

# Нелинейные регрессионные модели

# Линейные регрессионные модели

$$y = \beta_0 + \beta_1 x -$$

*модель линейной парной регрессии*

$$y = \beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_k x_k -$$

*модель линейной множественной регрессии*

# Примеры нелинейных регрессионных моделей

$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$  – логарифмическая модель

$\left. \begin{array}{l} \ln y = \beta_0 + \beta_1 x \\ y = \beta_0 + \beta_1 \ln x \end{array} \right\}$  полулогарифмические модели

$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$  – квадратичная функция

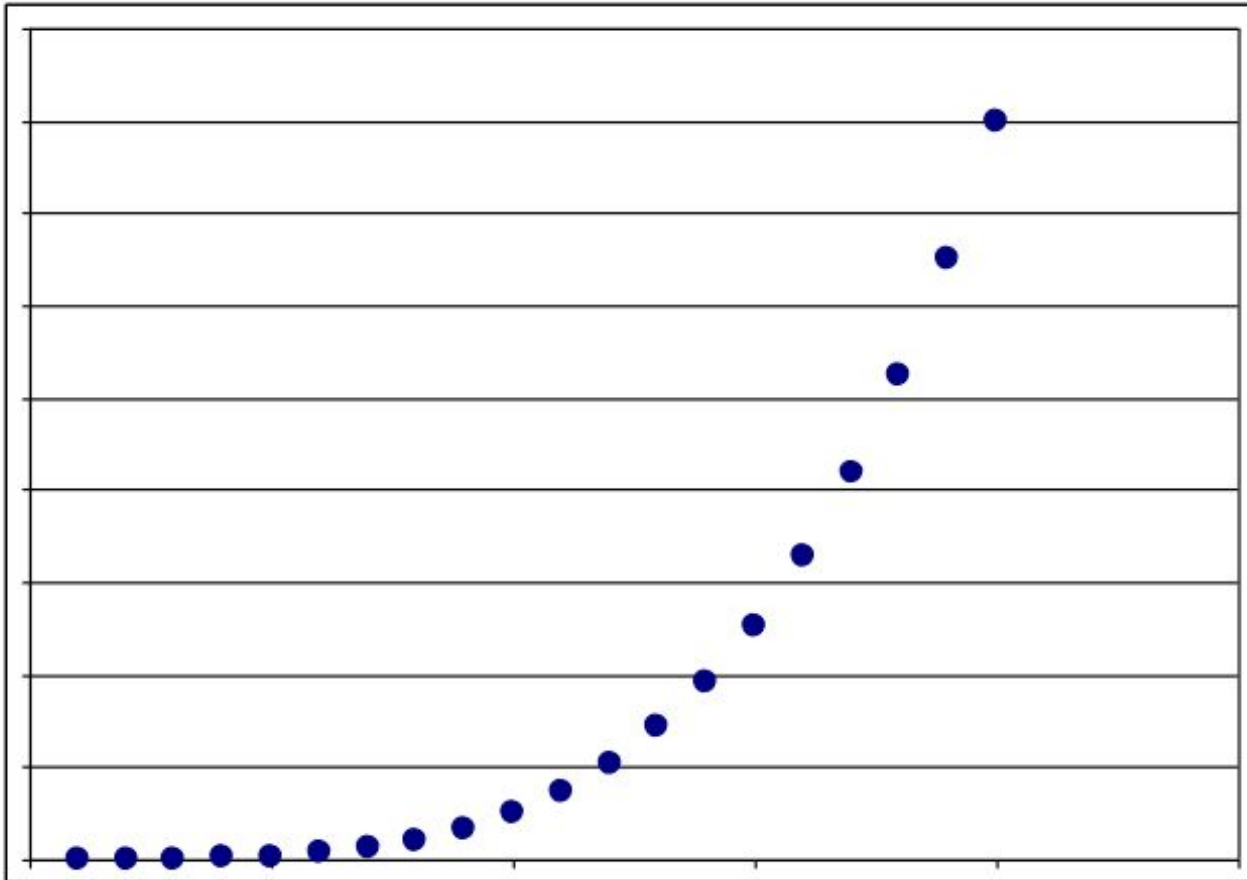
# Как определить нелинейную зависимость?

- 1) Построить график (диаграмму рассеяния)
- 2) Теоретические предпосылки (экономическая теория)
- 3) Логические рассуждения
- 4) Статистические критерии

# Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

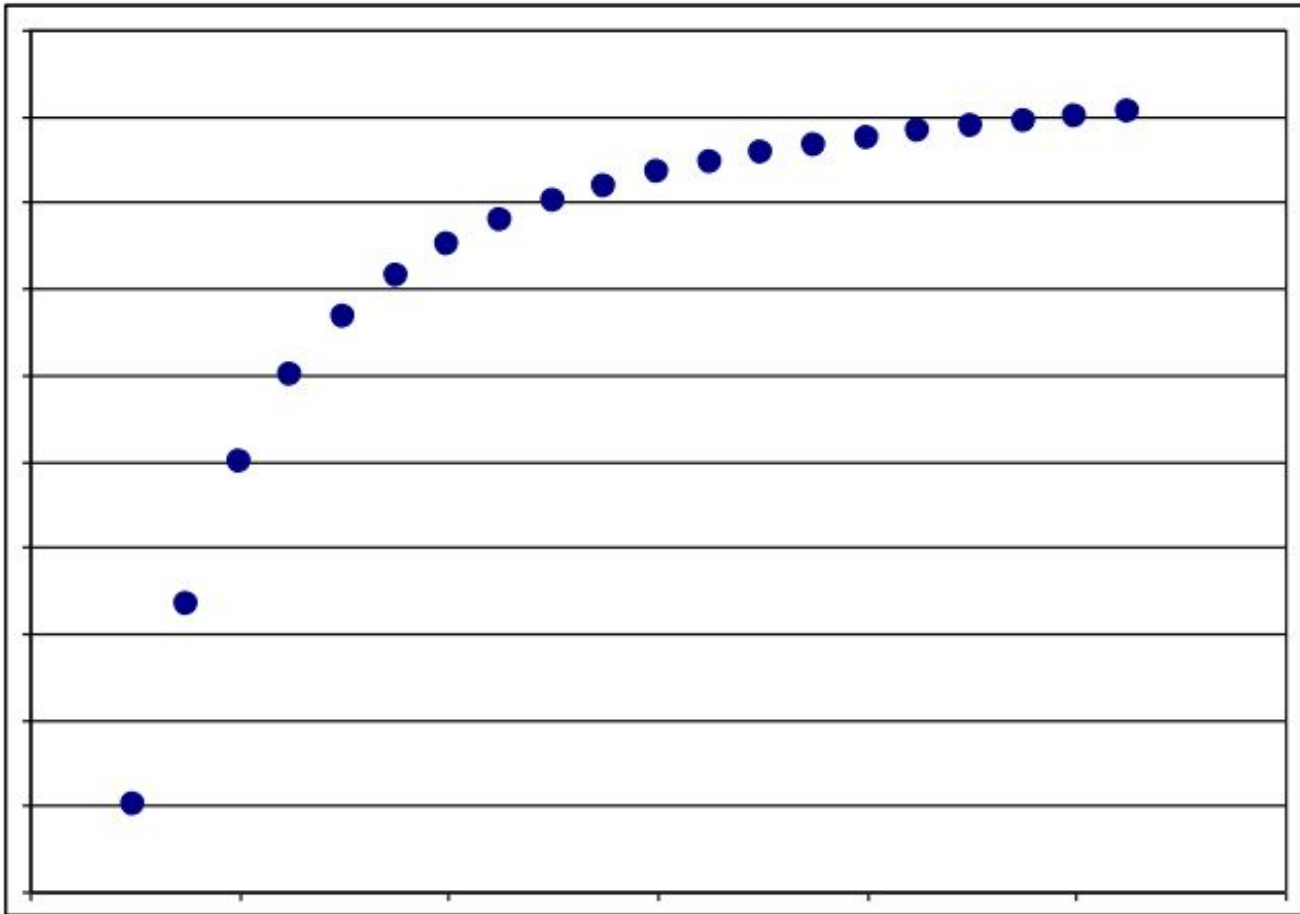
$$\alpha > 1$$



# Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

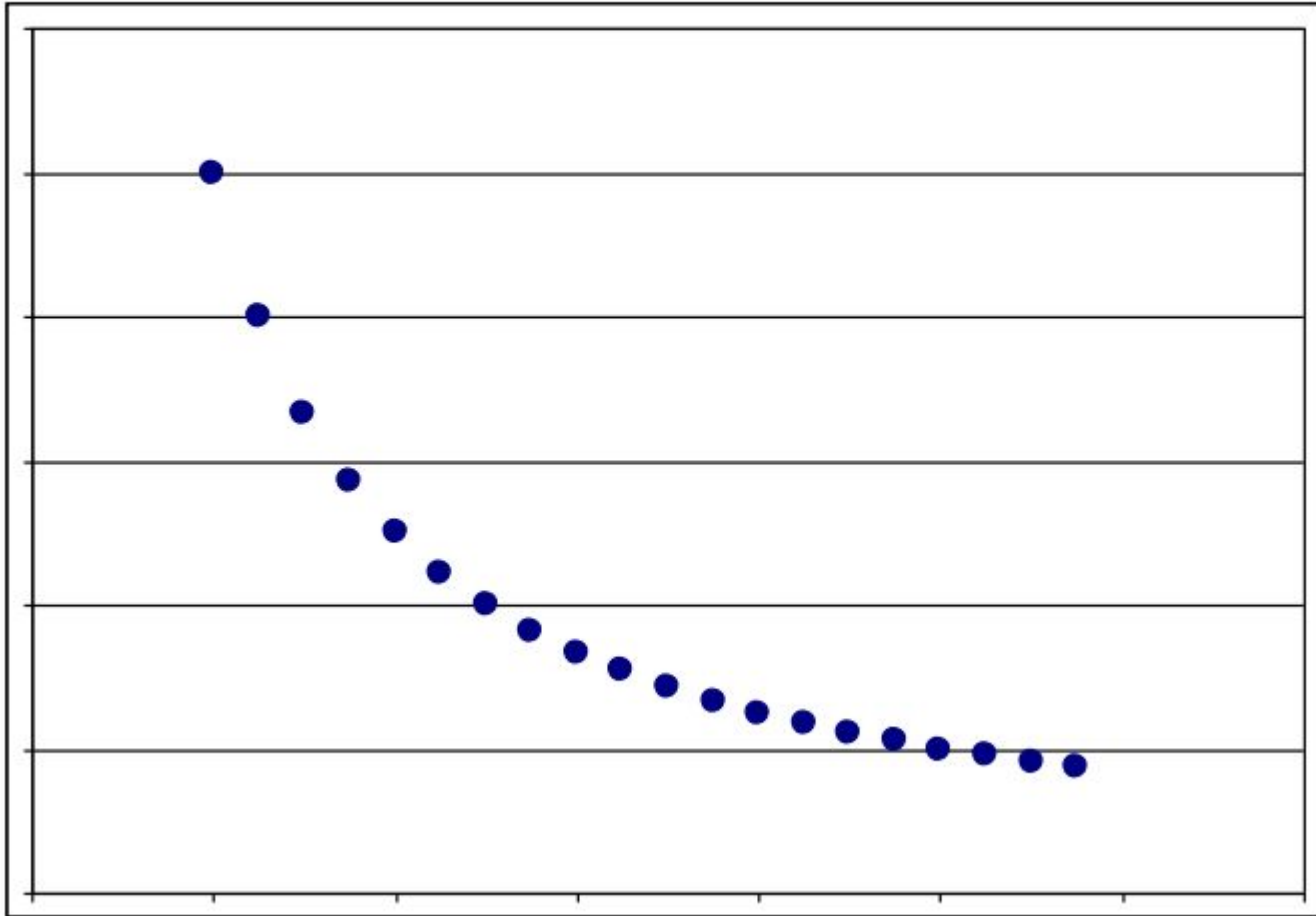
$$0 < \alpha < 1$$



# Логарифмическая модель

$$y = Ax^\alpha$$

$$\alpha < 0$$



# Логарифмическая модель

Как, используя метод наименьших квадратов, оценить параметры такой модели?

$$y = Ax^\alpha$$

Нужно сделать ее линейной по параметрам:

$$\ln y = \ln A + \alpha \ln x$$

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$



# Логарифмическая модель

## Интерпретация коэффициентов

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Интерпретация коэффициента  $\beta_1$

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 \frac{dx}{x} \quad (\text{вспомним, что } (\ln x)' = \frac{1}{x})$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{y} - \text{относительное изменение } y \text{ (в долях)} \\ \frac{\Delta x}{x} - \text{относительное изменение } x \text{ (в долях)} \end{array} \right\} \text{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x} \text{ (приближенная формула)}$$

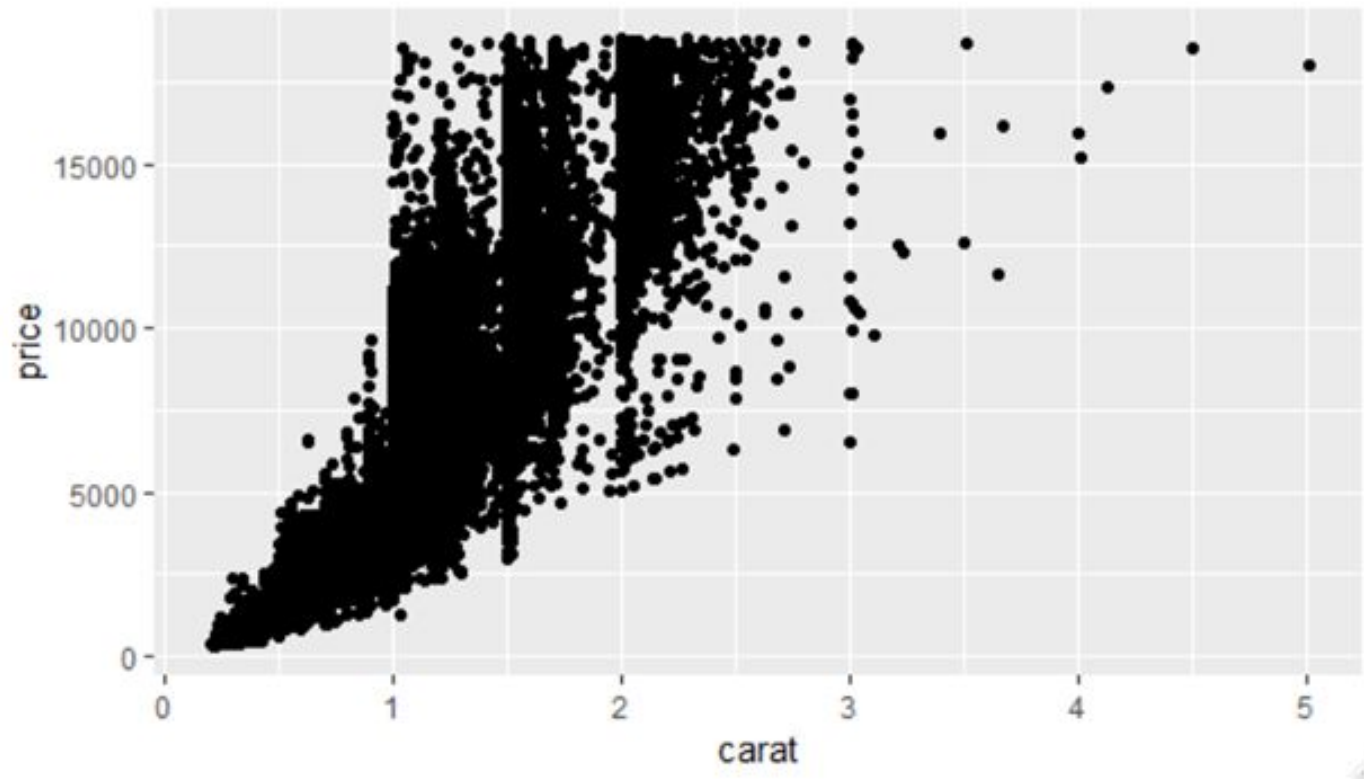
$$\text{Если } x \text{ увеличивается на } 1\%, \text{ то } \frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100}$$

Соответственно, если  $\beta_1$  положительное, то при увеличении  $x$  на 1%  $y$  увеличится на  $\beta_1\%$ .

$\beta_1$  – это эластичность  $y$  по  $x$

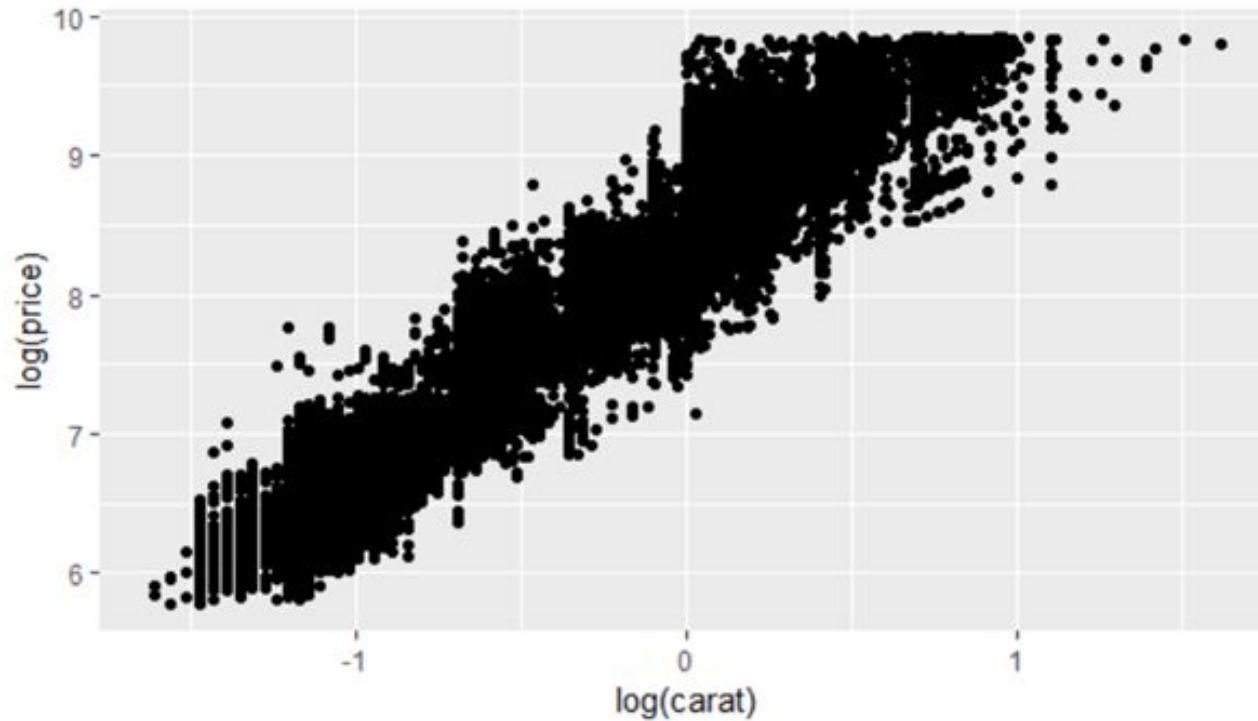
# Логарифмическая модель

## Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



# Логарифмическая модель

## Переход к логарифмам- способ устранения гетероскедастичности



# Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

*Экспоненциальная зависимость*

$$y = e^{\beta_0 + \beta_1 x}$$

*Прологарифмируем обе части уравнения.*

*Получим*

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

# Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) МОДЕЛЬ

$$\ln y = \beta_0 + \beta_1 x$$

Интерпретация коэффициента  $\beta_1$

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$\frac{dy}{y} = \beta_1 dx \quad (\text{вспомним, что } (\ln y)' = \frac{1}{y}, (x)' = 1)$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\Delta y}{y} - \text{относительное изменение } y \text{ (в долях)} \\ \Delta x - \text{абсолютное изменение } x \end{array} \right\} \text{Получаем: } \frac{\Delta y}{y} \approx \beta_1 \Delta x \text{ (приближенная формула)}$$

Соответственно, если  $\beta_1$  положительное, то при увеличении  $x$  на 1 единицу  $y$  увеличится на  $100 \cdot \beta_1\%$ .

Замечание: если  $\beta_1 > 0,1$  то лучше пользоваться не приближенными вычислениями, а точными.

# Полулогарифмическая (логарифмически-линейная) модель

Пример

Моделирование экономического роста

$$\ln GDP_t = 4,2 + 0,03t$$

Увеличение  $t$  на единицу  $\Rightarrow$   
увеличение **GDP** на  $(100*0,03)\%$

Темп прироста ВВП составляет 3% в год

# Полулогарифмическая (линейно-логарифмическая) модель

$$y = \beta_0 + \beta_1 \ln x$$

Интерпретация коэффициента  $\beta_1$

Продифференцируем левую и правую части уравнения

$$dy = \beta_1 \frac{dx}{x} \quad (\text{вспомним, что } (\ln x)' = \frac{1}{x}, (y)' = 1)$$

Перейдем от дифференциалов к приращениям:

$\Delta y$  – абсолютное изменение  $y$

$\frac{\Delta x}{x}$  – относительное изменение  $x$  (в долях)

Получаем:  $\Delta y \approx \beta_1 \frac{\Delta x}{x}$  (приближенная формула)

Если  $x$  увеличивается на 1%, то  $\frac{\Delta x}{x} = \frac{1}{100}$

Соответственно, если  $\beta_1$  положительное, то при увеличении  $x$  на 1%  $y$  увеличится на  $\frac{\beta_1}{100}$  единиц.

# Полиномы относительно регрессоров

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \beta_2 x^2$$



Не стоит увлекаться  
полиномами высоких степеней  
в ущерб экономической  
теории и здравому смыслу



# Сравнение нелинейных моделей

*Модели вида*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{и} \quad \ln y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$$

*некорректно сравнивать, используя  $R^2$ ,  
т.к. зависимые переменные разные*

# Сравнение нелинейных моделей

*Модели вида*

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i \quad \text{и} \quad y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln x_i + \varepsilon_i$$

*можно сравнивать, используя  $R^2$ ,*

*т. к. зависимая переменная одна и та же*