Уральский федеральный университет имени первого Президента России Б.Н.Ельцина

Лекция 3

Случайные погрешности

Вероятностное описание результатов и погрешностей

№	X_i	№	X_i	№	X_i	№	X_i	№	X_i
1	0,65	**21**	0,88	**41**	0,97	**61**	1,05	**81**	1,16
2	0,66	**22**	0,89	**42**	0,97	**62**	1,06	**82**	1,16
3	0,68	**23**	0,89	**43**	0,97	**63**	1,06	**83**	1,18
4	0,70	**24**	0,90	**44**	0,98	**64**	1,06	**84**	1,18
5	0,74	**25**	0,91	**45**	0,98	**65**	1,07	**85**	1,19
6	0,75	**26**	0,91	**46**	0,99	**66**	1,07	**86**	1,20
7	0,76	**27**	0,92	**47**	0,99	**67**	1,07	**87**	1,20
8	0,77	**28**	0,92	**48**	0,99	**68**	1,08	**88**	1,21
9	0,77	**29**	0,93	**49**	1,00	**69**	1,08	**89**	1,22
10	0,77	**30**	0,93	**50**	1,00	**70**	1,10	**90**	1,22
11	0,78	**31**	0,93	**51**	1,00	**71**	1,10	**91**	1,23
12	0,79	**32**	0,93	**52**	1,01	**72**	1,10	**92**	1,24
13	0,80	**33**	0,94	**53**	1,01	**73**	1,11	**93**	1,25
14	0,80	**34**	0,94	**54**	1,01	**74**	1,12	**94**	1,27
15	0,81	**35**	0,95	**55**	1,02	**75**	1,12	**95**	1,27
16	0,84	**36**	0,95	**56**	1,03	**76**	1,13	**96**	1,29
17	0,85	**37**	0,95	**57**	1,03	**77**	1,14	**97**	1,31
18	0,86	**38**	0,96	**58**	1,03	**78**	1,14	**98**	1,32
19	0,86	**39**	0,96	**59**	1,04	**79**	1,15	**99**	1,32
20	0,87	**40**	0,96	**60**	1,04	**80**	1,16	**100**	1,35

$$X_i = Q \pm \Delta_i.$$

— каждое из значений X_i является суммой истинного значения измеряемой ФВ и некого случайного числа, соответствующего случайной погрешности.

Вероятностное описание результатов и погрешностей

Разброс результатов измерений – диапазон измеренной ФВ от минимального до максимального значений.

Границы разброса X_{min}, X_{max} – величины, характеризующие предел разброса истинного значения измеряемой величины, где x_{min}, x_{max} – соответственно, нижняя и верхняя границы разброса.

Распределение вероятностей — это закон, описывающий область значений случайной величины и вероятности их появления.

Вероятностное описание результатов и погрешностей

Пусть произведено *n* последовательных наблюдений одной и той же величины *X*. Рассмотрим ряд наблюдений $X_1, X_2, X_3, \dots, X_n$.
Расположим результаты наблюдений в порядке их возрастания, от X_{min} до X_{max} и найдем разброс ряда $L = X_{max} - X_{min}$.
Разделим разброс ряда на *k* равных интервалов $\Delta l = L/k$ и подсчитаем ***количество наблюдений*** n_k, попадающих в каждый интервал.

Для определения оптимального числа интервалов используется эмпирическая формула Стерджесса:

$$k = 1 + [3,3\lg n]$$

Вероятностное описание результатов и погрешностей

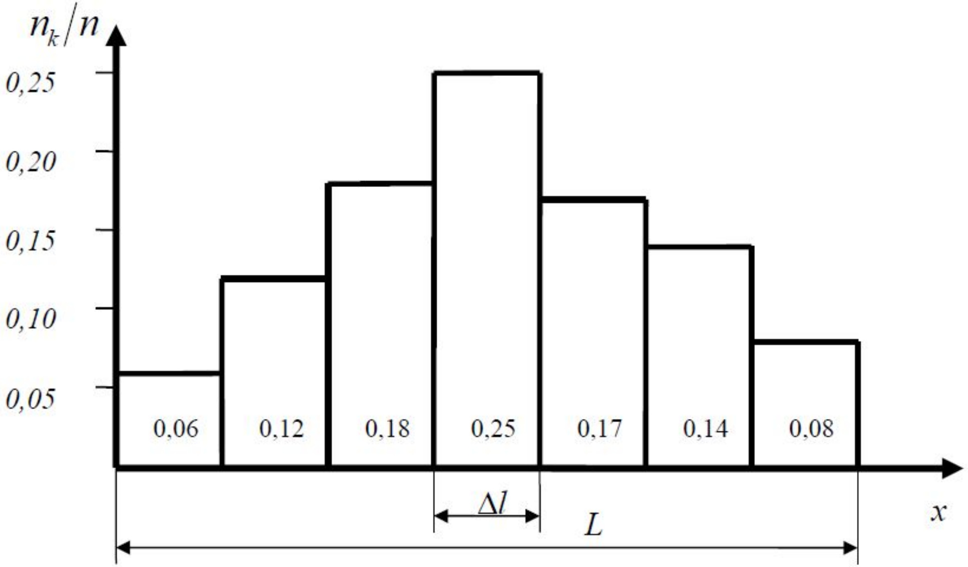
Таблица 1. Результаты 100 наблюдений, сгруппированные в 7 интервалов

Номер интервала	1	2	3	4	5	6	7
n_k	6	12	18	25	17	14	8
n_k/n	0,06	0,12	0,18	0,25	0,17	0,14	0,08

Относительная частота попаданий n_k/n результатов наблюдений *k*-ый интервал – отношение количества наблюдений, попадающих в *k*-ый интервал,
к общему числу наблюдений.

Вероятностное описание результатов и погрешностей

На основании полученных результатов можно построить ***гистограмму*** – зависимость относительной частоты попаданий n_k/n *в* k-ый интервал.



Гистограмма, построенная на основе результатов таблицы 1

Вероятностное описание результатов и погрешностей

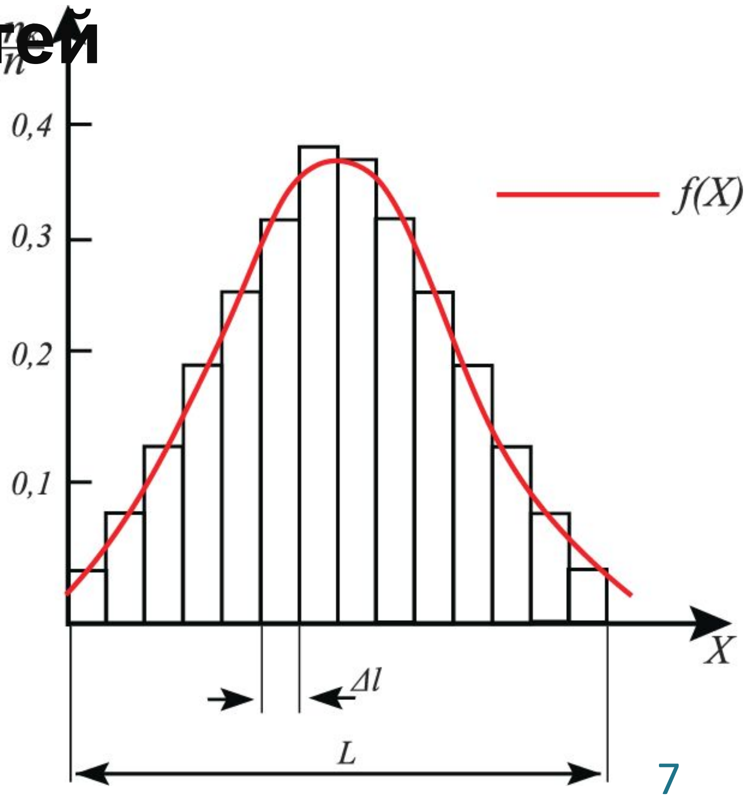
Пусть n → ∞; тогда *k* → ∞ и *Δl* → 0.

Функция *f(X)* — ***кривая плотности распределения вероятностей случайной величины***.

Свойства функции f(X):

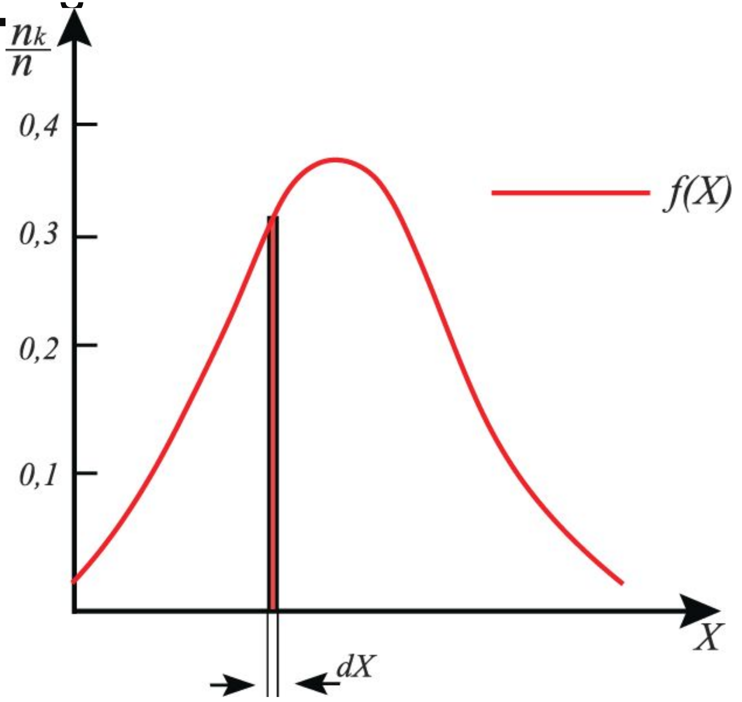
1. $f(X) \geq 0$

2. $\int_{-\infty}^{+\infty} f(X)dX = 1$



Вероятностное описание результатов и погрешностей

Рассмотрим элементарный участок *dX* в диапазоне распределения случайной величины. Тогда величина *f(X)dX* – вероятность попадания случайной величины на участок *dX.*



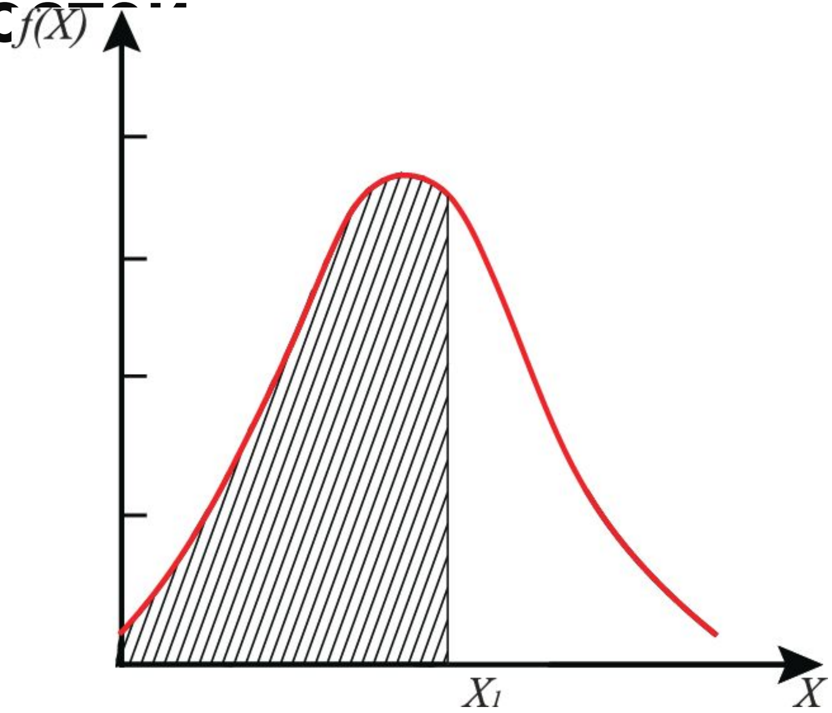
Вероятность попадания P величины *X* на интервал
от X_1 до X_2:

$$P\{X_1 \le X \le X_2\} = \int_{X_1}^{X_2} f(X)dX$$

Вероятностное описание результатов и погрешностей

Функция распределения F(X) — функция, каждое значение которой для каждого *X* является вероятностью события, заключающегося в том, что случайная величина *X* в *i* -м опыте принимает значение, меньшее X_i:

$$F(X_i) = P(X < X_i)$$



Вероятностное описание результатов и погрешностей

Перепишем выражение для функции распределения *F(X)*:

$$F(X_i) = P(X < X_i) = P(-\infty < X < X_i)$$

Тогда связь между функцией распределения *F(X)* и плотностью распределения *f(X)*:

$$F(X_i) = \int_{-\infty}^{X_i} f(X)dX, \quad f(X) = \frac{dF(X)}{dX}$$

Тогда вероятность попадания *P* величины *X* на интервал от X_1 до X_2 в терминах функции распределения равна:

$$P\{X_1 \le X \le X_2\} = F(X_2) - F(X_1)$$

Вероятностное описание результатов и погрешностей

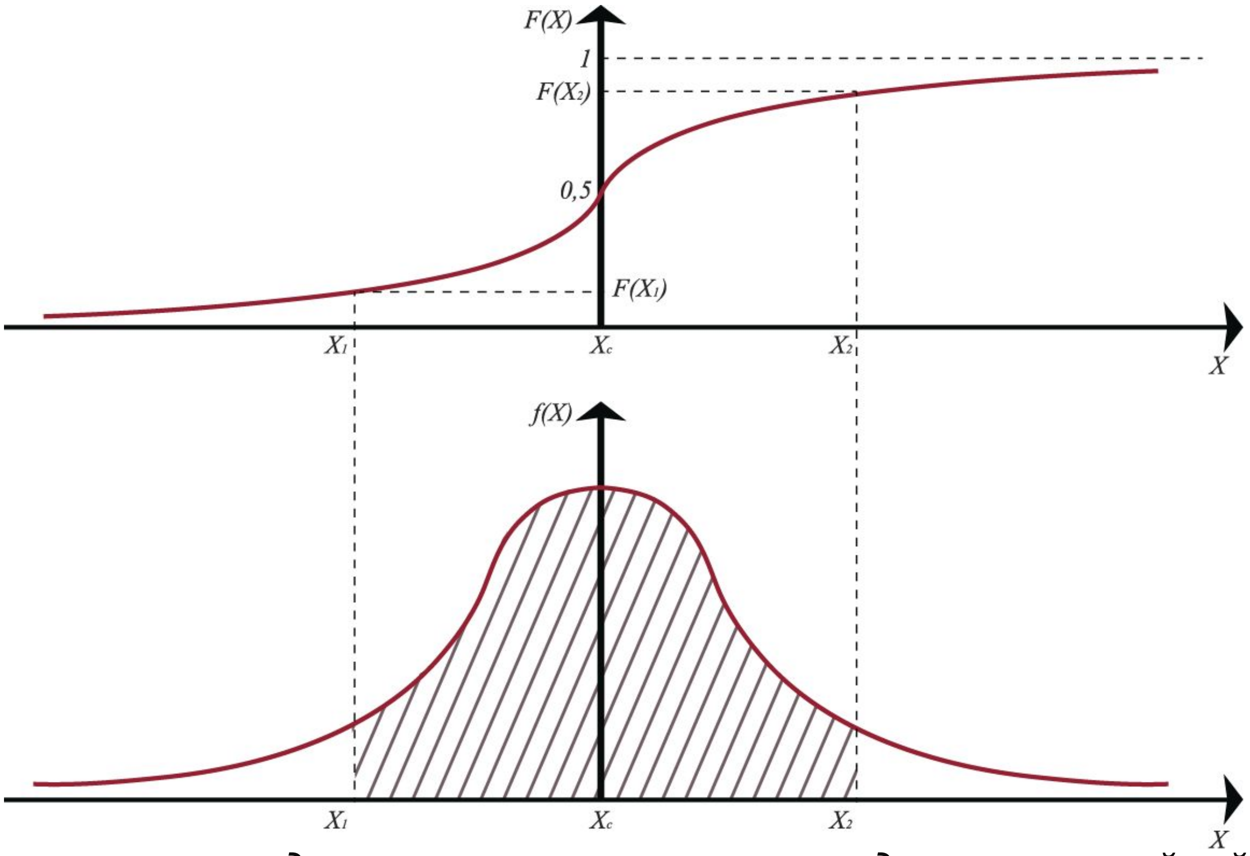
Свойства функции F(X):

1. $F(X_1) \geq 0$;

2. Для любого X_1 справедливо $0 \leq F(X_1) \leq 1$;

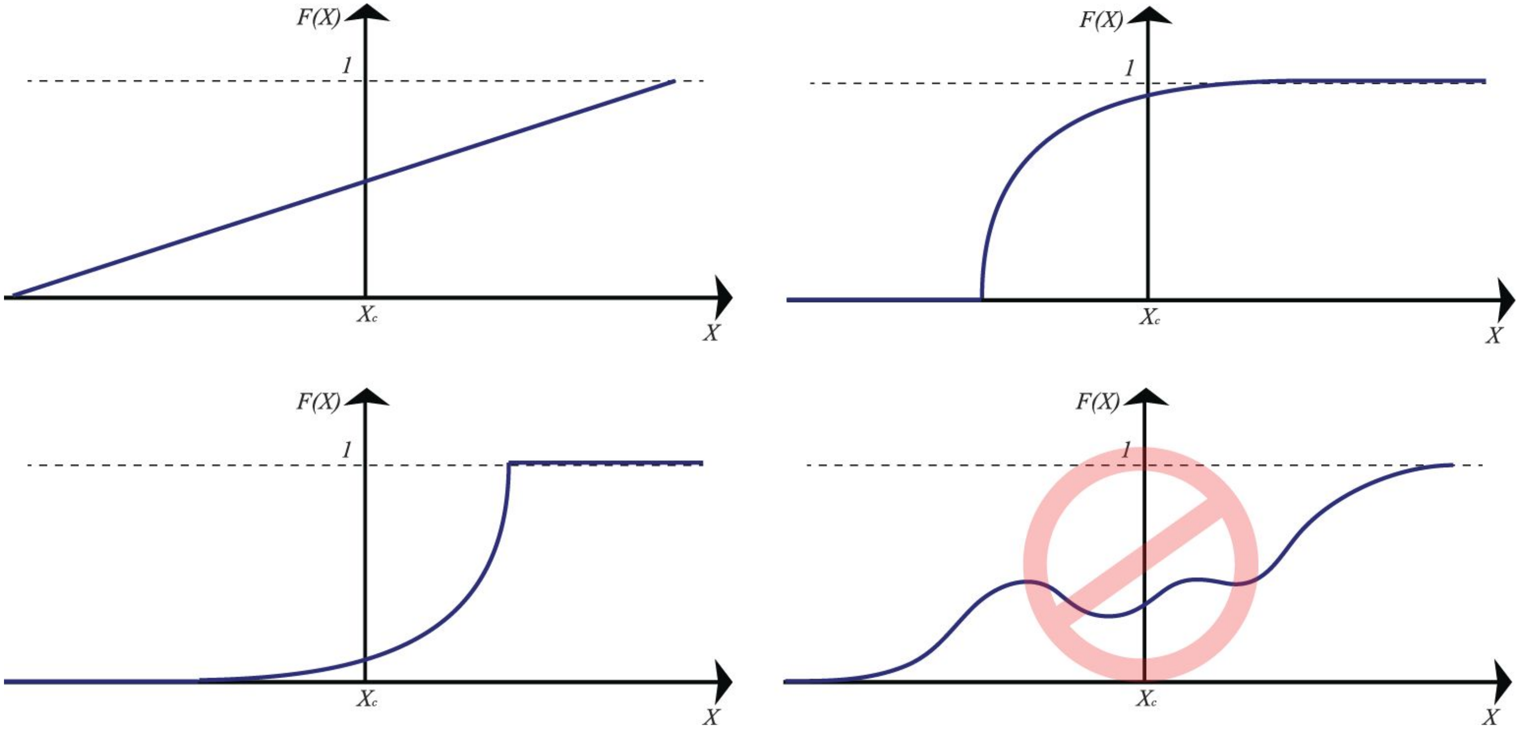
3. Если $X_1 < X_2$, то $F(X_1) \leq F(X_2)$;

Лекция 3. Случайные погрешности



Функция распределения и плотность распределения случайной величины

Вероятностное описание результатов и



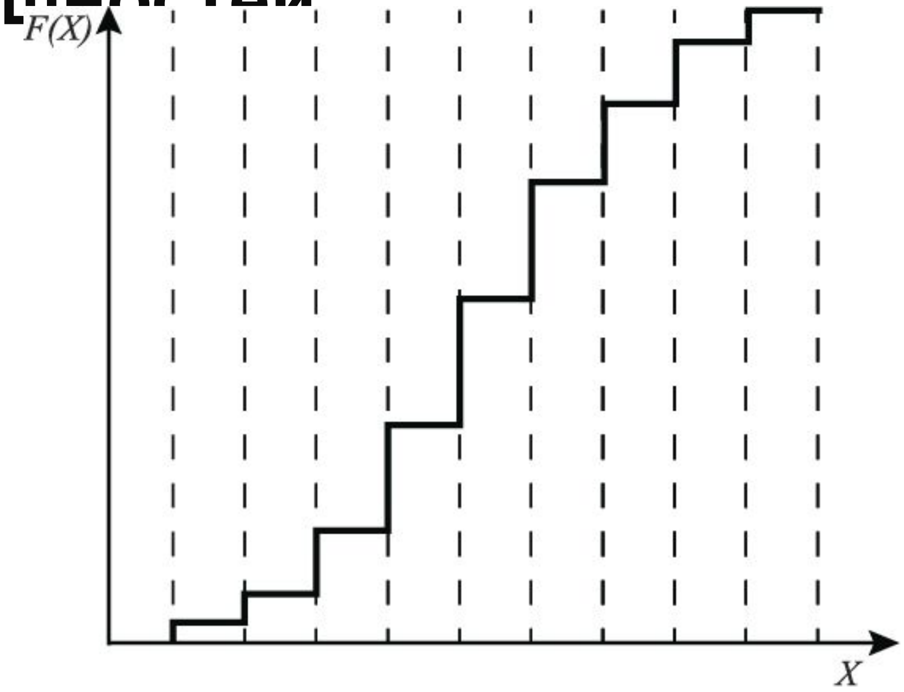
Примеры функций распределения случайной величины

Вероятностное описание результатов и погрешностей

Кумулятивная кривая – график дискретной функции распределения.

$$F_k = \sum_{k=1}^{k} p_k = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{k} n_k$$

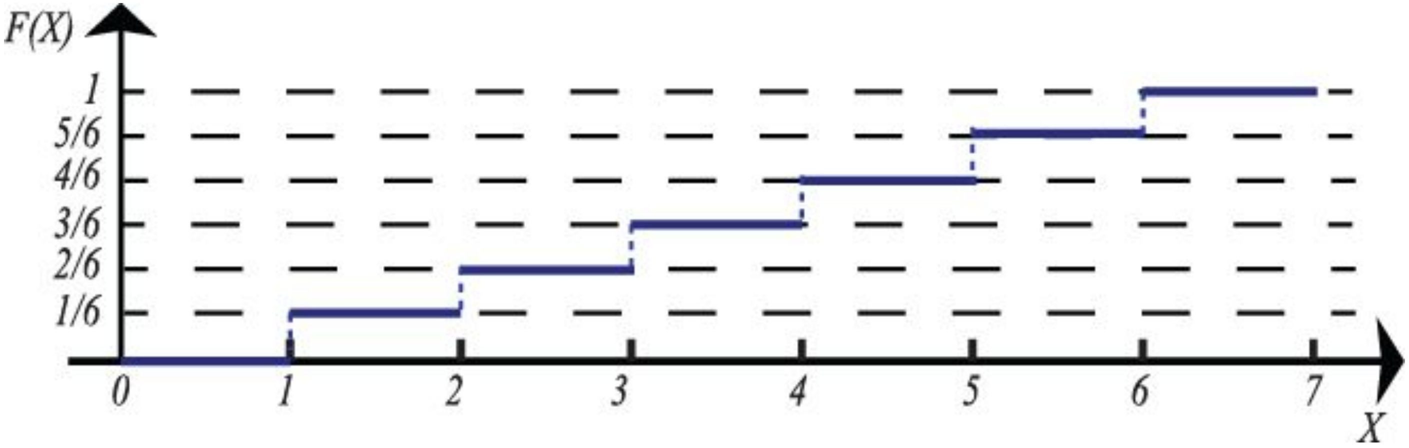
F_k – кумулятивная частость.



Вероятностное описание результатов и погрешностей

Таблица 2. Вероятности появления i-го очка при бросании игральной кости

X_i	1	2	3	4	5	6
P_i	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6	1/6



Функция распределения числа очков при бросании игральной кости

Вероятностное описание результатов и погрешностей

Размерности функции распределения и плотности распределения

1. $F(X_1) = P(X < X_1)$ — функция распределения по определению равна вероятности. В свою очередь, вероятность является безразмерной величиной.

2. $f(X) = \dfrac{dF(X)}{dX}$ — плотность распределения есть производная от функции распределения. То есть размерность плотности распределения обратна размерности случайной величины.

Примеры заданий

1. Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины?

X	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

X	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,5

Примеры заданий

1. Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины?

X	2	3	4	5
P	0,1	0,4	0,3	0,2

X	6	7	8	9
P	0,1	0,2	0,3	0,5

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \\ = 0{,}1 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 = 1$$

$$P = p_1 + p_2 + p_3 + p_4 = \\ = 0{,}1 + 0{,}2 + 0{,}3 + 0{,}5 \neq 1$$

Примеры заданий

2. Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины?

1.

X	1/3	$1/3^2$	$1/3^3$	…	$1/3^k$	…
P	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	…	$1/2^k$	…

2.

X	1/4	$1/4^2$	$1/4^3$	…	$1/4^k$	…
P	1	1/2	1/3	…	$1/k$	…

Примеры заданий

2. **Задают ли следующие таблицы законы распределения дискретной случайной величины?**

1.

X	1/3	$1/3^2$	$1/3^3$	...	$1/3^k$	...
P	1/2	$1/2^2$	$1/2^3$	...	$1/2^k$	...

2.

X	1/4	$1/4^2$	$1/4^3$	...	$1/4^k$	...
P	1	1/2	1/3	...	$1/k$	...

1. $$P=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=\frac{\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}=1$$

2. $$P=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$$ – расходящийся ряд

Примеры заданий

3. По заданному закону распределения случайной величины *X* найти функцию распределения *F(X)*.

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

Примеры заданий

3. **По заданному закону распределения случайной величины *X* найти функцию распределения *F(X)*.**

X_i	0	1	2	3	4
P_i	0,2	0,1	0,25	0,15	0,3

— Если $x \le 0$, то $F(x)=P(X<0)=0$, так как событие $P(X<0)$ невозможно.

— Если $0<x\le 1$, то $F(x)=P(X<1)=0{,}2$, так как событие $P(X<0)$ есть событие $P(x=0)$, т.е. $F(x)$
$(X=0)=0{,}2$

— Если $1<x\le 2$, то $F(x)=P(X<2)=P(X=0)+P(X=1)=0{,}2+0{,}1=0{,}3$

— Если $2<x\le 3$, то $F(x)=P(X<3)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)=0{,}2+0{,}1+0{,}25=0{,}55$

— Если $3<x\le 4$, то $F(x)=P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=3)=0{,}2+0{,}1+0{,}25+0{,}15=0{,}7$

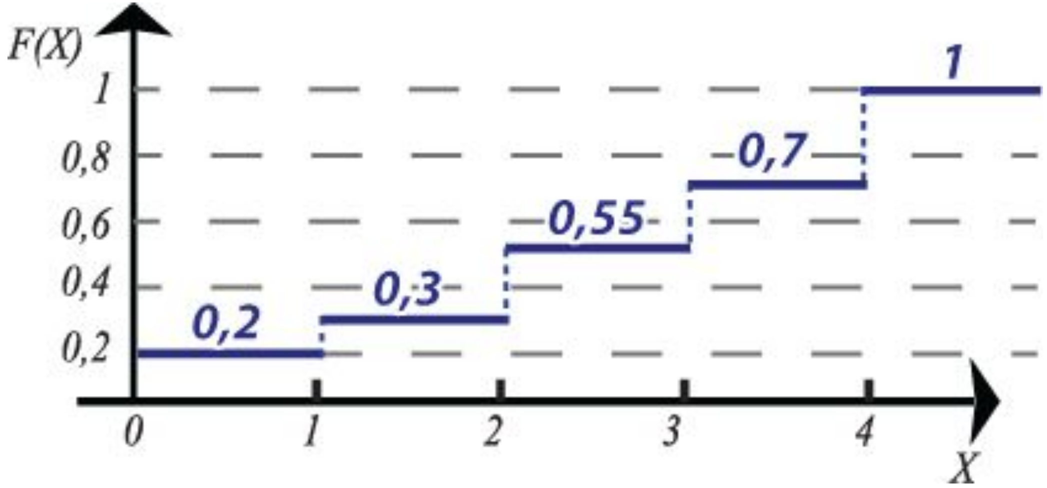
— Если $x>4$, то $F(x)=P(X<4)=P(X=0)+P(X=1)+P(X=2)+P(X=)+P(X=4)=0{,}2+0{,}1+0{,}25+0{,}15+0{,}3=$

Примеры заданий

3. **По заданному закону распределения случайной величины *X* найти функцию распределения *F(X)*.**

— функция распределения случайной величины X

$$F(X)=\begin{cases} 0, & x\le 0 \\ 0{,}2, & 0<x\le 1 \\ 0{,}3, & 1<x\le 2 \\ 0{,}55, & 2<x\le 3 \\ 0{,}7, & 3<x\le 4 \\ 1, & x>4 \end{cases}$$



Примеры заданий

4. Плотность распределения случайной величины задана формулой:

$$f(X)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

Найти вероятность того, что случайная величина попадет на участок (-1, +1).

Примеры заданий

4. Плотность распределения случайной величины задана формулой:

$$f(X) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

С помощью выражения $F(X_1) = \int\limits_{-\infty}^{X_1} f(X)dX$ находим вероятность:

$$P(-1 < X < 1) = \int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{\pi(1+x^2)} = \frac{1}{\pi} arctg(x)\Big|_{-1}^{1} = \frac{1}{2}$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Центр распределения

Медиана X_M — точка на оси *X*, такая что и слева, и справа от нее вероятности появления различных значений случайных погрешностей равны между собой и составляют $P_1 = P_2 = 0,5$.

$$F(X_M) = \int_{-\infty}^{X_M} f(X)dX = \int_{X_M}^{+\infty} f(X)dX = 0,5$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Центр распределения

***Мода** X_m* — точка на оси *X*, соответствующая максимуму кривой плотности распределения.

$$P(X_m) = P(X)\big|_{\max}$$

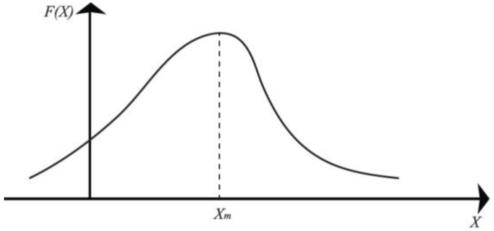
Одномодальные — распределения с одним максимумом.

Полимодальные — распределения с несколькими максимумами.

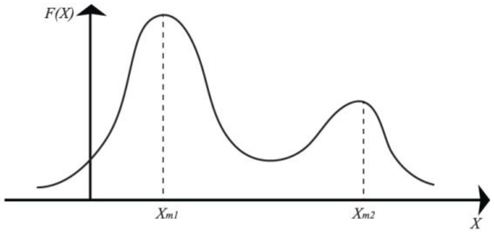
Антимодальные — распределения с выраженным минимумом.

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

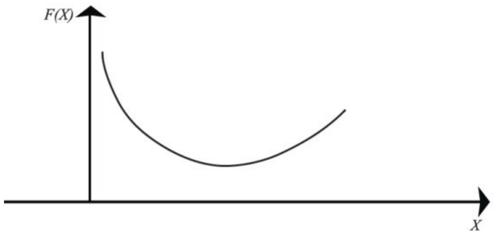
Центр распределения



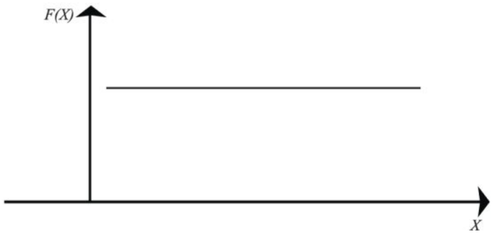
— *одномодальное распределение*



— *двухмодальное распределение*



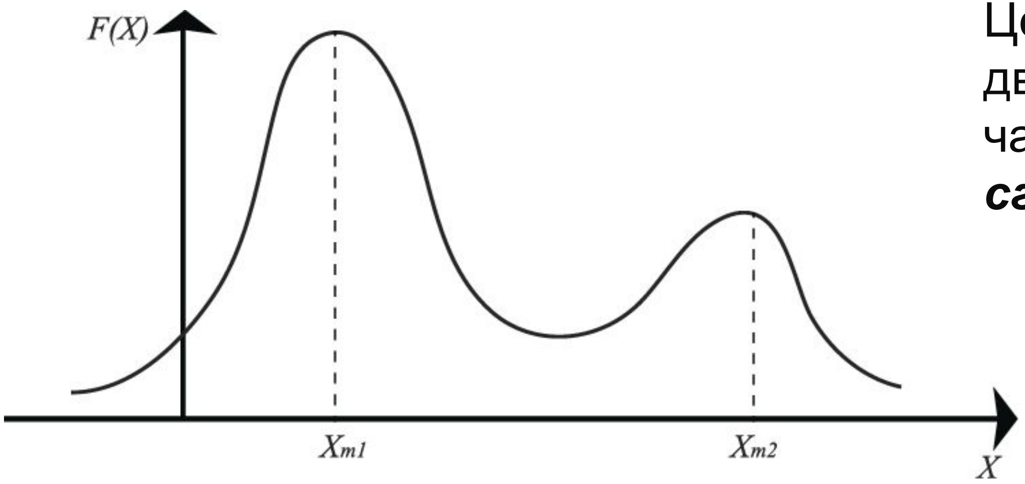
— *антимодальное распределение*



— *равномерное распределение*

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Центр распределения



Центр распределения двухмодального распределения часто оценивается как ***центр сгибов:***

$$X_m = \frac{\alpha_1 X_{m1} + \alpha_2 X_{m2}}{2}$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Центр распределения

Математическое ожидание M[X] — центр тяжести функции распределения.

$$M[X] = m_1 = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} Xf(X)dX$$ — для непрерывных величин.

$$M[X] = m_1 = \sum_{i=1}^{\infty} X_i P_i$$ — для дискретных величин.

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Центр распределения

Центр размаха X_p — среднее арифметическое между максимальным и минимальным членами ряда результатов наблюдений.

$$X_p = \frac{X_{\min} + X_{\max}}{2}$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Моменты распределений

Начальные моменты k-ого порядка определяются выражениями:

$$m_k = \int_{-\infty}^{+\infty} X^k f(X) dX$$

$$m_k = \sum_{i=1}^{n} X_i^k p_i$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Моменты распределений

Центральные моменты k-ого порядка определяются выражениями:

$$\mu_k = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - m_1)^k f(X) dX$$

$$\mu_k = \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_1)^k p_i$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Моменты распределений

Дисперсия — центральный момент второго порядка:

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - m_1)^2 f(X) dX$$

$$D = \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_1)^2 p_i$$

Дисперсия случайной величины характеризует рассеяние отдельных ее значений.

Среднее квадратическое отклонение (СКО) — квадратный корень дисперсии:

$$\sigma = \sqrt{D}$$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Моменты распределений

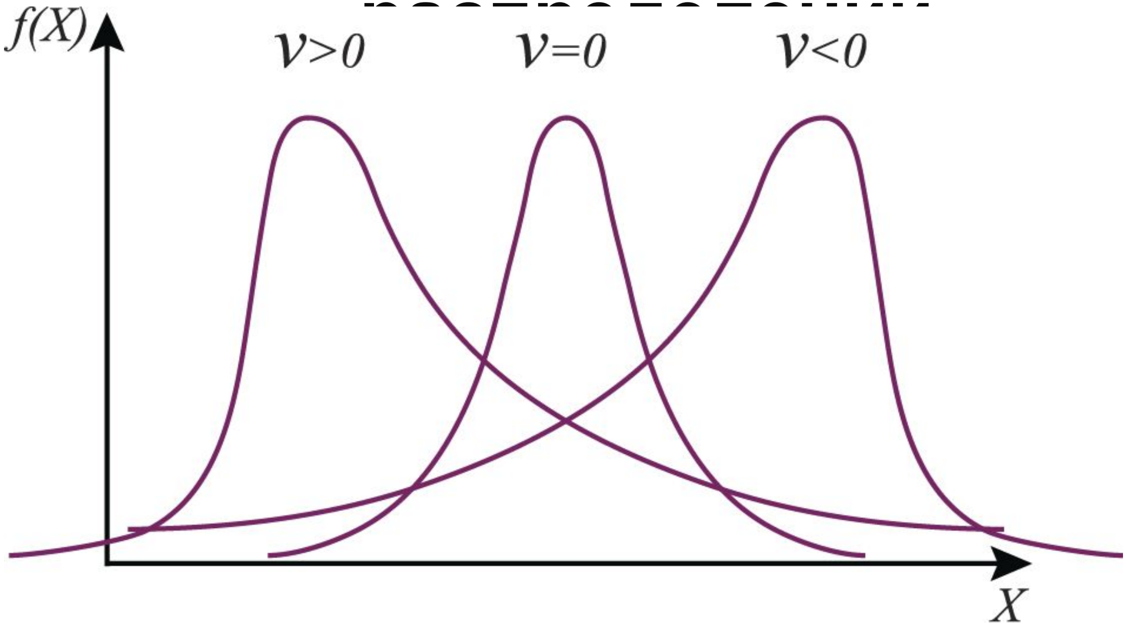
Третий центральный момент:

$$\mu_3 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - m_1)^3 f(X) dX$$

$$\mu_3 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_1)^3 p_i$$

Коэффициент асимметрии: $\nu = \mu_3 / \sigma^3$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений



Примеры распределений с различными значениями коэффициента асимметрии

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты распределений

Моменты распределений

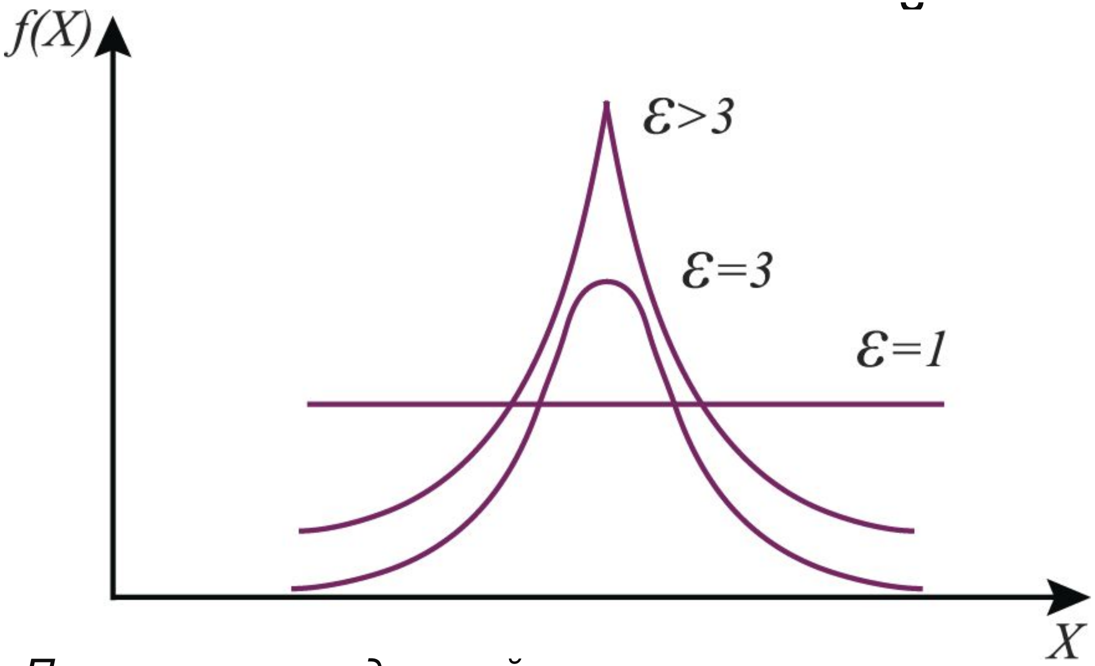
Четвертый центральный момент:

$$\mu_4 = \int_{-\infty}^{+\infty} (X - m_1)^4 f(X) dX$$

$$\mu_4 = \sum_{i=1}^{n} (X_i - m_1)^4 p_i$$

Эксцесс: $\varepsilon = \mu_4 / \sigma^4$

Числовые параметры законов распределения. Центр распределения. Моменты



Примеры распределений с различными значениями эксцесса

Распределения случайных величин

Формы кривых распределения случайных величин

Трапецеидальные

равномерное;
треугольное (Симпсона);
трапецеидальное.

Экспоненциальные

экспоненциальное распределение;
распределение Лапласа;
бета-распределение;
альфа-распределение
распределение Гаусса (нормальное).

Семейство распределений Стьюдента

распределение Стьюдента;
распределение Коши;

Двухмодальные

дискретное двузначное распределение;
арксинусоидальное распределение;

Распределения случайных величин

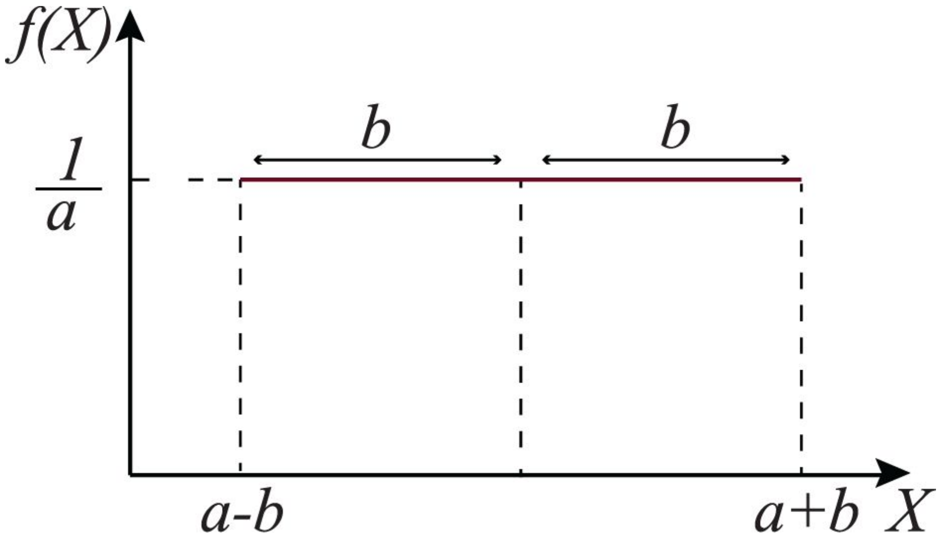
Трапецеидальные распределения

***1.** Равномерное распределение*

$$f(X)=\begin{cases}0, & X\notin[a-b,a+b]\\ \dfrac{1}{a}, & X\in[a-b,a+b]\end{cases}$$

$$MO:\ M[X]=a$$

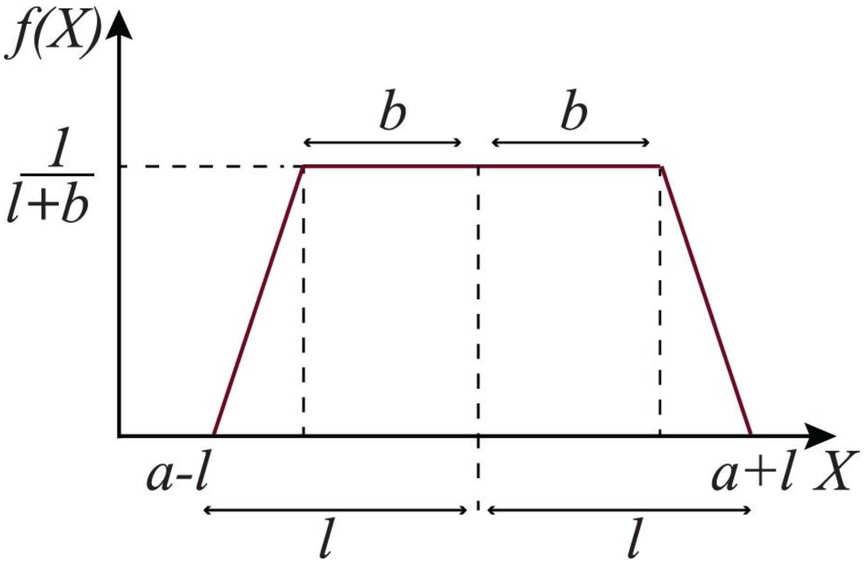
$$CKO:\ \sigma=\frac{b}{\sqrt{3}}$$



Распределения случайных величин

Трапецеидальные распределения

2. *Трапецеидальное распределение*



$$f(X)=\begin{cases} 0, & X\notin[a-l,a+l] \\ \dfrac{X-a+l}{l^2-b^2}, & X\in[a-l,a-b] \\ \dfrac{1}{l+b}, & X\in[a-b,a+b] \\ \dfrac{a+l-X}{l^2-b^2}, & X\in[a+b,a+l] \end{cases}$$

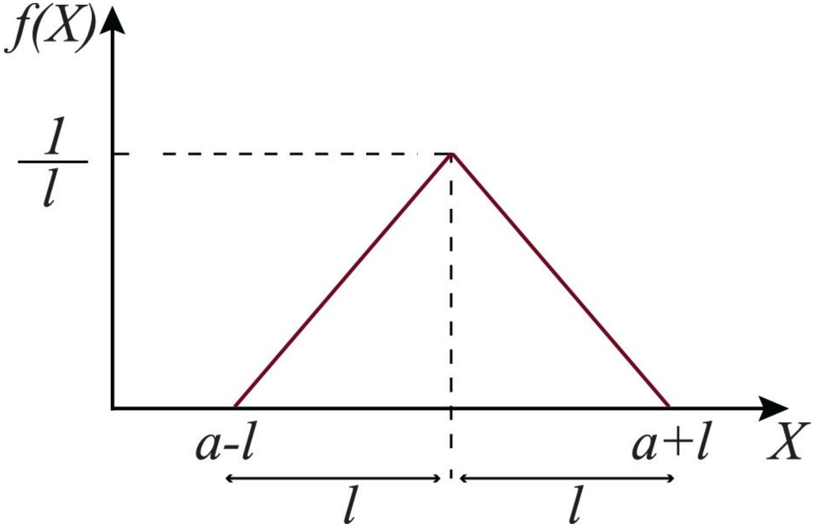
$$MO:\ M[X]=a$$

$$CKO:\ \sigma=\sqrt{(l^2+b^2)/6}$$

Распределения случайных величин

Трапецеидальные распределения

3. *Треугольное распределение (Симпсона)*



$$f(X) = \begin{cases} 0, & X \notin [a-l, a+l] \\ \dfrac{X-a+l}{l^2}, & X \in [a-l, a] \\ \dfrac{a+l-X}{l^2}, & X \in [a, a+l] \end{cases}$$

$$MO:\ M[X] = a$$

$$CKO:\ \sigma = l/\sqrt{6}$$

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения

1. *Экспоненциальное распределение*

$$F(X)=\begin{cases}1-\lambda e^{-\lambda X}, & X\geq 0\\ 0, & X<0\end{cases}$$ — функция распределения

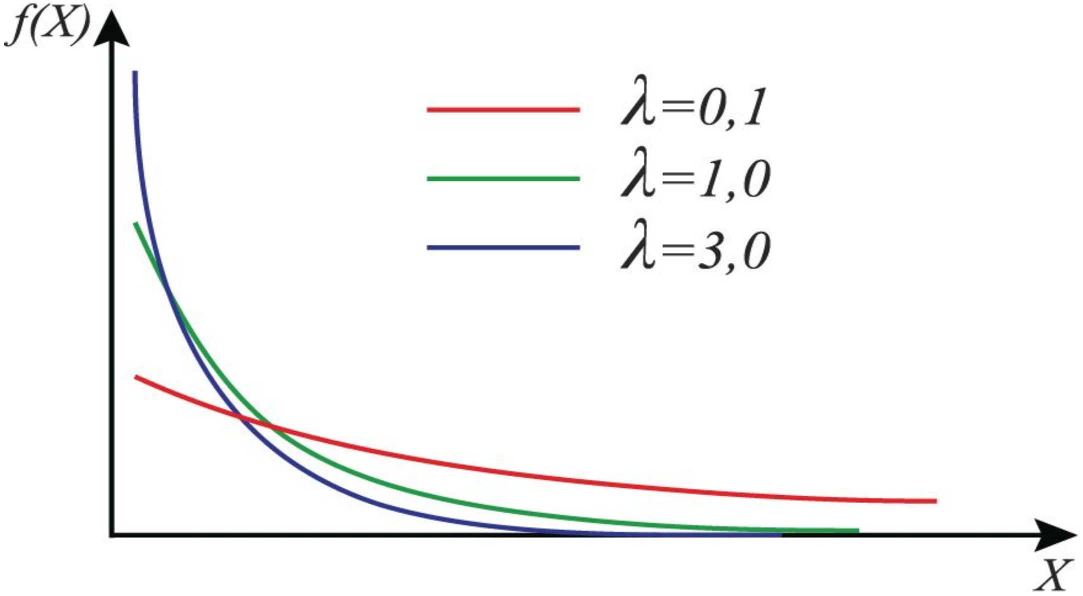
$$f(X)=\begin{cases}\lambda e^{-\lambda X}, & X\geq 0\\ 0, & X<0\end{cases}$$ — плотность распределения

$\lambda > 0$ — коэффициент интенсивности или обратный коэффициент масштаба

$MO:\ M[X]=\lambda^{-1}$ $\quad CKO:\ \sigma=\lambda^{-1}$ $\quad \varepsilon=6$ $\quad \nu=2$

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения



Вид экспоненциального распределения при различных коэффициентах интенсивности

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения

2. *Распределение Лапласа*

$$F(X)=\begin{cases}\frac{1}{2}e^{\alpha(X-\beta)}, & X\le\beta\\ 1-\frac{1}{2}e^{-\alpha(X-\beta)}, & X>\beta\end{cases}$$ — функция распределения

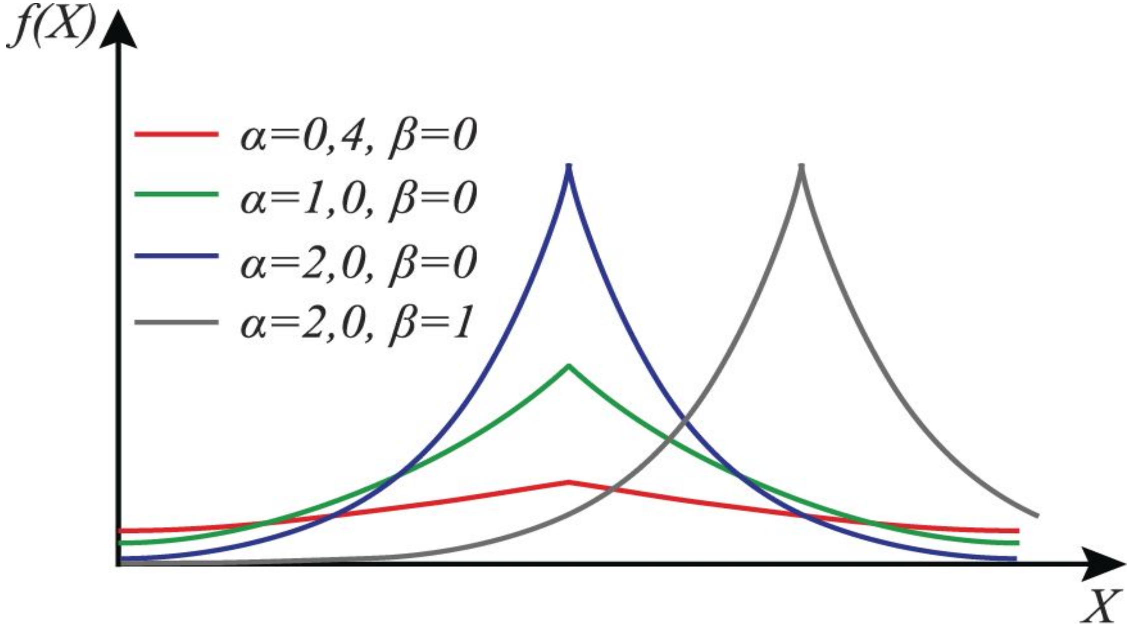
$$f(X)=\frac{\alpha}{2}e^{-\alpha|X-\beta|}$$ — плотность распределения

$\boldsymbol{\alpha>0}$ — параметр масштаба, $-\infty<\boldsymbol{\beta}<+\infty$ — параметр сдвига.

$$MO:\ M[X]=\beta \quad СКО:\ \sigma=\sqrt{2}/\alpha \quad \varepsilon=3 \quad \nu=0$$

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения



Вид распределения Лапласа при различных параметрах масштаба и сдвига

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения

3. *Нормальное распределение (Гаусса)*

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ — плотность распределения

Величина μ — математическое ожидание (мода, медиана),
величина σ — СКО.

Стандартным нормальным распределением называется нормальное распределение с математическим ожиданием μ = 0 и СКО σ = 1.

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения

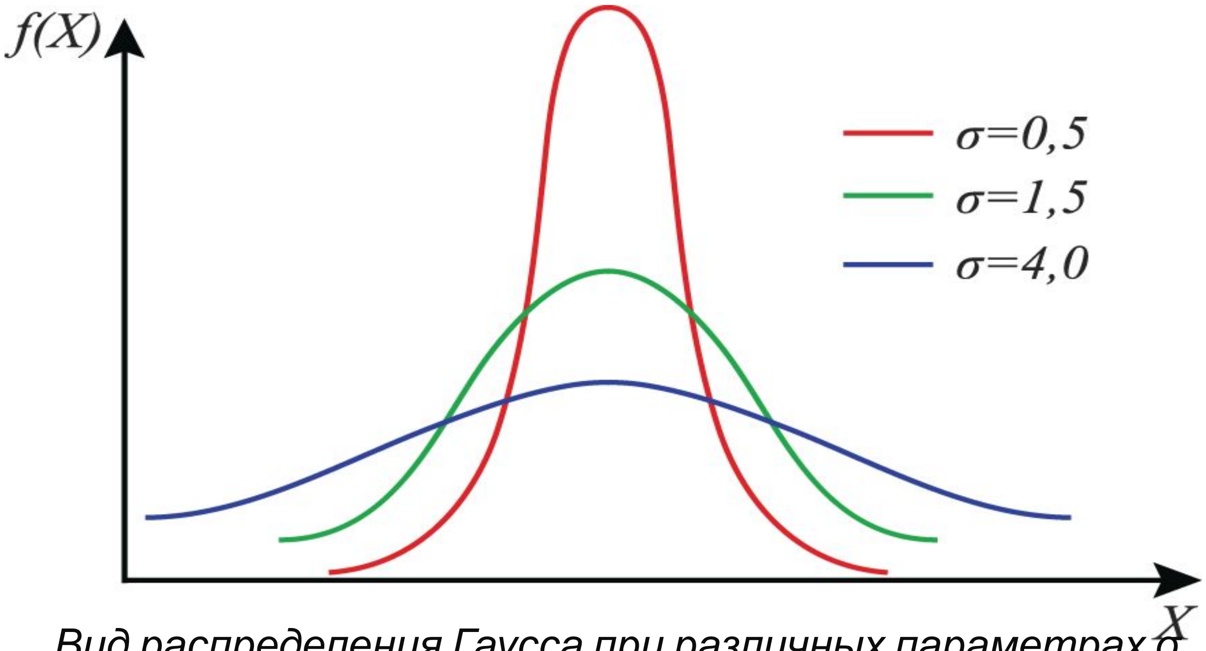
3. *Нормальное распределение (Гаусса)*

$$F(X) = \frac{1}{2}\left(1 + erf\left(\frac{X-\mu}{\sqrt{2\sigma^2}}\right)\right)$$ — функция распределения

$$erf(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^X e^{-t^2}\,dt$$ — функция ошибок

Распределения случайных величин

Экспоненциальные распределения



Вид распределения Гаусса при различных параметрах σ

Распределения случайных величин

Семейство распределений Стьюдента

1. *Распределение Стьюдента (t-распределение)*

Пусть ξ_0, ξ_1 … ξ_m — независимые нормально распределенные случайные величины с параметрами (*0, σ*). Пусть случайная величина t задается выражением:

$$t_m = \frac{\xi_0}{\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\xi_i^2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

Распределения случайных величин

Семейство распределений Стьюдента

1. *Распределение Стьюдента (t-распределение)*

Тогда плотность распределения случайной величины *t:*

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi m}} \cdot \frac{\Gamma\left(\dfrac{m+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{m}{2}\right)} \cdot \left(1 + \frac{t^2}{m}\right)^{-\frac{m+1}{2}}$$

m — число степеней свободы.

Распределения случайных величин

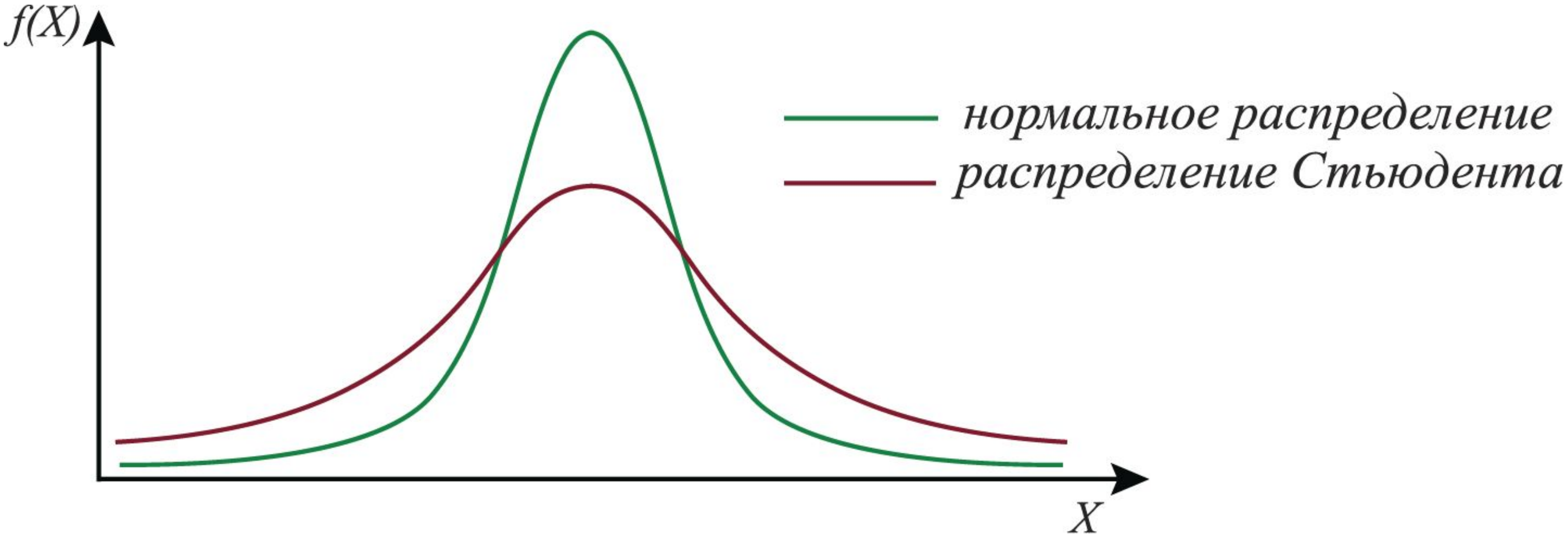
Семейство распределений Стьюдента

Свойства распределения Стьюдента

1. При m>1 математическое ожидание = медиана = мода =0; при m=1 математическое ожидание не определено, медиана = мода =X_0;
2. Дисперсия (СКО) определена при m>2 и равна $D_t(m) = \frac{m}{m-2}$;
3. Коэффициент асимметрии = 0 при m>3, при m<3 не определен;
4. Коэффициент эксцесса $\varepsilon_t(m) = \frac{6}{m-4}$ при m>4, при m<4 не определен.

Распределения случайных величин

Семейство распределений Стьюдента

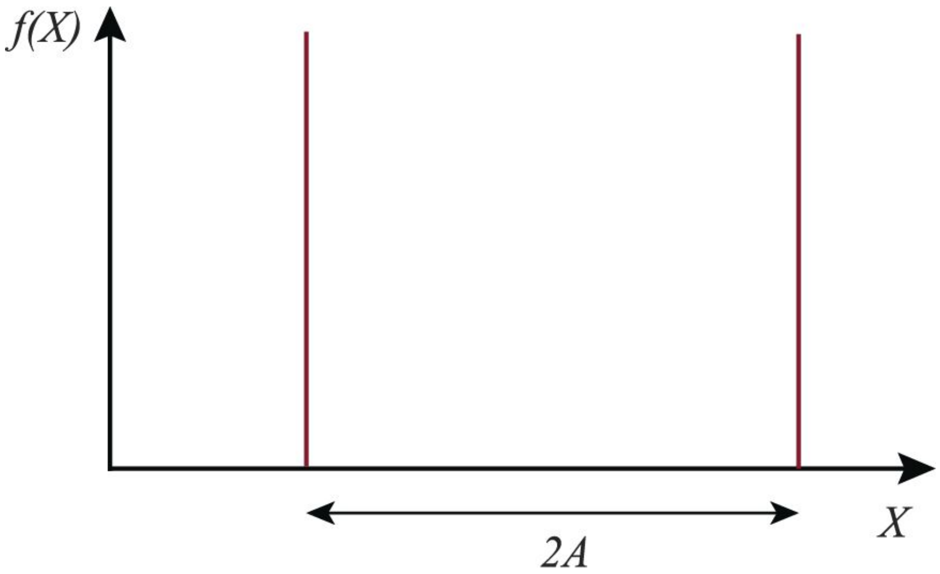


Плотность распределения Стьюдента и плотность нормального распределения

Распределения случайных величин

Двухмодальные распределения

1. *Дискретное двузначное распределение*



$$f(X) = 0{,}5 \cdot \delta(X + A) + 0{,}5 \cdot \delta(X - A)$$

$$МО:\ M[X] = A$$

$$СКО:\ \sigma = A$$

Распределения случайных величин

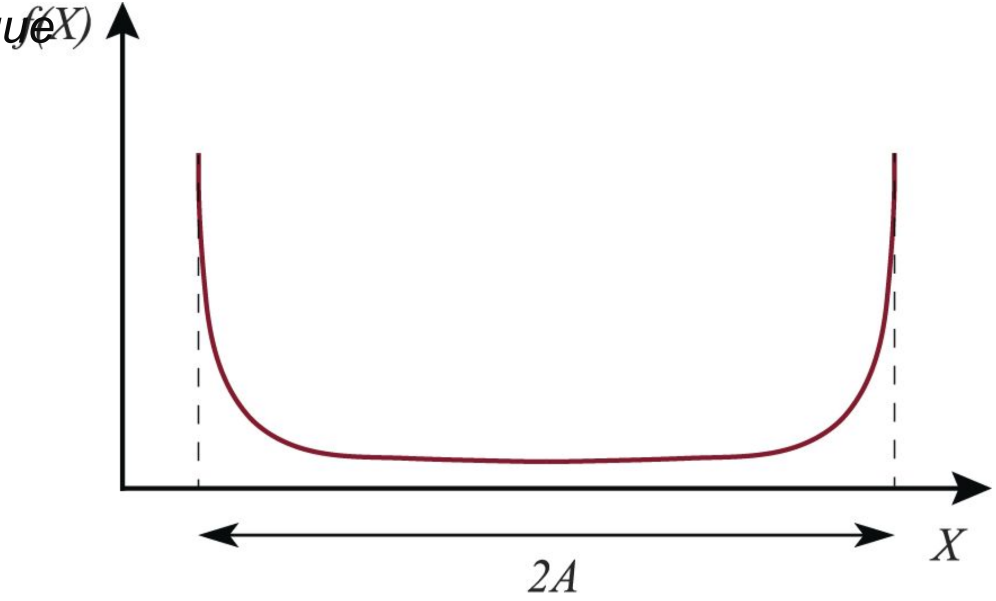
Двухмодальные распределения

2. *Арксинусоидальное распределение*

$$f(X)=\frac{1}{\pi(\sqrt{A^2-X^2})}$$

$$MO:\ M[X]=?$$

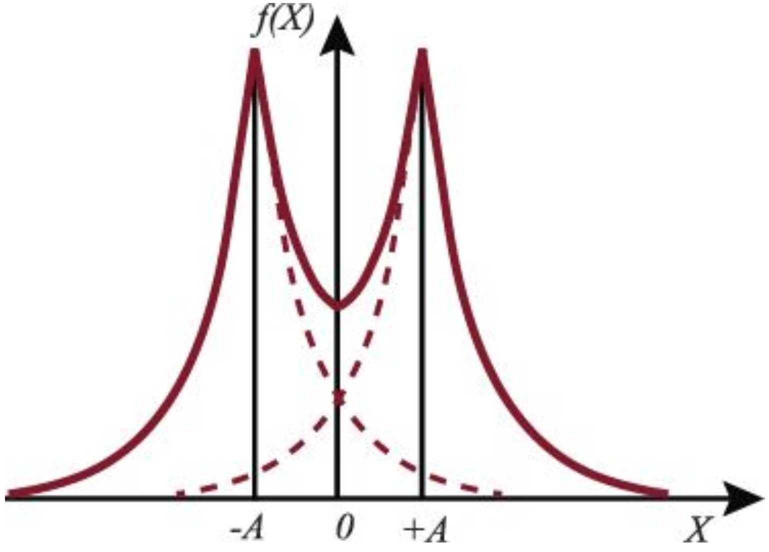
$$CKO:\ \sigma=\frac{A}{\sqrt{2}}$$

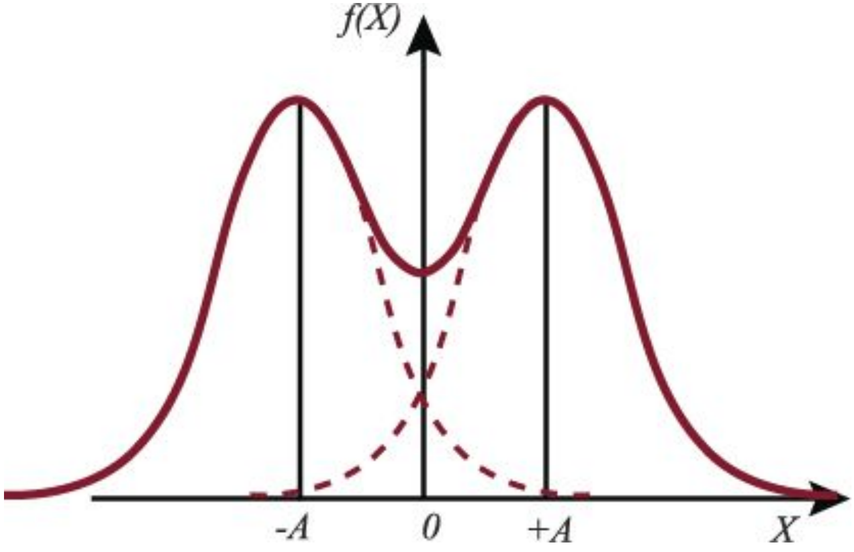


Распределения случайных величин

Двухмодальные распределения

3. *Остро- и кругловершинные двухмодальные распределения*





Оценка результата измерения

Точечная оценка параметра — оценка параметра, выраженная одним числом.

Оценка называется ***состоятельной***, если при увеличении числа наблюдений она
стремится к истинному значению оцениваемой величины.

Оценка называется ***несмещенной***, если ее математическое ожидание равно истинному значению оцениваемой величины.

Оценка называется ***эффективной***, если ее дисперсия является наименьшей из всех возможных точечных оценок.

Оценка результата измерения

Точечной оценкой математического ожидания результата измерений является среднее арифметическое значение измеряемой величины:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$$

Точечная оценка дисперсии определяется по формуле:

$$\widetilde{D}[X] = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$$

Оценка результата измерения

Точечная оценка среднего квадратического отклонения определяется по формуле:

$$\tilde{\sigma} = S_X = \sqrt{\tilde{D}[X]} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}, \quad S_X \xrightarrow[n\to\infty]{} \sigma$$

Среднее квадратическое отклонение результата измерения (показатель отклонения значения самого среднего арифметического):

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2} = \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

Оценка результата измерения

Для группы из *n* наблюдений, распределённых по нормальному закону: $\mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ $\sigma = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2}{n-1}}$

$$f(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(X-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$ — нормальное распределение

Введем величину погрешности $\Delta X = X - \mu$

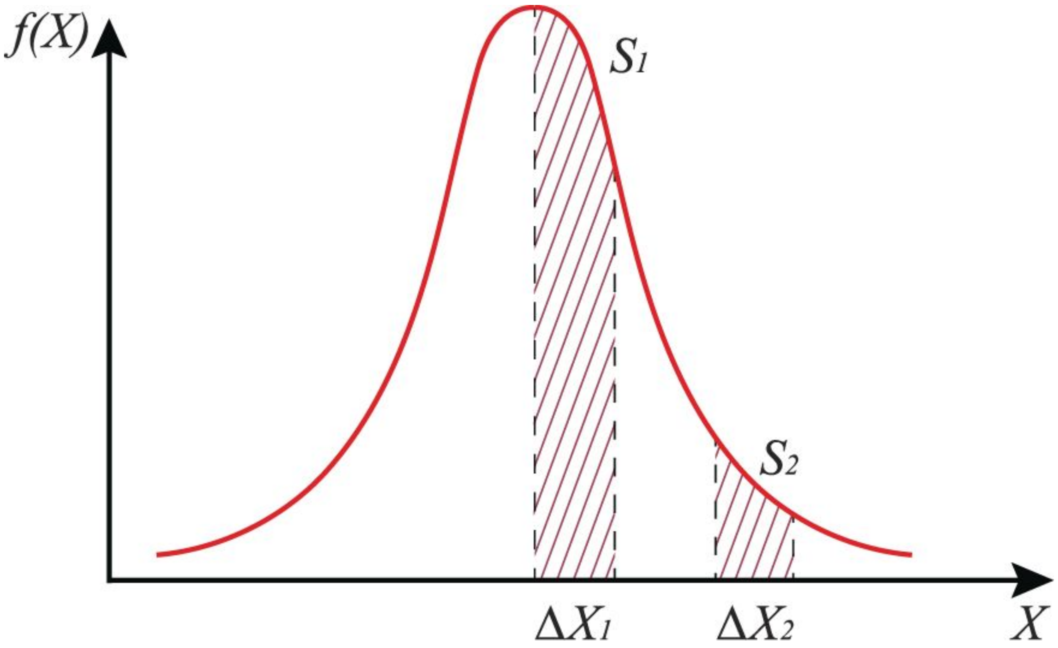
$$f(\Delta X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\Delta X)^2}{2\sigma^2}}$$ — кривая нормального распределения случайных погрешностей

Оценка результата измерения

Свойства распределения случайных погрешностей

1. Кривая нормального распределения погрешностей симметрична относительно оси ординат;
2. Математическое ожидание случайной погрешности равно нулю;
3. Чем меньше СКО нормального распределения, тем меньше рассеяние результатов наблюдений и тем больше вероятность того, что большинство случайных погрешностей в них будет мало;
4. При нормальном законе распределения малые погрешности будут встречаться чаще, чем большие.

Оценка результата измерения



Оценка результата измерения

Введем **_нормированную случайную величину_**: $t = \dfrac{X - \mu}{\sigma}$

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}}$$ — плотность распределения

$$F(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ — функция распределения

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{0}^{t} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$ — функция Лапласа

$$\Phi(-\infty) = -0{,}5; \;\; \Phi(0) = 0;$$
$$\Phi(+\infty) = 0{,}5; \;\; \Phi(t) = \Phi(-t);$$

$$F(t) = 0{,}5 + \Phi(t)$$ — связь функции распределения и функции Лапласа

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

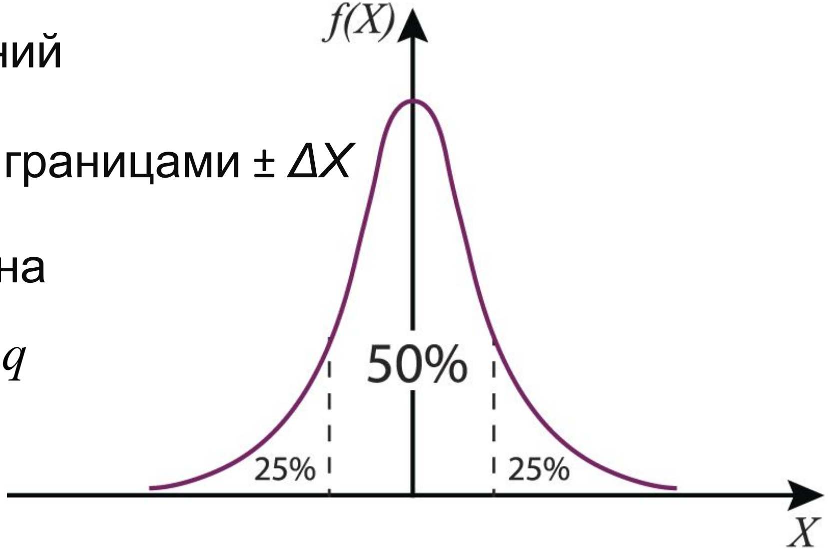
Квантильные оценки — интервал от *–ΔX(P)* до *+ΔX (P)*, на котором с заданной вероятностью *P* встречаются *P×100%* всех возможных значений случайной погрешности.

Доверительный интервал — интервал с границами ± *ΔX (P)*.

Доверительная вероятность — величина

$$P\{X_{ниж} < X < X_{верх}\} = 1 - q$$

где *q* — уровень значимости, $X_{ниж}$ и $X_{верх}$ — нижняя и верхняя границы интервала.

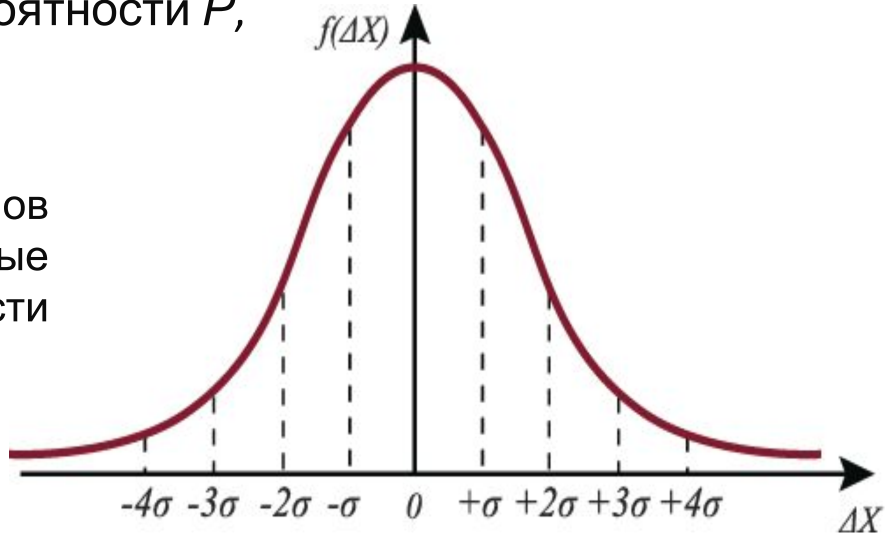


Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Доверительные границы случайной погрешности *ΔX (P)*, соответствующие доверительной вероятности *P*, находят по формуле: $\Delta X(P) = t\sigma$

Границы доверительных интервалов и соответствующие им доверительные вероятности

$t\sigma$	P
$\pm 1\sigma$	0,68
$\pm 2\sigma$	0,95
$\pm 3\sigma$	0,997
$\pm 4\sigma$	0,999



Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Для получения интервальной оценки многократных наблюдений нормально распределенной случайной величины необходимо:

1. Определить точечные оценки математическое ожидание $\overline{X}$ и СКО S_X случайной величины:

$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i, \qquad S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Xi - \overline{X})^2}$$

2. Выбрать доверительную вероятность *P* из рекомендуемого ряда (0,90; 0,95; 0,99).

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

3. Найти верхнюю и нижнюю границы доверительного интервала. Координаты границ должны удовлетворять следующим условиям:

$$F(X_{ниж}) = 1 - P/2, \qquad F(X_{верх}) = 1 + P/2$$

В этом случае ширину доверительного интервала можно представить как:

$$P\left\{\overline{X} - z_p \frac{S_X}{\sqrt{n}} \leq X \leq \overline{X} + z_p \frac{S_X}{\sqrt{n}}\right\} = 2\Phi(z_p)$$

где $\Delta X(P) = z_p \dfrac{S_X}{\sqrt{n}}$ — доверительная граница погрешности результата измерений, где z_p — квантильный множитель (критическое значение).

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Для определения численного значения интервала *ΔX(P)* необходимо поделить значение *P* пополам, затем найти в таблице Z-распределения соответствующее значение. По вертикали отложены десятые доли численного значения z_p, по горизонтали – сотые. Затем подставить полученное значение z_p в формулу

$$\Delta X(P) = z_p \frac{S_X}{\sqrt{n}}$$

4. Ответ $\overline{X} + z_p \frac{S_X}{\sqrt{n}}$ при заданном уровне доверительной вероятности.

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (1)

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.0000	0.0040	0.0080	0.0120	0.0160	0.0199	0.0239	0.0279	0.0319	0.0359
0.1	0.0398	0.0438	0.0478	0.0517	0.0557	0.0596	0.0636	0.0675	0.0714	0.0753
0.2	0.0793	0.0832	0.0871	0.0910	0.0948	0.0987	0.1026	0.1064	0.1103	0.1141
0.3	0.1179	0.1217	0.1255	0.1293	0.1331	0.1368	0.1406	0.1443	0.1480	0.1517
0.4	0.1554	0.1591	0.1628	0.1664	0.1700	0.1736	0.1772	0.1808	0.1844	0.1879
0.5	0.1915	0.1950	0.1985	0.2019	0.2054	0.2088	0.2123	0.2157	0.2190	0.2224

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (2)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.6	0.2257	0.2291	0.2324	0.2357	0.2389	0.2422	0.2454	0.2486	0.2517	0.2549
0.7	0.2580	0.2611	0.2642	0.2673	0.2704	0.2734	0.2764	0.2794	0.2823	0.2852
0.8	0.2881	0.2910	0.2939	0.2967	0.2995	0.3023	0.3051	0.3078	0.3106	0.3133
0.9	0.3159	0.3186	0.3212	0.3238	0.3264	0.3289	0.3315	0.3340	0.3365	0.3389
1.0	0.3413	0.3438	0.3461	0.3485	0.3508	0.3531	0.3554	0.3577	0.3599	0.3621
1.1	0.3643	0.3665	0.3686	0.3708	0.3729	0.3749	0.3770	0.3790	0.3810	0.3830

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (3)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.2	0.3849	0.3869	0.3888	0.3907	0.3925	0.3944	0.3962	0.3980	0.3997	0.4015
1.3	0.4032	0.4049	0.4066	0.4082	0.4099	0.4115	0.4131	0.4147	0.4162	0.4177
1.4	0.4192	0.4207	0.4222	0.4236	0.4251	0.4265	0.4279	0.4292	0.4306	0.4319
1.5	0.4332	0.4345	0.4357	0.4370	0.4382	0.4394	0.4406	0.4418	0.4429	0.4441
1.6	0.4452	0.4463	0.4474	0.4484	0.4495	0.4505	0.4515	0.4525	0.4535	0.4545
1.7	0.4554	0.4564	0.4573	0.4582	0.4591	0.4599	0.4608	0.4616	0.4625	0.4633

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (4)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
1.8	0.4641	0.4649	0.4656	0.4664	0.4671	0.4678	0.4686	0.4693	0.4699	0.4706
1.9	0.4713	0.4719	0.4726	0.4732	0.4738	0.4744	0.4750	0.4756	0.4761	0.4767
2.0	0.4772	0.4778	0.4783	0.4788	0.4793	0.4798	0.4803	0.4808	0.4812	0.4817
2.1	0.4821	0.4826	0.4830	0.4834	0.4838	0.4842	0.4846	0.4850	0.4854	0.4857
2.2	0.4861	0.4864	0.4868	0.4871	0.4875	0.4878	0.4881	0.4884	0.4887	0.4890
2.3	0.4893	0.4896	0.4898	0.4901	0.4904	0.4906	0.4909	0.4911	0.4913	0.4916

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (5)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
2.4	0.4918	0.4920	0.4922	0.4925	0.4927	0.4929	0.4931	0.4932	0.4934	0.4936
2.5	0.4938	0.4940	0.4941	0.4943	0.4945	0.4946	0.4948	0.4949	0.4951	0.4952
2.6	0.4953	0.4955	0.4956	0.4957	0.4959	0.4960	0.4961	0.4962	0.4963	0.4964
2.7	0.4965	0.4966	0.4967	0.4968	0.4969	0.4970	0.4971	0.4972	0.4973	0.4974
2.8	0.4974	0.4975	0.4976	0.4977	0.4977	0.4978	0.4979	0.4979	0.4980	0.4981
2.9	0.4981	0.4982	0.4982	0.4983	0.4984	0.4984	0.4985	0.4985	0.4986	0.4986

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (6)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.0	0.4987	0.4987	0.4987	0.4988	0.4988	0.4989	0.4989	0.4989	0.4990	0.4990
3.1	0.4990	0.4991	0.4991	0.4991	0.4992	0.4992	0.4992	0.4992	0.4993	0.4993
3.2	0.4993	0.4993	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4994	0.4995	0.4995	0.4995
3.3	0.4995	0.4995	0.4995	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4996	0.4997
3.4	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4997	0.4998
3.5	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998	0.4998

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений нормального распределения (z-распределение) (7)

Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
3.6	0.4998	0.4998	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.7	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999
3.8	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999	0.4999

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

1. **Определить среднее значение веса учебника для выборки из 1000 шт.**

— Рассчитать среднее значение и стандартное отклонение веса учебников.

$$\overline{X} = 2{,}65\ кг,\quad S_X = 0{,}51\ кг$$

— Выбрать нужный доверительный уровень. *P*=0,95%.

— Определить значение z_p. *P/2*=0,475, следовательно, z_p =1,96.

— Вычислить значение *ΔX(P)*.

$$\Delta X(P) = z_p \frac{S_X}{\sqrt{n}} = 1{,}96 \cdot \frac{0{,}5}{\sqrt{1000}} = 0{,}03\ кг$$

— Ответ $2{,}65 \pm 0{,}03$ при *P*=0,95.

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Для нормального распределение при неизвестной дисперсии вводится дробь Стьюдента:

$$t = \frac{\overline{X} - X_m}{S_{\overline{X}}} = \frac{\overline{X} - Q}{S_{\overline{X}}} = \sqrt{n}\,\frac{\overline{X} - Q}{S_X}$$

где Q – истинное значение измеряемой величины, X_M – координата центра распределения, $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ – его точечная оценка,

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$ – точечная оценка среднего квадратического отклонения

$$S_{\overline{X}} = \frac{S_X}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2}$$ – среднее квадратическое отклонение результата измерения

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Вероятность того, что дробь Стьюдента в результате выполненных наблюдений примет некоторое значение в интервале $[-t_p; +t_p]$:

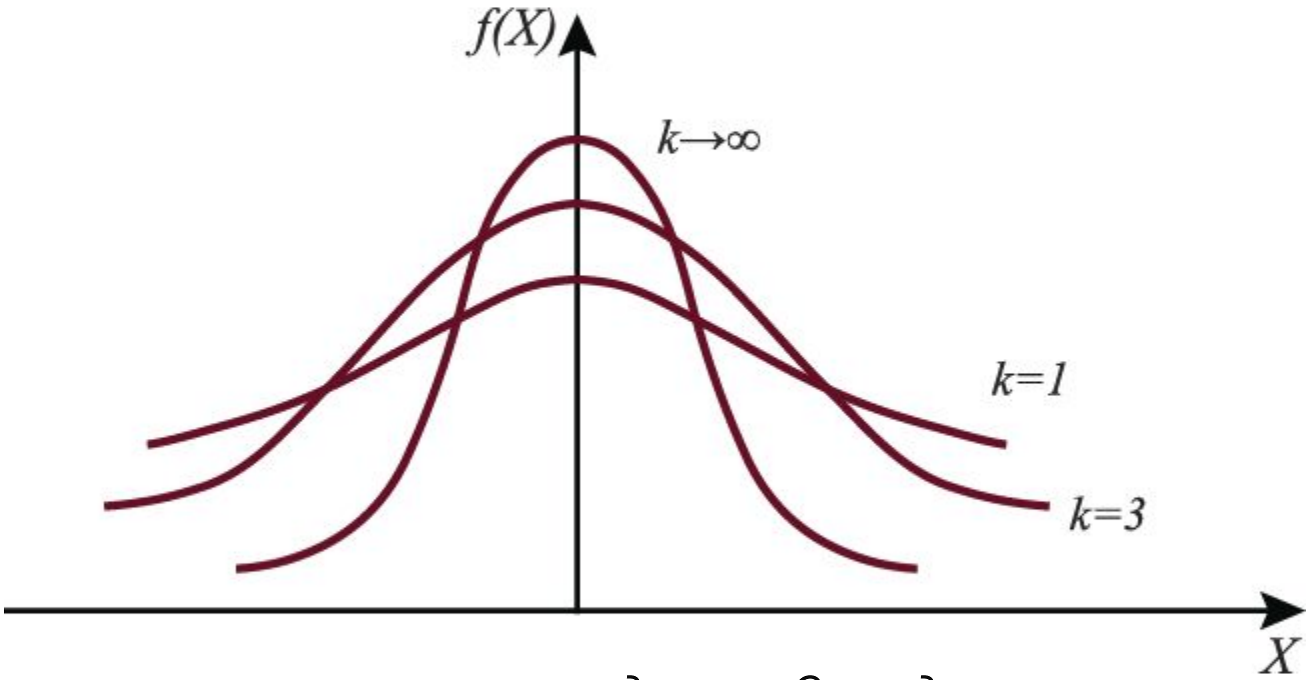
$$P\left\{-t_p \le \frac{\overline{X}-Q}{S_{\overline{X}}} \le +t_p\right\} = P\left\{\left|\overline{X}-Q\right| \le \frac{t_p S_X}{\sqrt{n}}\right\} = \int_{-t_p}^{+t_p} S(t,m)dt = 2\int_{0}^{t_p} S(t,m)dt$$

$\Delta X(P) = \varepsilon = \pm t_p S_{\overline{X}} = \pm t_p \frac{S_X}{\sqrt{n}}$, где ε – доверительная граница погрешности измерений

$m = n-1$ – число степеней свободы.

Ответ $\overline{X} + t_p \frac{S_X}{\sqrt{n}}$ при заданном уровне доверительной вероятности.

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный



Зависимость плотности распределения Стьюдента от значения k

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений распределения Стьюдента (t-распределение) (1)

n \ α	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
2	2,0	3,1	6,3	12,7	31,8	63,7
3	1,3	1,9	2,9	4,3	7,0	9,9
4	1,3	1,6	2,4	3,2	4,5	5,8
5	1,2	1,5	2,1	2,8	3,7	4,6
6	1,2	1,5	2,0	2,6	3,4	4,0
7	1,1	1,4	1,9	2,4	3,1	3,7
8	1,1	1,4	1,9	2,4	3,0	3,5
9	1,1	1,4	1,9	2,3	2,9	3,4
10	1,1	1,4	1,8	2,3	2,8	3,3
11	1,1	1,4	1,8	2,2	2,8	3,2

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

Таблица значений распределения Стьюдента (t-распределение) (2)

n \ α	0,70	0,80	0,90	0,95	0,98	0,99
12	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1
13	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,1
14	1,1	1,4	1,8	2,2	2,7	3,0
15	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	3,0
16	1,1	1,3	1,8	2,1	2,6	2,9
17	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9
18	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9
19	1,1	1,3	1,7	2,1	2,6	2,9
20	1,1	1,3	1,7	2,1	2,5	2,9
...	...	...	...	...	...	...
∞	1,0	1,3	1,6	2,0	2,3	2,6

Оценка случайных погрешностей. Доверительная вероятность и доверительный интервал

2. **Даны следующие значения длительности импульса: 40,6, 40,0, 40,1, 39,7, 40,2, 39,8, 41,0. Определить результат измерения.**

— Рассчитать среднее значение и стандартное отклонение выборки.

$$\overline{X} = 40{,}2\ c,\ \ S_{\overline{X}} = 0{,}2\ c$$

— При n=6 и доверительной вероятности P= 80 t_p = 1,5.

$$t_p S_{\bar{X}} = 1{,}5 \cdot 0{,}2 = 0{,}3$$

— Ответ $40{,}2 \pm 0{,}3$ при *P*=0,95.

Грубые погрешности и методы их исключения

Грубая погрешность, или ***промах*** – результат измерения, выделяющийся из общей выборки. Причины возникновения промахов:

— ошибка измерения;
— неправильный отсчет по шкале измерительного прибора, происходящий из-за неверного учета цены малых делений шкалы;
— неправильная запись результата наблюдений, значений отдельных мер использованного набора;
— необычная природа входных данных;
— внезапные и кратковременные изменения условий;
— изменения или оставшиеся незамеченными неисправности в аппаратуре.

Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий «трех сигм»

Результат, возникающий с вероятностью q < 0,003, маловероятен, и его можно считать промахом, если $\left|\overline{X} - X_i\right| > 3S_X$.

где q — уровень значимости того, что сомнительный результат действительно мог иметь место в данной совокупности результатов измерений, величина $3S_X$ — граница цензурирования.

При этом среднее значение и СКО рассчитываются без учета подозрительных значений.

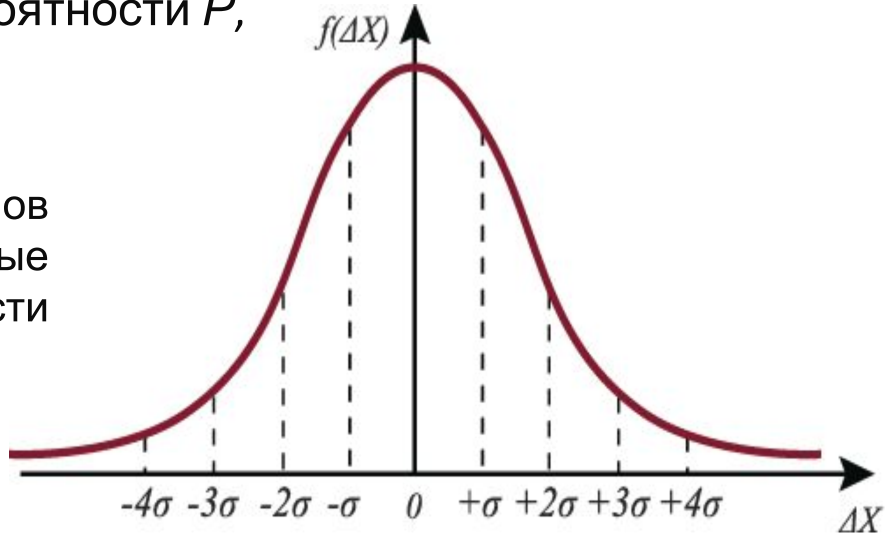
Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий «трех сигм»

Доверительные границы случайной погрешности *ΔX (P)*, соответствующие доверительной вероятности *P*, находят по формуле: $\Delta X(P) = t\sigma$

Границы доверительных интервалов и соответствующие им доверительные вероятности

$t\sigma$	P
$\pm 1\sigma$	0,68
$\pm 2\sigma$	0,95
$\pm 3\sigma$	0,997
$\pm 4\sigma$	0,999



Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий «трех сигм»

1. **Даны следующие значения измеряемой величины: 10,2; 10,3; 9,9; 10,1; 10,0;**

9,9; 10,2; 9,8; 9,7; 10,1; 10,2; 9,9; 9,6; 10,0; 9,8; 10,4; 9,6; 9,9; 10,3; 9,7; 11,2; 9,9; 10,0; 9,8; 10,2; 9,6; 10,1; 9,7; 10,1; 9,8; 10,3. Проверить на наличие грубых ошибок с помощью критерия «трех сигм».

— Ранжируем результаты в порядке возрастания: 9,6; 9,6; 9,6; 9,7; 9,7; 9,7; 9,8; 9,8; 9,8; 9,8; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 9,9; 10,0; 10,0; 10,0; 10,1; 10,1; 10,1; 10,1; 10,2; 10,2; 10,2; 10,2; 10,3; 10,3; 10,3; 10,4; 11,2.

— Откидываем крайние значения: 11,2

— Находим среднее значение и СКО $\overline{X} = 9{,}7, \quad S_X = 0{,}4$

Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий «трех сигм»

1. **Даны следующие значения измеряемой величины: 10,2; 10,3; 9,9; 10,1; 10,0;**

9,9; 10,2; 9,8; 9,7; 10,1; 10,2; 9,9; 9,6; 10,0; 9,8; 10,4; 9,6; 9,9; 10,3; 9,7; 11,2; 9,9; 10,0; 9,8; 10,2; 9,6; 10,1; 9,7; 10,1; 9,8; 10,3. Проверить на наличие грубых ошибок с помощью критерия «трех сигм».

— Величина границы цензурирования 1,2.

— Проверяем, сколько значений из ряда наблюдений выходят за границы [9,7-1,2; 9,7+1,2] = [8,5;10,9]

— Величина 11,2 является промахом.

— При необходимости процедура повторяется.

Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий Романовского

Отбрасываются подозрительные результаты наблюдений, для оставшихся рассчитываются среднее значение и СКО.

Затем для подозрительных результатов рассчитывается критерий $\beta_{calc} = \left| \frac{X_i - \overline{X}}{S_X} \right|$

Сравниваются величины β_{calc} и β_{tab} при заданном уровне значимости.
Если $\beta_{calc} > \beta_{tab}$ при заданном уровне значимости, то подозрительный результат считается промахом.

Грубые погрешности и методы их исключения

Критерий Романовского

Объем выборки n	Предельное значение β_{tab} при уровне значимости q				
	0,100	0,050	0,0010	0,005	0,001
1	2	3	4	5	6
1	1,282	1,645	2,326	2,576	3,090
2	1,632	1,955	2,575	2,807	3,290
3	1,818	2,121	2,712	2,935	3,403
4	1,943	2,234	2,806	3,023	3,481
5	2,036	2,319	2,877	3,090	3,540
6	2,111	2,386	2,934	3,143	3,588
7	2,172	2,442	2,981	3,188	3,628
8	2,224	2,490	3,022	3,227	3,662
9	2,269	2,531	3,057	3,260	3,692
10	2,309	2,568	3,089	3,290	3,719
15	2,457	2,705	3,207	3,402	3,820
20	2,559	2,799	3,289	3,480	3,890

Грубые погрешности и методы их исключения

Вариационный критерий Диксона

Ряд измерений ранжируется по возрастанию

Для подозрительных результатов рассчитывается значение критерия Диксона:

$$Z_q = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_1} \ (\textit{наибольшее значение}) \quad Z_q = \frac{X_2 - X_1}{X_n - X_1} \ (\textit{наименьшее значение})$$

Сравниваются величины Z_q и Z_{tab} при заданном уровне значимости.

Если $Z_q > Z_{tab}$ при заданном уровне значимости, то подозрительный результат считается промахом.

Грубые погрешности и методы их исключения

n	Доверительная вероятность			
	0,9	0,95	0,99	0,995
3	0,886	0,941	0,988	0,994
4	0,679	0,765	0,889	0,926
5	0,557	0,642	0,780	0,821
6	0,482	0,560	0,698	0,740
7	0,434	0,507	0,637	0,680
8	0,545	0,607	0,710	0,746
9	0,505	0,565	0,667	0,700
10	0,474	0,531	0,632	0,664
11	0,517	0,576	0,679	0,713
12	0,490	0,546	0,642	0,675
13	0,467	0,521	0,615	0,649
14	0,492	0,546	0,641	0,674
15	0,472	0,525	0,616	0,647
16	0,454	0,507	0,595	0,624

Грубые погрешности и методы их исключения

n	Доверительная вероятность			
	0,9	0,95	0,99	0,995
17	0,438	0,490	0,577	0,605
18	0,424	0,475	0,561	0,589
19	0,412	0,462	0,547	0,575
20	0,401	0,450	0,537	0,562
21	0,391	0,440	0,524	0,551
22	0,382	0,430	0,514	0,541
23	0,374	0,421	0,505	0,532
24	0,367	0,413	0,497	0,524
25	0,360	0,406	0,489	0,516
26	0,354	0,399	0,486	0,508
27	0,348	0,393	0,475	0,501
28	0,342	0,387	0,469	0,495
29	0,337	0,381	0,463	0,489
30	0,332	0,376	0,457	0,483

Грубые погрешности и методы их исключения

Вариационный критерий Диксона

2. **Даны следующие значения измеряемой величины: 25; 28; 22; 26; 24; 48. Проверить последний результат на промах.**

— Ранжируем полученный ряд 22; 24; 25; 26; 28; 48.

— Рассчитываем значение критерия Диксона:

$$Z_q = \frac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_1} = \frac{48-28}{48-22} = 0{,}77$$

— $Z_q = 0{,}77 > Z_{tab} = 0{,}56$ при уровне значимости q=0,05. Следовательно, результат 48 является промахом.

Грубые погрешности и методы их исключения

Различные критерии для исключения промахов при нормальном распределении случайной величины

$n \le 10$	$n \le 20$	$n > 20...50$	$n \le 10$	$n < 50$	$n > 20...50$
Диксона	**Романовского**	**Трех сигм**	**Шовине**	**Граббса**	**Ирвина**
Условие того, что подозрительный результат является промахом					
$Z_q = \dfrac{X_n - X_{n-1}}{X_n - X_1}$	$\beta_{calc} = \left\lvert \dfrac{X_i - \overline{X}}{S_X} \right\rvert$	$\lvert \overline{X} - X_i \rvert > 3S_X$	$n=3: \lvert \overline{X} - X_i \rvert > 1.6S_X$ $n=6: \lvert \overline{X} - X_i \rvert > 1.7S_X$ $n=8: \lvert \overline{X} - X_i \rvert > 1.9S_X$ $n=10: \lvert \overline{X} - X_i \rvert > 2.0S_X$	$\dfrac{\lvert \overline{X} - X_i \rvert}{S_X} \ge \vartheta_p$	$\dfrac{X_{n+1} - X_n}{S_X} > \Pi_q$
При расчете $\overline{X}$ и S_X подозрительное значение исключено			*При расчете $\overline{X}$ и S_X подозрительное значение учитывается*		

Грубые погрешности и методы их исключения

Различные критерии для исключения промахов при распределении случайной величины, отличном от нормального

Критическое значение $d = d(q, n)$ – при превышении значения которого результат по определению является промахом.

Уровень значимости – вероятность того, что некий результат измерения является промахом: $P\{X_i \leq d\} = q$

Функция распределения: $P\{X_1 \leq X \leq X_2\} = F(X_2) - F(X_1)$

Для известной функции распределения значение *d* находится из последнего уравнения.