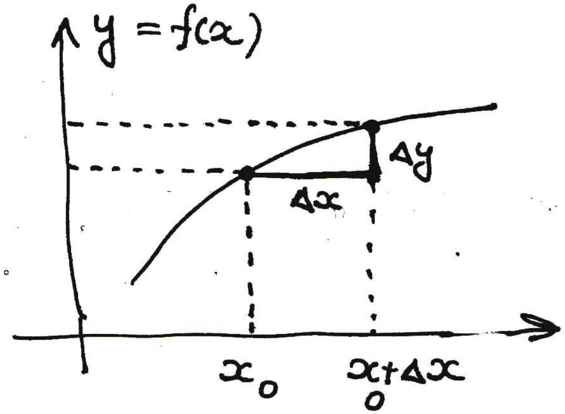
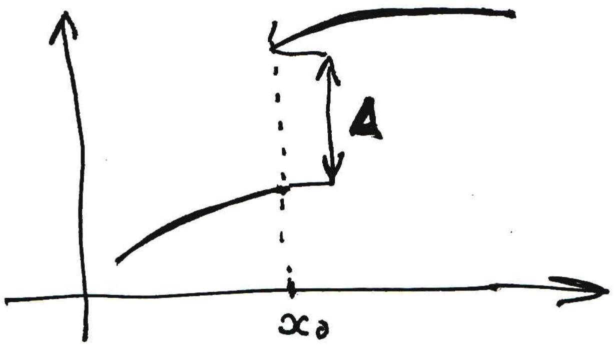
Математический анализ

Лекция -6ю

Непрерывность функций





$\Delta f = \Delta$ **f**($= f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ | приращ. ф. в точке x_0

Определение. Функция $f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. непрерывной в точке x_0, если

$$\lim_{\Delta x\to 0} \Delta f = 0.$$

Подробно: $\lim\limits_{\Delta x\to 0} \Delta f = \lim\limits_{\Delta x\to 0} \{f(x_0+\Delta x) - f(x_0)\} = 0 \Rightarrow$

$$\lim_{\Delta x\to 0} f(x_0+\Delta x) = f(x_0)$$

$x_0 + \Delta x = x \to x_0$ при $\Delta x \to 0$

Производная функции

Таким образом, приходим к важнейшему понятию :

<u>Определение.</u> Пусть ф. f(x) определена в окр. т. x U(x)

Если существует предел

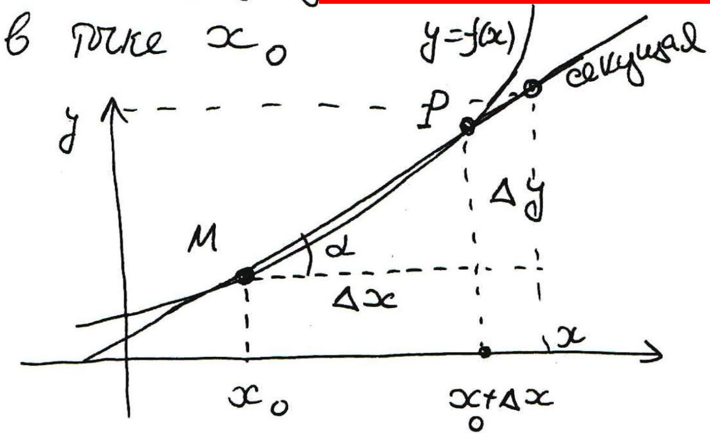
$$f'(x) \overset{def}{=} \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

то он наз. <u>производной функции f в точке x</u>.

Наряду с обозначением производной $f'(x)$ использ. также: $\frac{df}{dx}(x)$, $\dot{f}(t)$

Процедура вычисления производной наз. дифференцированием

Рассм. задачу о касательной к графику функции $y=f(x)$ в точке x_0



Касательной наз. предельное положение секущей при P→ M

Ур-е секущей – ур-е прямой, проходящей через точку $M(x_0, f(x_0))$ с угловым коэфф. $k = tg\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$

$k = f'(a)$

Пусть (x, y) текущая точка секущей, где

$$\frac{y - f(x_0)}{x - x_0} = tg\alpha = k = \frac{\Delta y}{\Delta x} \Rightarrow$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta x}(x - x_0) + f(x_0)$$ | ур-е секущей

При $\Delta x \to 0$ $P \to M$ и ур-е секущей переходит

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$$ | ур-е касательной

Производная сложной функции

Теорема. Если функция $y=f(x)$ имеет произв. в т. x_0, а функция $z=g(y)$ имеет производную в т. $y_0=f(x_0)$, то сложная функция $z(x)=g(f(x))$ имеет в т. x_0 производную $z'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)=g'(f(x_0))\cdot f'(x_0)$

Док-во.

$$\Delta f = f(x_0+\Delta x)-f(x_0)$$

$$\frac{g(f(x_0+\Delta x))-g(f(x_0))}{\Delta x}=\frac{g(f(x_0)+\Delta f)-g(f(x_0))}{\Delta f}\cdot\frac{\Delta f}{\Delta x}$$

$\Delta f\to 0$ при $\Delta x\to 0$

Дифференциал функции

Определение. Функция $y = f(x)$, определённая в $U(x_0)$, наз. дифференцируемой в точке x_0, если

$$\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = A(x_0) \cdot \Delta x + o(\Delta x), \quad \Delta x \to 0$$

Величина $A(x_0) \cdot \Delta x$ наз. дифференциалом функции f в точке x_0 и обознач. $df(x_0)$ или dy

Таким образом, $\Delta y = dy + o(\Delta x)$, $\Delta x \to 0$

т.е. дифференциал – это главная часть приращения при $\Delta x \to 0$, линейная относительно Δx.

Основные теоремы дифференциального исчисления

1

Теорема (Ферма). Если функция $y=f(x)$ дифференцируема в точке её локального экстремума x_0, то $f'(x_0)=0$.

Док-во. Пусть ф. $y=f(x)$ имеет в т. x_0 лок. минимум $\Rightarrow$

$$\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) \qquad f(x)-f(x_0)\geq 0$$

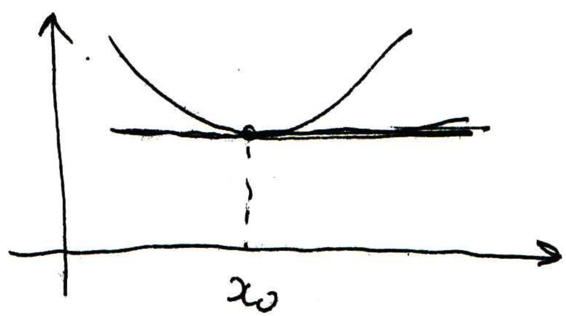
$$f'_-(x_0)=\lim_{x\to x_0-0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\leq 0$$

$$f'_+(x_0)=\lim_{x\to x_0+0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\geq 0$$

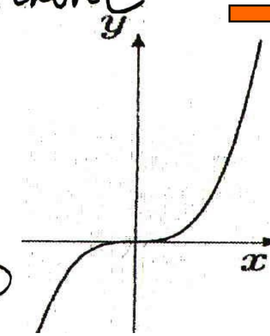
док-во аналогичн. если $f(x_0)$ – лок. ма

$$f'(x_0)=f'_-(x_0)=f'_+(x_0) \Rightarrow f'(x_0)=0$$

Замечание. 1)



Касательная к графику ф. $y=f(x)$ горизонтальна



2) необх., но не достаточное условие лок. экстремума

например. $y=x^3$. $y'=3x^2=0$ при $x=0$

нет локального экстремума!

Теорема 5.2 (Ролля). Если функция $y = f(x)$

1) непрерывна на отрезке $[a, b]$;

2) *дифференцируема в интервале* (a, b);

3) на концах отрезка принимает равные значения $(f(a) = f(b))$,

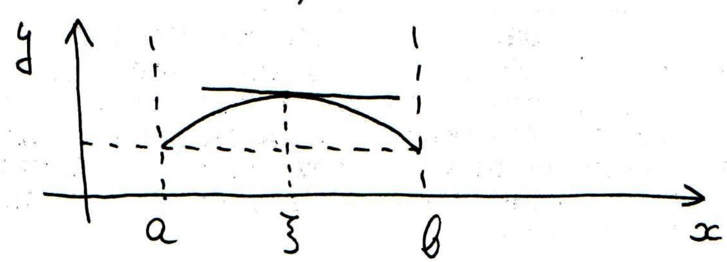
то между точками a и b найдется, по крайней мере, одна точка c $(a < c < b)$, в которой $f'(c) = 0$.

Док-во. В силу непр-ти $f(x)$ на $[a,b]$ найдутся по 2-й т. Вейерштасса точки $c_1, c_2 \in [a,b]$: $f(c_1) = \min\limits_{[a,b]} f = m$, $f(c_2) = \max\limits_{[a,b]} f = M$

Если $m = M$, то $f(x) = \text{const}$ и $f'(\xi) = 0$ $\forall \xi \in (a,b)$

Если $m \neq M$, то $m < M \Leftrightarrow f(c_1) < f(c_2)$ $\Rightarrow$ по т. Ферма (слайд №11) одна из точек c_1, c_2 лежит на (a,b) (в силу $f(a) = f(b)$), её и примем за ξ, $\xi \in (a,b) \Rightarrow U(\xi) \subset (a,b) \Rightarrow f'(\xi) = 0$

Замечание 1.



В частности, между двумя нулями дифференц. функции лежит хотя бы один нуль её производной.

3

Теорема (Коши). Если функции $f(x)$ и $g(x)$ непрерывны на отрезке $[a,b]$, дифференцируемы на интервале (a,b) и $g'(x)\neq 0$ на (a,b), то $\exists\, \xi\in(a,b)$:

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}$$

Док-во. Рассм. лин. комбинацию функций f и g.

$$F(x) = f(x) + \lambda g(x)$$

Число λ выберем так, чтобы $F(a) = F(b) \iff$

$$f(a)+\lambda g(a) = f(b)+\lambda g(b) \implies \lambda = -\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$$

$g(b)\neq g(a)$, в противном случае по теореме Ролля нашлась бы точка $\mu\in(a,b)$: $g'(\mu)=0$, что противоречит условию теоремы.

Теперь ф. $F(x)$ удовл. всем условиям теоремы Ролля $\implies$

$$\exists\ \xi\in(a,b) : \quad F'(\xi) = f'(\xi)+\lambda g'(\xi) = 0 \implies$$

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = -\lambda = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

4

Теорема (Лагранжа). Если ф. $f(x)$ непр. на $[a,b]$ и дифференцируема на (a,b), то $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$\boxed{f(b)-f(a) = f'(\xi)(b-a)}$$

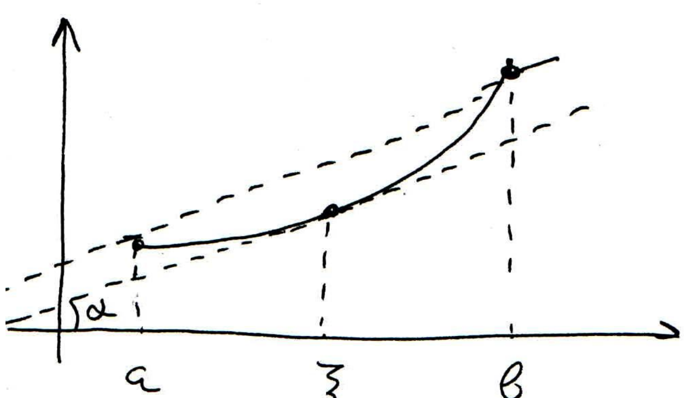
Док-во. Положим в усл. теоремы Коши $g(x) \equiv x$. ▷

Следствие. При условиях теоремы Лагранжа имеет место **формула конечных приращений**:

$$f(b)-f(a) = (b-a)f'\big(a+\theta(b-a)\big), \quad 0<\theta<1,$$

верная как при $a<b$, так и при $a \geq b$.

Геометрический смысл теоремы Лагранжа



касательная $\parallel$ секущей

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(\xi) = \operatorname{tg}\alpha$$

Правило Лопиталя-Бернулли

Теорема

Если функции $f(x), g(x)$ дифференцир. на (a, b),

$$\lim_{x\to a+0} f(x) = \lim_{x\to a+0} g(x) = 0, \quad g'(x) \neq 0 \quad \forall x \in (a,b)$$

и существует (конечный или бесконечный)

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = A \text{, тогда} \Rightarrow \lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = A$$

Док-во. Продолжим $f(x), g(x)$ в точку a по непрерывности, положив $f(a) = g(a) = 0$. Тогда $\forall x \in (a, b)$ $f(x)$ и $g(x)$ непр. на $[a, x]$ и удовл. всем остальным условиям теоремы Коши (дифф. на (a,x) и $g'(t) \neq 0$ на (a,x))

поэтому $\exists\ \xi \in (a, x)$:

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} \quad \Bigg\| \text{ При } \begin{array}{l} x \to a+0 \\ \xi \to a+0 \end{array} \Rightarrow$$

$$\lim_{x\to a+0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{\xi\to a+0} \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = A$$

Замечание. Теорема (при соответствующем изменении её условий) верна при $x \to a-0$ и $x \to a$, $a \neq \infty$ (конечная точка), при $a = \infty$ положим $x = 1/y$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0}\frac{f(1/y)}{g(1/y)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'_y(1/y)}{g'_y(1/y)} = \lim_{y\to 0}\frac{f'(1/y)\left(-\frac{1}{y^2}\right)}{g'(1/y)\left(-\frac{1}{y^2}\right)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Замечание. Неопределённость может быть раскрыта на n шаге, если до этого она сохраняется

$$\boxed{\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim_{x\to a}\frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}}$$

Важные примеры

1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^{\alpha}}{c^{x}}$, $c>1$, $\alpha>0$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^{\alpha}}{c^{x}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha x^{\alpha-1}}{c^{x}\ln c} = \dots = \lim_{x\to+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-n+1)x^{\alpha-n}}{c^{x}(\ln c)^{n}} = 0$$

при $n>\alpha$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^{\alpha}}$, $\alpha>0$ $\left(\dfrac{\infty}{\infty}\right)$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x^{\alpha}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{1}{x}}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{\alpha x^{\alpha}} = 0$$

На $+\infty$:
Логарифмич. ф. растёт медленнее степенной, а степ. функция медленнее показательной c^{x}, $c>1$

Формула Тейлора (Taylor)

Формула Тейлора является одной из жемчужин математического анализа и широко используется и в теоретических исследованиях, и вычислительной практике. Эта формула позволяет адекватно заменить заданную сложным выражением функцию удобным для анализа многочленом.

Рассмотрим задачу приближения функции $f(x)$ в окрестности некоторой точки x_0. В качестве приближений возьмём функции наиболее простого вида — многочлены различных порядков.

Простейший способ приблизить непрерывную в т. x_0 функцию

$$f(x) = f(x_0) + \alpha(x), \text{ где } \alpha(x) = f(x) - f(x_0) \to 0, x \to x_0$$

в силу непрерывности $f(x)$ в т. x_0. Итак, непрерывная в т. x_0 функция $f(x)$ приближается в $U(x_0)$ многочленом $P_0(x) \equiv f(x_0)$

Сл №18

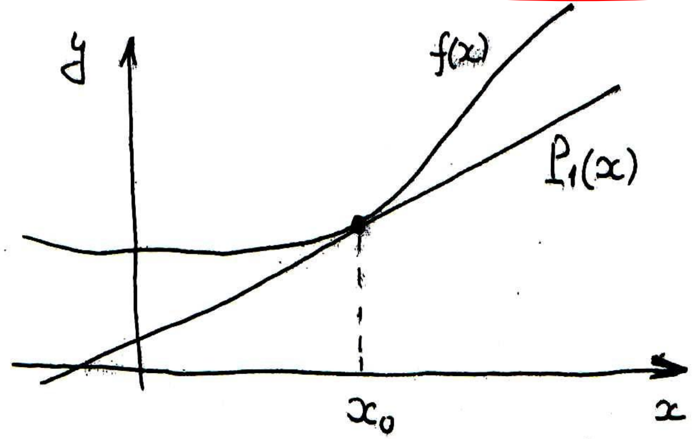
Если функция $f(x)$ дифференцируема в т. x_0, то существует

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)\quad\Longrightarrow$$

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=f'(x_0)+\varepsilon(x),$$ где $\varepsilon(x)\to 0$ при $x\to x_0$ $\Longrightarrow$

$$f(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)+o(x-x_0),\quad x\to x_0$$

Таким образом, дифференцируемая в т. x_0 функция $f(x)$ приближается в $\bar{U}(x_0)$ многочленом $P_1(x)=f(x_0)+f'(x_0)(x-x_0)$, причём



$$P_1(x_0)=f(x_0)$$

$$P_1'(x_0)=f'(x_0)$$

<u>в т. x_0 совпадают</u>
<u>значения f и P_1 и</u>
<u>значения f' и P_1'</u>

Определение. Многочлен $\boxed{P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k}$

наз. многочленом Тейлора порядка n функции $f(x)$ в точке x_0.

Выражение $f(x)=P_n(x)+r_n(x)$ наз. ф-лой Тейлора

Величина $r_n(x)\overset{def}{=}f(x)-P_n(x)$ наз. остаточным членом ф-лы Тейлора.

Форма Пеано

Теорема. Если функция $f(x)$ имеет в т. x_0 непрерывную производную n порядка, то $r_n(x)=o((x-x_0)^n)$, $x\to x_0$

Док-во. Поскольку $f^{(n)}(x)$ непрерывна в т. x_0, она определена в $U(x_0)$, где все производные $f^{(n-1)}(x),\dots,f^{(0)}(x)$ непрерывны в силу непрерывности дифференцируемой функции. Это позволяет применить правило Лопиталя для вычисления предела

$$\lim_{x\to x_0}\frac{r_n(x)}{(x-x_0)^n}=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n'(x)}{n(x-x_0)^{n-1}}=\dots=\lim_{x\to x_0}\frac{r_n^{(n)}(x)}{n!}=\frac{r_n^{(n)}(x_0)}{n!}=0$$

В силу непрерывности $r_n^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)-P_n^{(n)}(x)$ в т. x_0 и того, что $\underbrace{r_n^{(m)}(x_0)=f^{(m)}(x_0)-P_n^{(m)}(x_0)}_{m=0,1,\dots,n}=0.$ ▶

Таким образом, для функции $f(x)$, имеющей в т. x_0 непрерывную производную n порядка, справедлива ф-ла Тейлора с остаточным членом в форме Пеано:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \quad x \to x_0$$

или локальная ф-ла Тейлора.

Возникает вопрос о единственности полученного решения, а именно: возможно ли представление

$$f(x) = Q_n(x) + o\left((x-x_0)^n\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k (x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right), \; x \to x_0$$

с многочленом $Q_n(x)$, отличным от Тейлоровского.

Многочлен Тейлора наилучшим образом среди всех многочленов порядка n приближает $f(x)$ в $\overset{\circ}{U}(x_0)$ при $x \to x_0$.

Сл №26

Ф-ла Тейлора при $x_0 = 0$ наз. ф-лой Маклорена (Maclaurin)

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

Пример $\boxed{f(x) = e^x}$; $f^{(k)}(0) = e^x \Big|_{x=0} = 1 \quad k = 1, 2, \ldots$

$$e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n) = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + o(x^n) \quad (x \to 0)$$

$$e^{-x} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-x)^k}{k!} + o(x^n) = 1 - x + \frac{x^2}{2!} - \cdots + (-1)^n \frac{x^n}{n!} + o(x^n)$$

1

Пример $f(x)=e^x$; $f^{(k)}(0)=e^x\big|_{x=0}=1 \quad k=1,2,\dots$

$$e^x=\sum_{k=0}^{n}\frac{x^k}{k!}+o(x^n)=1+x+\frac{x^2}{2!}+\dots+\frac{x^n}{n!}+o(x^n)\ (x\to 0)$$

$$e^{-x}=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-x)^k}{k!}+o(x^n)=1-x+\frac{x^2}{2!}-\dots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}+o(x^n)$$

2

Пример. $f(x)=\sin x$, $f^{(2k+1)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k+1)}(0)=(-1)^k$

$$\sin x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}x^{2k+1}+o(x^{2n+1})=x-\frac{x^3}{3!}+\frac{x^5}{5!}-\dots+(-1)$$

Если $f(x)$ - чётная ф-ия, то $f^{(2k)}(x)$ - чётн., $f^{(2k+1)}(x)$ - нечет. $k=0,1,2,\dots$

$$f^{(2k+1)}(0)=0$$

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(2k)}(0)}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n}) \quad (x\to 0)$$

3

Пример $f(x)=\cos x$, $f^{(2k)}(x)=(-1)^k\cos x$, $f^{(2k)}(0)=(-1)^k$

$$\cos x=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{(2k)!}x^{2k}+o(x^{2n})=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\dots+(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}+o(x^{2n})$$

4

4. $f(x)=\ln(1+x)$, $f^{(k)}(x)=\dfrac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{(1+x)^{k}}$; $k=1,2,\dots$

Продолжение

$$f^{(0)}(0)=f(0)=0\,,\quad f^{(k)}(0)=(-1)^{k-1}(k-1)!\,,\quad k=1,2,\dots$$

$$\ln(1+x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}(k-1)!}{k!}x^{k}+o(x^{n})=\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k-1}}{k}x^{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

$$\ln(1+x)=x-\frac{x^{2}}{2}+\dots+(-1)^{n-1}\frac{x^{n}}{n}+o(x^{n}),\quad x\to 0.$$

5

5. $f(x)=(1+x)^{\alpha}$,

$$f^{(k)}(x)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)(1+x)^{\alpha-k}\ ;\quad k=1,2,\dots$$

$$f^{(k)}(0)=\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)\ ;\quad k=1,2,\dots$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{k=1}^{n}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^{k}+o(x^{n}),\quad x\to 0$$

$$(1+x)^{\alpha}=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^{2}+\frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)}{3!}x^{3}+\dots+$$

$$+\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^{n}+o(x^{n}),\quad x\to 0.$$

Вычисление пределов по формуле Тейлора

Пример.

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1-\sin x}{\ln(1+x)-x}=$$

Старые формулы:

$$\left.\begin{aligned} e^x-1&=x+o(x)\\ \sin x&=x+o(x)\\ \ln(1+x)&=x+o(x)\end{aligned}\right\}\ x\to 0$$

не позволяют решить задачу

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\left(1+x+\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right)-1-(x)}{\left[x-\frac{x^2}{2}+o(x^2)\right]-x}$$

см. слайд №20-21

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+o(x^2)}{-\frac{x^2}{2}+o(x^2)}=-1$$

Остаточный член формулы Тейлора.

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+r_n(x;x_0)$$

Пусть $f^{(n+1)}$ существует в некоторой окрестности (полуокрестности) $O(x_0)$. Зафиксируем $x\in O(x_0)$. Обозначим I - интервал с концами x_0, x, $\overline{I}$ - отрезок с концами x_0, x. Рассм. на $\overline{I}$ функцию аргумента $t\in\overline{I}$

$$F(t)=r_n(x;t)=f(x)-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{k!}(x-t)^k.$$

переменная - центр разложения

$$F(x_0)=r_n(x;x_0)\quad,\quad F(x)=0.$$

$$F'(t)=-\sum_{k=0}^{n}\left\{\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\frac{f^{(k)}(t)}{k!}k(x-t)^{k-1}(-1)\right\}=$$

$$=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(k)}(t)}{(k-1)!}(x-t)^{k-1}=-\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k+1)}(t)}{k!}(x-t)^k$$

$$=\boxed{-\frac{f^{(n+1)}(t)}{n!}(x-t)^n}$$

Если функция $g(t)$ непрерывна на $\bar{I}$, дифференцируема на $\overset{\circ}{I}$ и $g'(t)\neq 0$

то по теореме Коши $\exists\, \xi \in \overset{\circ}{I}$:

$$\frac{F(x)-F(x_0)}{g(x)-g(x_0)}=\frac{F'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad \frac{0-r_n(x;x_0)}{g(x)-g(x_0)}=-\frac{f^{(n+1)}(\xi)\cdot(x-\xi)^n}{g'(\xi)\cdot n!} \quad \Rightarrow$$

$$r_n(x;x_0)=\frac{g(x)-g(x_0)}{g'(\xi)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n$$

1) Положим $g(t)=x-t \quad \Rightarrow$

$$r_n(x;x_0)=\frac{0-(x-x_0)}{-1}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n(x-x_0) \quad \Big| \ \underline{\text{Коши}}$$

2) Особенно изящная форма ост. члена. Положим $g(t)=(x-t)^{n+1} \quad \Rightarrow$

$$r_n(x;x_0)=\frac{0-(x-x_0)^{n+1}}{(n+1)(x-\xi)^n(-1)}\cdot\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{n!}(x-\xi)^n=\boxed{\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1} \ \Big| \ \underline{\text{Лагранж}}}$$

Форма Пеано
см. сл.15

Примеры. $(x_0 = 0)$

1. $f(x) = e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + r_n$; $r_n = \frac{e^{\xi} \cdot x^{n+1}}{(n+1)!}$, $|\xi| < |x|$

$$\left| e^x - \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \right| = \frac{e^{\xi} |x|^{n+1}}{(n+1)!} < \frac{e^{|x|} \cdot |x|^{n+1}}{(n+1)!}$$

При $x = 1$

$$\left| e - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \right| < \frac{e}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!}$$

оценка точности приближённой ф-лы числа e

Исследование функций

Монотонность

<u>Определение</u>. Если $\forall x_1, x_2 \in (a, b) : x_1 < x_2$

1) $f(x_1) < f(x_2)$, то $f(x)$ возрастает на (a, b)
2) $f(x_1) \leq f(x_2)$, то $f(x)$ не убывает на (a, b)
3) $f(x_1) > f(x_2)$, то $f(x)$ убывает на (a, b)
4) $f(x_1) \geq f(x_2)$, то $f(x)$ не возрастает на (a, b)
5) $f(x_1) = f(x_2)$, то $f(x) = const$ на (a, b)

Обобщённо не-убывающие и не-возрастающие функции наз. монотонными, а возрастающие и убывающие – строго монотонны

Теорема. Если $\forall x \in (a, b)$

- 1) $f'(x) > 0$, то $f(x)$ возрастает на (a, b)
- 2) $f'(x) \geqslant 0$, то $f(x)$ не убывает на (a, b)
- 3) $f'(x) < 0$, то $f(x)$ убывает на (a, b)
- 4) $f'(x) \leqslant 0$, то $f(x)$ не возрастает на (a, b)
- 5) $f'(x) = 0$, то $f(x) = \mathrm{const}$ на (a, b)

Док-во. $\forall x_1, x_2 \in (a, b): x_1 < x_2$ ф-ия $f(x)$ удовлетворяет (см.сл №7) на отрезке $[x_1, x_2]$ всем условиям теоремы Лагранжа, поэтому

$$\exists\, \xi \in (x_1, x_2): \quad f(x_2) - f(x_1) = f'(\xi)(x_2 - x_1)$$

Т.к. $(x_2 - x_1) > 0$ $\quad \operatorname{sign}[f(x_2) - f(x_1)] = \operatorname{sign} f'(\xi)$

Пример 1) $f(x) = \operatorname{sh} x$, $f'(x) = \operatorname{ch} x > 0 \Rightarrow \operatorname{sh} x$ возрастает на $\mathbb{R}$

2) $f(x) = e^{-x}$, $f'(x) = -e^{-x} < 0 \Rightarrow e^{-x}$ убывает на $\mathbb{R}$

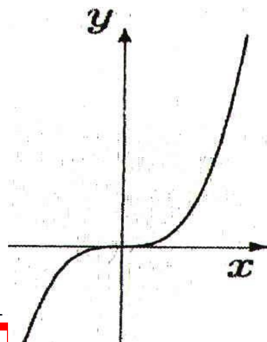
Локальные экстремумы

Из теоремы Ферма следует

Утверждение (необходимые условия локального экстремума)

Если функция $f(x)$, определённая в $\overset{\circ}{U}(x_0)$, имеет в т. x_0 лок. экстремум, то либо $f'(x_0)=0$, либо функция $f(x)$ в т. x_0 недифференцируема.

Замечание. Условие $f'(x_0)=0$ не явл. достаточным для экстремума. Например, $f=x^3$; $f'=3x^2\big|_{x=0}=0$.



Определение. Точки, в которых $f'(x)=0$, наз. стационарными точками функции $f(x)$.

Точки, в которых $f(x)$ непрерывна, а $f'(x)=0$ либо не существует, наз. критическими точками функции $f(x)$

Таким образом, все локальные экстремумы функции $f(x)$ следует искать среди её критических точек.

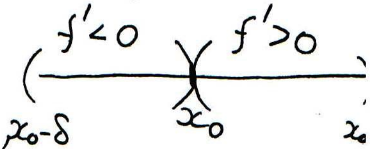
Теорема (первый дост. признак строгого лок. экстремума в крит. точке)

Пусть $f(x)$ – дифференцируема в $U(x_0)$ и непрерывна в т. x_0

1) если $f'(x)$ меняет знак с „–" на „+" при переходе через т. x

т.е. $\exists\, \delta > 0$: $\quad f'(x) < 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

$\qquad\qquad\qquad f'(x) > 0 \quad \forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$



то в т. x_0 функция f имеет строгий минимум.

2) если $f'(x)$ меняет знак с „+" на „–" при переходе через т. x_0

то в т. x_0 функция f имеет строгий максимум

Док-во. Рассм. случай 1 $\quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0)$

f дифф. на (x, x_0) и непр. на $[x, x_0]$. По теор. Лагранжа

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0 \quad \Big| \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

т.к. $\xi \in (x, x_0) \Rightarrow f'(\xi) < 0$ и $x - x_0 < 0$

$\forall x \in (x_0, x_0 + \delta)$ $\quad f$ дифф. на (x_0, x) и непр. на $[x_0, x]$

$$f(x) - f(x_0) = f'(\xi)(x - x_0) > 0 \quad \Big| \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

т.к. $\xi \in (x_0, x) \Rightarrow f'(\xi) > 0$ и $x - x_0 > 0$

Аналогично случай 2

Замечание. Этот признак не явл. необходимым.

Напр., $f(x) = \begin{cases} x^2\left(2 + \sin\frac{1}{x}\right), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

Т.к. $f(x) \geq x^2 \Rightarrow$ в т. $x_0 = 0$, f имеет строгий минимум,

но ни в какой прокол. полуокрестн. этой точки

$f'(x) = 4x + 2x\sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$ не сохр. знак.

Теорема (2-й дост. признак строгого лок. экстремума)

Если ф-ия $f(x)$ имеет непрерывную вторую производную в стационарной точке x_0, то

1) $f''(x_0)>0 \Rightarrow$ в т. x_0 строгий лок. минимум ф. $f(x)$

2) $f''(x_0)<0 \Rightarrow$ в т. x_0 строгий лок. максимум ф. $f(x)$

Док-во В силу существ. непрерывн. $f''(x)$ в т. x_0, справедлива локальная ф-ла Тейлора

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) \quad (x \to x_0)$$

Поскольку $f'(x_0)=0$,

$$f(x)-f(x_0) = \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + o((x-x_0)^2) =$$

$$= (x-x_0)^2 \underbrace{\left[\frac{f''(x_0)}{2} + \frac{o((x-x_0)^2)}{(x-x_0)^2} \right]}_{\to \frac{f''(x_0)}{2}} \quad (x \to x_0)$$

По теореме о сохр. ф-ей знака своего предела

$\operatorname{sign}[\ldots] = \operatorname{sign} f''(x_0) \quad \forall x \in \dot{O}(x_0)$, $(x-x_0)^2>0$,

поэтому $\operatorname{sign}[f(x)-f(x_0)] = \operatorname{sign} f''(x_0) \quad \forall x \in \dot{O}(x_0)$ I

Теорема (третий дост. признак строгого лок. экстр. в стационарной точке)

Если ф-ия $f(x)$ имеет непрерывную производную порядка n в точке x_0 и при этом

$$f'(x_0) = f''(x_0) = \dots = f^{(n-1)}(x_0) = 0, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0,$$ то

1) при $n = 2k$ $(k \in N)$ в т. x_0 f имеет лок. экстремум

a) $f^{(n)}(x_0) < 0$ – строгий максимум

б) $f^{(n)}(x_0) > 0$ – строгий минимум

2) при $n = 2k+1$ в т. x_0 экстремума нет.

Продолжение

Док-во. При усл. теоремы справедлива лок. ф-ла Тейлора

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k + o\left((x-x_0)^n\right) =$$

$$= f(x_0) + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n + o\left((x-x_0)^n\right) \quad (x \to x_0$$

$$f(x) - f(x_0) = (x-x_0)^n \underbrace{\left[\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} + \frac{o\left((x-x_0)^n\right)}{(x-x_0)^n} \right]}_{\to \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}} \quad (x \to x_0$$

По теореме о сохр. ф-ей знака своего предела

$$\operatorname{sign}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sign}(x-x_0)^n \cdot \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0) \quad \forall x \in \dot{O}(x_0$$

1) при $n = 2k$ $\quad \operatorname{sign}[f(x) - f(x_0)] = \operatorname{sign} f^{(n)}(x_0)$

2) при $n = 2k+1$ знак $f(x) - f(x_0)$ меняется при переходе через т. x_0

Пример $f(x) = x^n$ $\quad x_0 = 0$

Выпуклость функции

<u>Определение</u>. (непрерывная) Функция $f(x)$ называется <u>выпуклой</u> вверх на (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Функция $f(x)$ называется <u>выпуклой вниз</u> на (a,b), если $\forall\, x_1, x_2 \in (a,b)$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqslant \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Если указанные неравенства являются строгими (при $x_1 \neq$

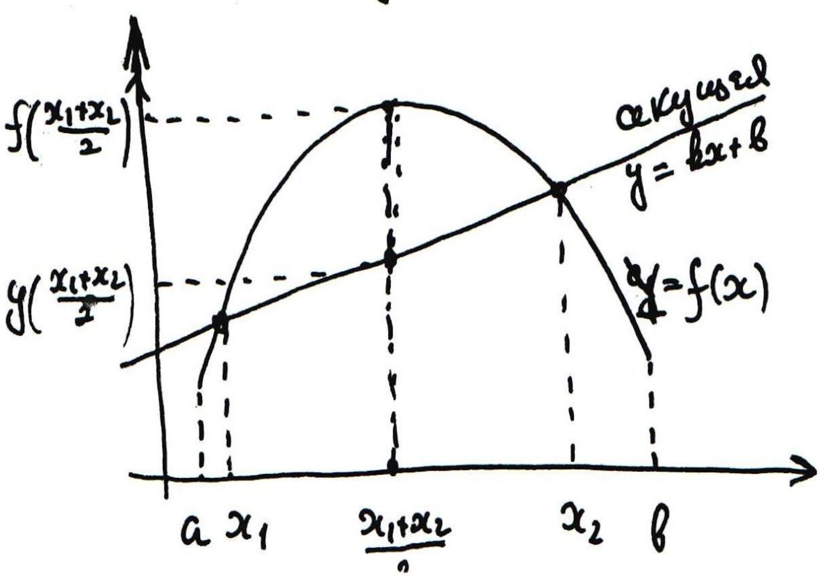
то говорят о строгой выпуклости вверх или вниз.

Геометрический смысл

Очевидно, для всякой невертикальной прямой $y(x) = kx + b$:

$$y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \frac{y(x_1)+y(x_2)}{2}$$

Поэтому



$$f(x_1) = y(x_1)\ , \ f(x_2) = y(x_2)$$

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \geq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2} =$$

$$= \frac{y(x_1)+y(x_2)}{2} = y\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)$$

середина дуги кривой $y=f(x)$ лежит выше середины секущей

(выпуклость вверх)

<u>Пример</u>. Функция $f(x) = x^2$ строго выпукла вниз на $\mathbb{R}$.

Действительно, $\forall\, x_1, x_2 \in \mathbb{R} \;:\; x_1 \neq x_2$

$$(x_1 - x_2)^2 = x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 > 0 \quad \Rightarrow$$

$$2x_1x_2 < x_1^2 + x_2^2, \qquad (*)$$

поэтому

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) = \left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)^2 = \frac{x_1^2+2x_1x_2+x_2^2}{4} \overset{(*)}{<}$$

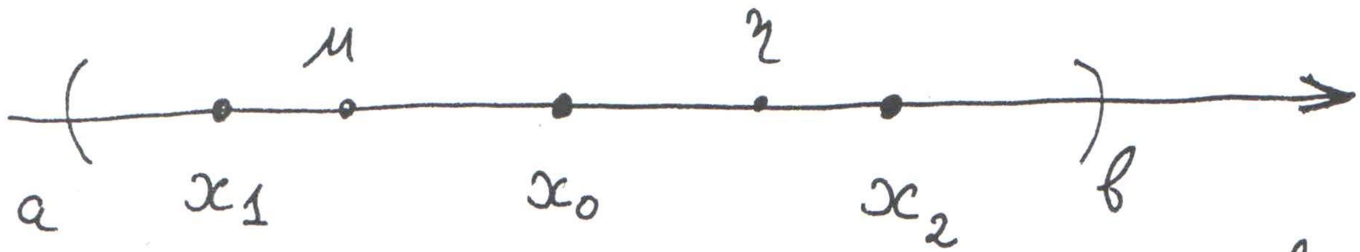
$$< \frac{x_1^2+x_2^2}{2} = \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

Теорема (достаточн. усл. выпуклости)

Пусть ф-ция $f(x)$ дважды дифф.-ма на (a, b) и $\forall x \in (a,$

1. $f''(x) \geq 0 \Rightarrow f$ выпукла вниз на (a, b)
2. $f''(x) > 0 \Rightarrow f$ строго выпукла вниз на (a, b)
3. $f''(x) \leq 0 \Rightarrow f$ выпукла вверх на (a, b)
4. $f''(x) < 0 \Rightarrow f$ строго выпукла вверх на (a, b)

<u>Док-во</u> Пусть $x_1, x_2 \in (a, b)$ и $x_1 < x_2$



$$x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}, \quad x_0 - x_1 = x_2 - x_0 = h$$

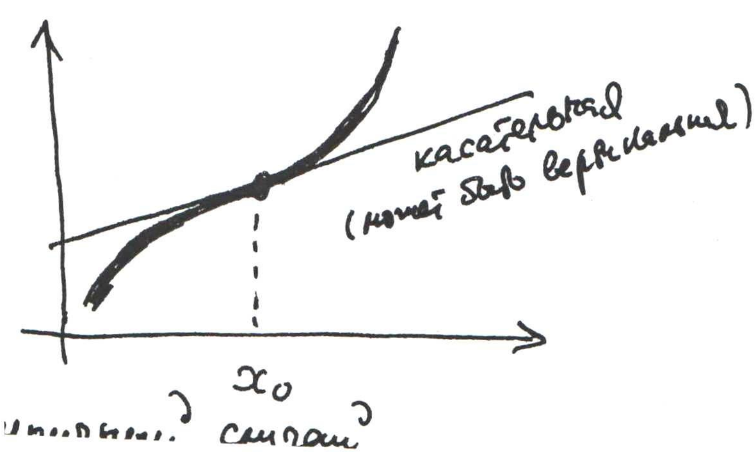
Точки перегиба

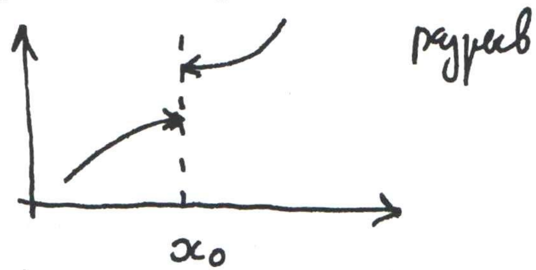
Определение. Пусть ф-ия $f(x)$ непрерывна в т. x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производ. Если при переходе через т. x_0 $f(x)$ меняет направлен. выпуклости, (т.е. $\exists\, \delta > 0$: на одном из интервалов $(x_0 - \delta, x_0)$ и $(x_0, x_0 + \delta)$ ф-ия $f(x)$ выпукла вниз, а на другом – вверх), то точка x_0 наз. точкой перегиба функции $f(x)$, а точка плоскости $\{x_0, f(x_0)\}$ наз. точкой перегиба графика ф-ии $y = f(x)$.

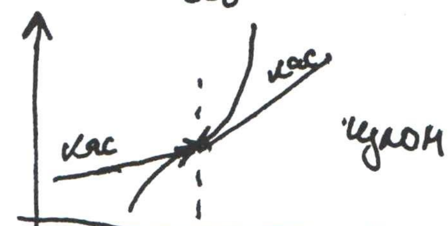
<u>Примеры</u> 1) $y = x^3$; $x = 0$ точка перегиба график ф-ии лежит по разные стороны от касательной $y = 0$

2) $y = \sqrt[3]{x}$; $x = 0$ точка перегиба, график ф-ии лежит по разные стороны от касательной $x = 0$

<u>Замечание.</u> Определение исключает из множеств точек перегиба точки разрыва и точки излома. Отсюда требуется непрерывность ф-ии в т. x_0 и существование в т. x_0 конечной или бесконечной производной, т.е. касательной к графику ф-ии $y = f(x)$







Теорема (необходимое условие перегиба)

Если ф-ия $f(x)$ имеет в точке перегиба x_0 непрерывную вторую производную, то $f''(x_0)=0$.

Док-во. В силу непрерывности $f''(x)$ в т. x_0, она определена в некоторой окрестности $O(x_0)$ т. x_0. Предположим, что $f''(x_0) \neq 0$, тогда, в силу её непр., $\exists\, \delta>0 : \operatorname{sign} f(x) = \operatorname{sign} f(x_0)$ $\forall x \in O_\delta(x_0)$, т.е. ф-ия $f(x)$ строго выпукла либо вниз, либо вверх на $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ и не меняет в т. x_0 направление выпуклости, что противоречит условиям теоремы. ▶

Замечание 1. Условие не является достаточным.

Например, $f(x) = kx + b$, $f''(x) = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

Замечание 2. Требование непрерывности $f''(x)$ в т. x_0 существенно. Например, $f(x) = \sqrt[3]{x}$ имеет в точке перегиба $x_0 = 0$ бесконечную вторую производную.

Теорема (первое дост. условие перегиба)

Пусть ф-ия $f(x)$ непрерывна в т. x_0 и имеет в этой точке конечную или бесконечную производную, тогда если $f''(x)$ меняет знак при переходе через т. x_0, то x_0 - точка перегиба ф-ии $f(x)$.

Док-во. $\exists\, \delta > 0$: на $(x_0-\delta, x_0)$ и $(x_0, x_0+\delta)$ $f''(x)$ имеет разные знаки, т.е. $f(x)$ имеет на этих интервалах разные направления выпуклости, кроме того, x_0 не явл. т. разрыва и т. излома, т.е. x_0 - т. перегиба. ▶

Теорема (второе дост. условие перегиба)

Если $f''(x_0)=0$, $f'''(x_0)\neq 0$, то x_0 - точка перегиба

Док-во

$$f'''(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)-f''(x_0)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{f''(x)}{x-x_0}\neq 0$$

По теореме о сохранении функцией знака своего предела

$$\exists\,\delta>0:\ \operatorname{sign}\frac{f''(x)}{x-x_0}=\operatorname{sign}f'''(x_0)\quad \forall x\in \overset{\circ}{O}_\delta(x_0),$$

т.е. при переходе через т. x_0 знак отношения $\frac{f''(x)}{x-x_0}$ сохраняется, след-но меняется знак $f''(x)$ (вместе со знаком разности $x-x_0$). ►

Пример $f(x)=\sin x$, $f''(x)=-\sin x$, $f'''(x)=-\cos x$

$f''(0)=0$, $f'''(0)=-1$, т.е. $x_0=0$ - т. перегиба $\sin x$

Схема построения графиков

1. Найти область определения функции.
2. Отметить специфические особенности функции: чётность, нечётность, периодичность, совпадение с точностью до преобразований координат с графиками известных функций.
3. Отметить характерные точки графика: точки пересечения с осями координат и т.п. и промежутки, где $f>0$, $f<0$,
4. Исследовать асимптотическое поведение функции в окрестностях граничных точек области определения. Найти асимптоты.
5. Найти промежутки монотонности
6. Найти стационарные точки, критич. точки.

Вычислить $f'(x)$

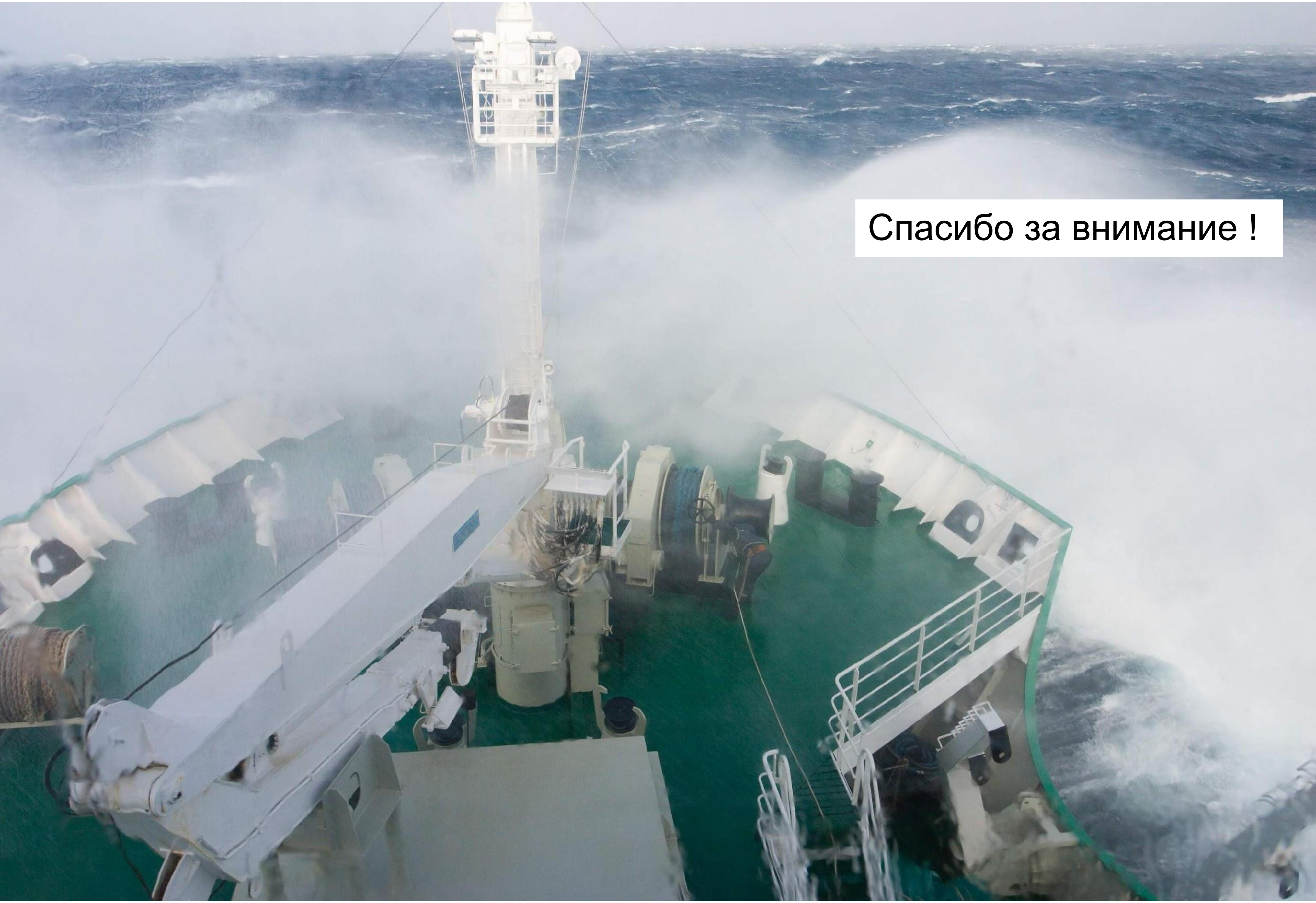
7. Определить характер выпуклости графика
8. Найти точки перегиба
9. Классифицировать стационарные точки,

Вычислить $f''(x)$ или $f^{(n)}(x)$

Таблица поведения функции

x				
$f(x)$				
$f'(x)$				
$f''(x)$				

Спасибо за внимание



Спасибо за внимание !