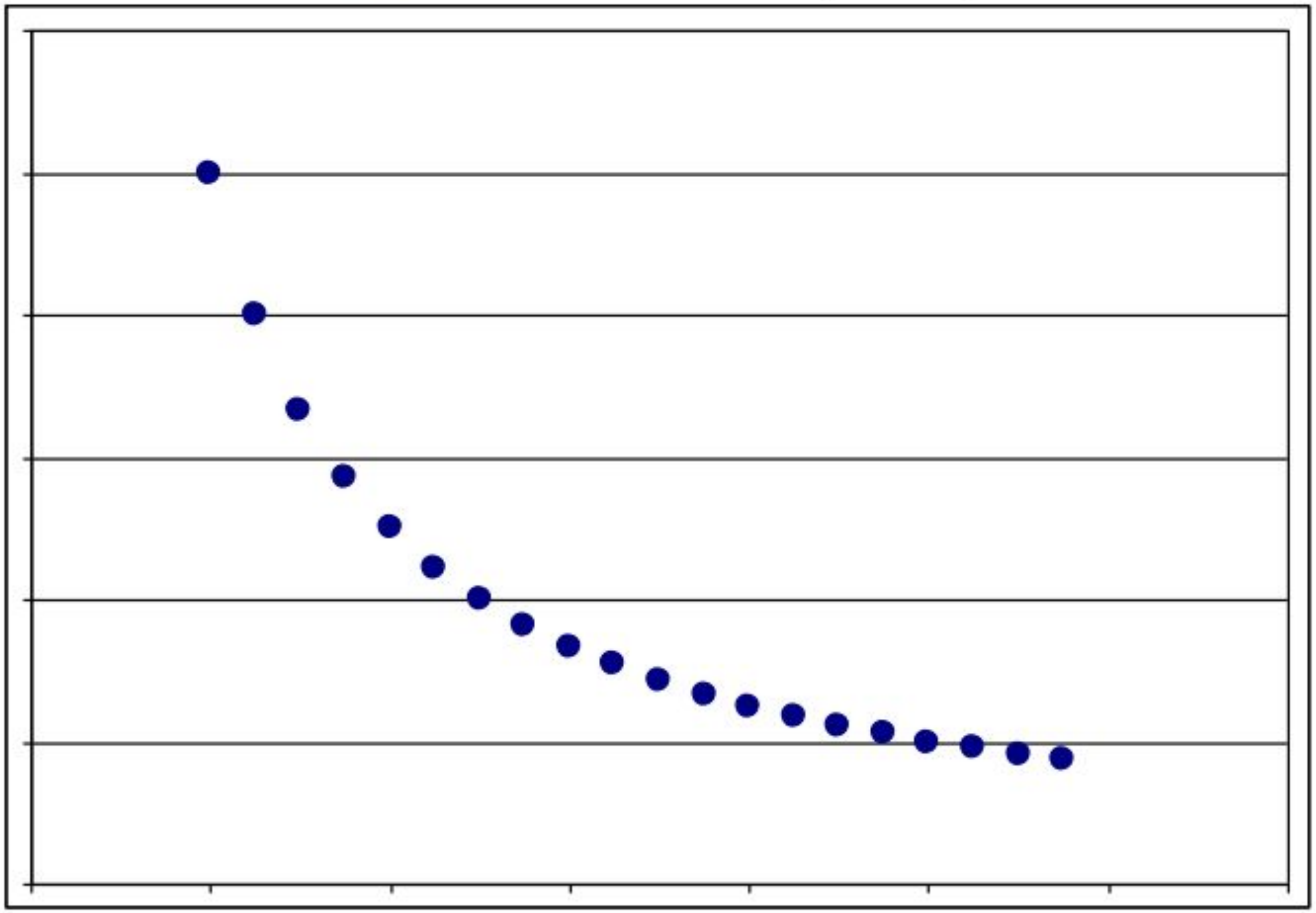
Логарифмическая модель

$$y = Ax^{\alpha} \qquad \boxed{0 < \alpha < 1}$$



Логарифмическая модель

$$y = Ax^{\alpha} \qquad \boxed{\alpha < 0}$$



Логарифмическая модель

Как, используя метод наименьших квадратов, оценить параметры такой модели?

$$y = Ax^{\alpha}$$

Нужно сделать ее линейной по параметрам:

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln x$$

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Логарифмическая модель Интерпретация коэффициентов

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 \frac{dx}{x} \quad (\textit{вспомним, что } (\ln x)' = \frac{1}{x})$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

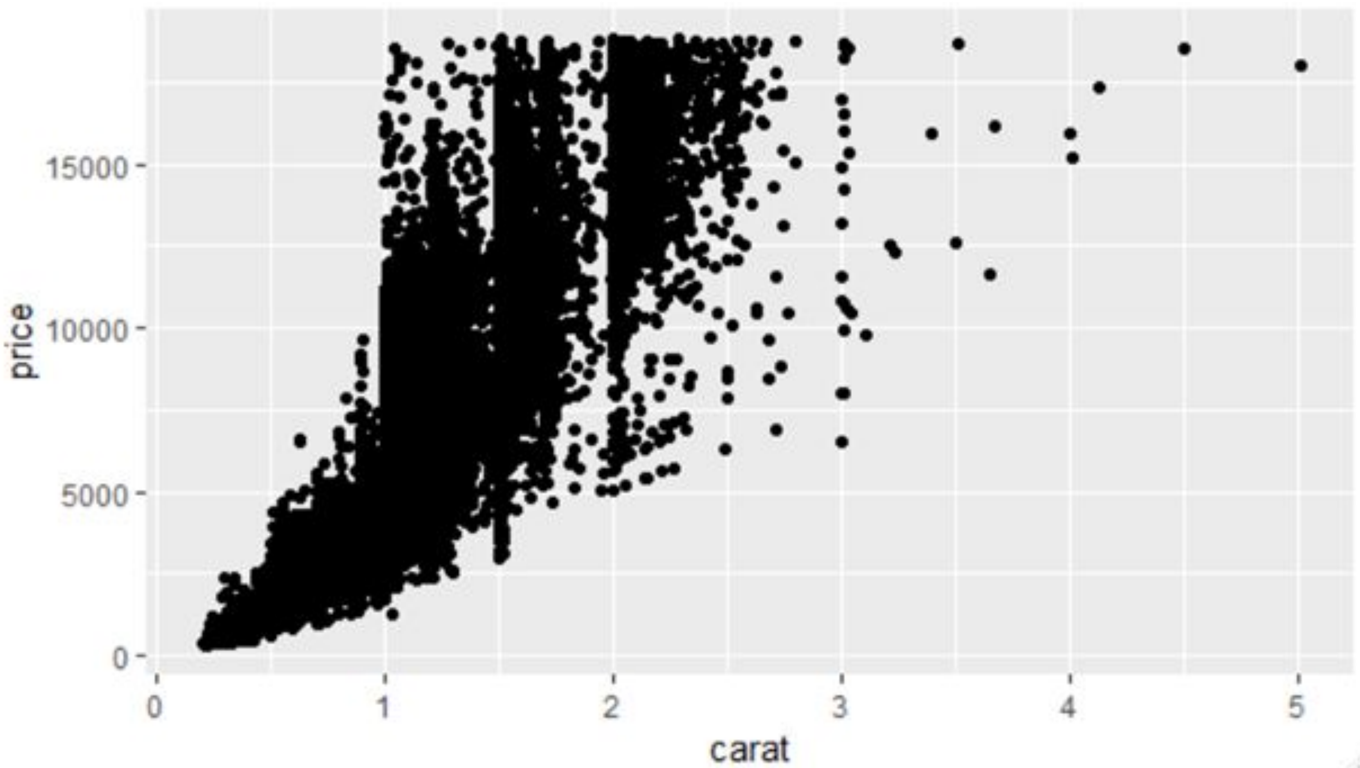
$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\Delta y}{y} - \textit{относительное изменение } y \ (\textit{в долях}) \\ \dfrac{\Delta x}{x} - \textit{относительное изменение } x \ (\textit{в долях}) \end{array}\right\} \textit{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x} \ (\textit{приближенная формула})$$

Если x увеличивается на 1%, то $\dfrac{\Delta x}{x} = \dfrac{1}{100}$

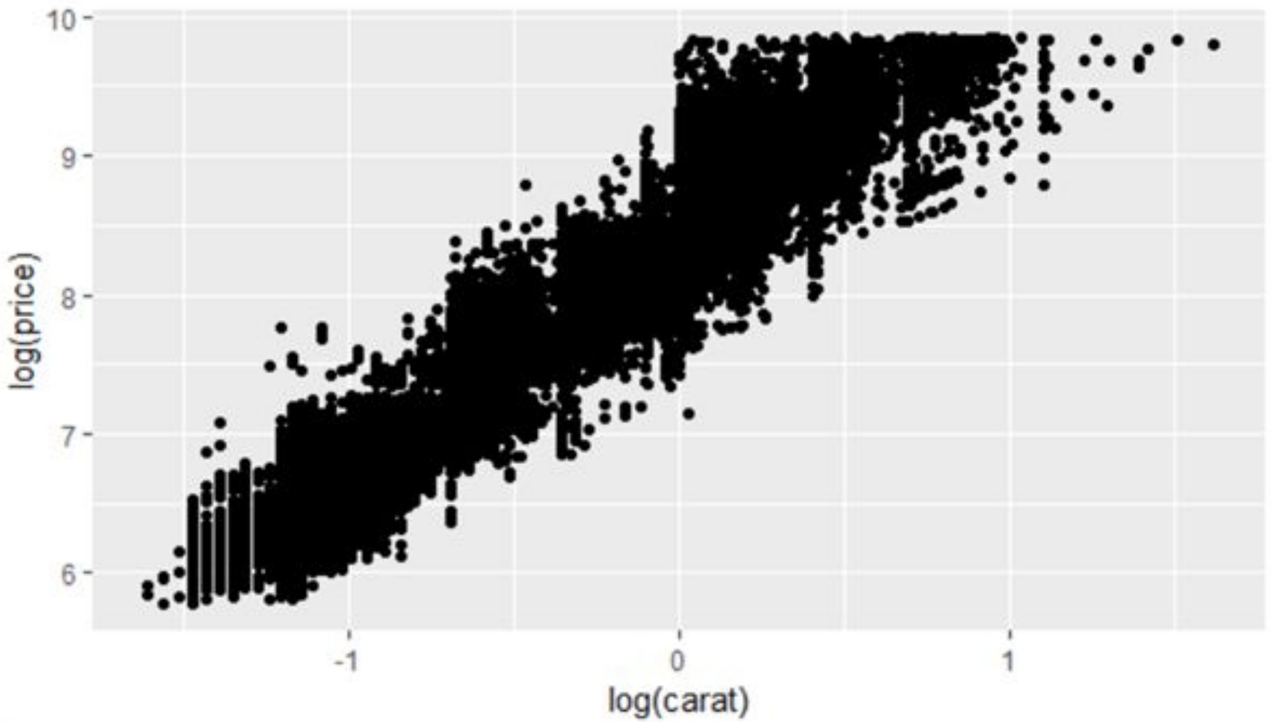
Соответственно, если β_1 *положительное, то при увеличении x на 1% y увеличится на* β_1*%.*

β_1 *– это эластичность y по x*

Логарифмическая модель Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



Логарифмическая модель Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

Экспоненциальная зависимость

$$y = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

Прологарифмируем обе части уравнения.

Получим

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 dx \quad (\text{вспомним, что } (\ln y)' = \frac{1}{y},\ (x)' = 1)$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{\Delta y}{y} - \text{относительное изменение } y \text{ (в долях)} \\ \Delta x - \text{абсолютное изменение } x \end{array}\right\} \text{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \Delta x \text{ (приближенная формула)}$$

Соответственно, если β_1 *положительное, то при увеличении* x *на 1 единицу* y *увеличится на* $100 \cdot \beta_1\%$.

Замечание: если $\beta_1 > 0{,}1$ *то лучше пользоваться не приближенными вычислениями, а точными.*

Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

Пример

Моделирование экономического роста

$$\ln GDP_t = 4{,}2 + 0{,}03t$$

Увеличение ***t*** на единицу $\Rightarrow$

увеличение ***GDP*** на $(100*0{,}03)\,\%$

Темп прироста ВВП составляет 3% в год

Полулогарифмическая (линейно-логарифмическая) модель

$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$

Интерпретация коэффициента β_1

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$dy = \beta_1 \frac{dx}{x}$ *(вспомним, что* $(\ln x)' = \frac{1}{x}$, $(y)' = 1$*)*

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

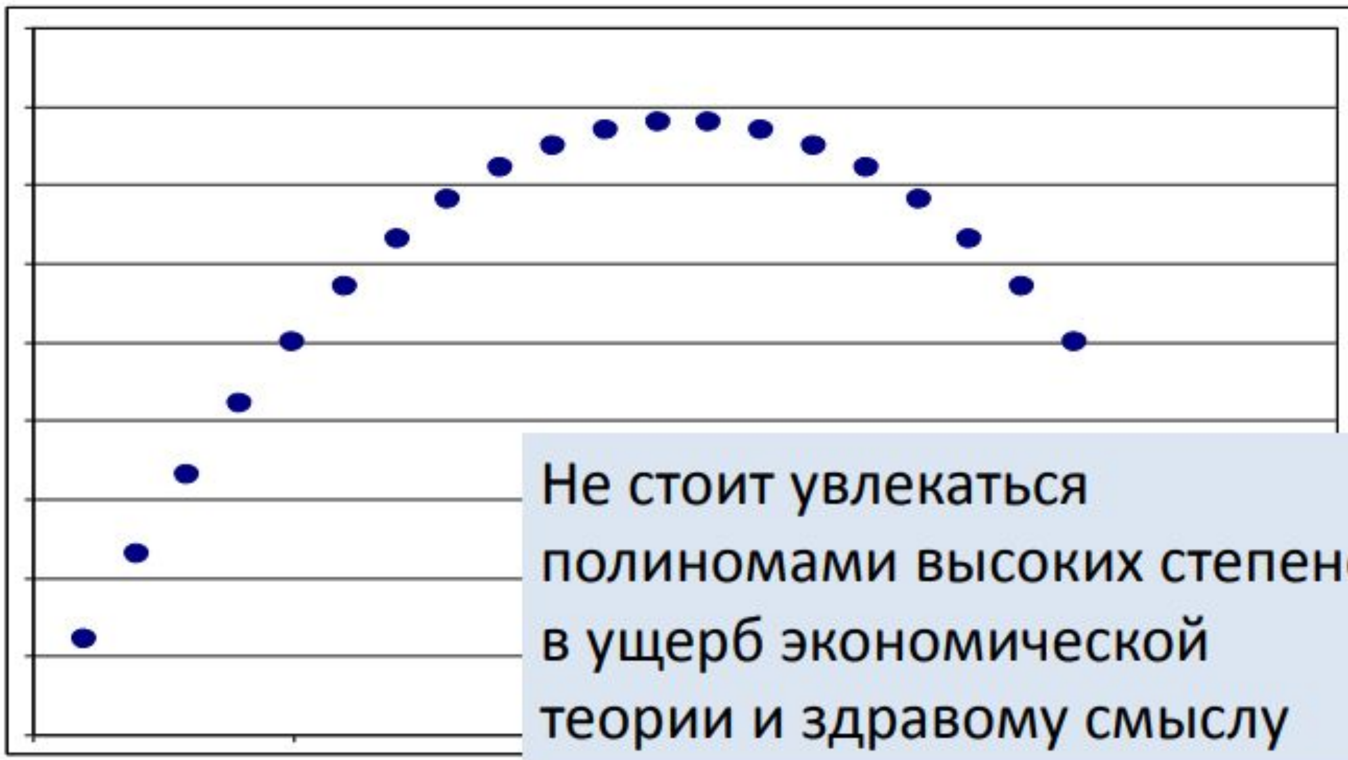
$$\left.\begin{array}{l} \Delta y - \text{абсолютное изменение } y \\ \frac{\Delta x}{x} - \text{относительное изменение } x \text{ (в долях)} \end{array}\right\} \text{Получаем: } \Delta y \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x} \text{ (приближенная формула)}$$

Если x *увеличивается на 1%, то* $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100}$

Соответственно, если β_1 *положительное, то при увеличении* x *на 1%* y *увеличится на* $\frac{\beta_1}{100}$ *единиц.*

Полиномы относительно регрессоров

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$



Не стоит увлекаться полиномами высоких степеней в ущерб экономической теории и здравому смыслу

Сравнение нелинейных моделей

Модели вида

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad и \quad \ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

некорректно сравнивать, используя R^2,

т.к. зависимые переменные разные

Сравнение нелинейных моделей

Модели вида

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad и \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + \varepsilon_i$$

можно сравнивать, используя R^2,

т. к. зависимая переменная одна и та же