

# Тема 1.5 Общая постановка и алгоритм решения задач динамического программирования

- ***Динамическое программирование*** – раздел математического программирования, совокупность приемов, позволяющих находить оптимальные решения, основанные на вычислении последствий каждого решения и выработке оптимальной стратегии для последующих решений

- Процессы принятия решений, которые строятся по такому принципу, называются ***многошаговыми процессами***

- **Динамическое программирование** (иначе «**динамическое планирование**») – это особый метод оптимизации решений, специально приспособленный к «многошаговым» операциям.

- Динамическое программирование позволяет свести одну сложную задачу со многими переменными ко многим задачам с малым числом переменных.
- Это значительно сокращает объем вычислений и ускоряет процесс принятия управленческого решения.

# Постановка задачи

- Рассмотрим операцию  $Q$ , состоящую из  $m$  шагов (этапов). Пусть эффективность операции характеризуется каким-то показателем  $W$ , который называется «выигрышем».
- Предположим, что выигрыш  $W$  за всю операцию складывается из выигрышей на отдельных шагах:

$$W = \sum_{i=1}^m w_i,$$

где  $w_i$  — выигрыш на  $i$ -м шаге.

Если  $W$  обладает таким свойством, то его называют «**аддитивным критерием**».

- Операция  $Q$  представляет собой управляемый процесс, т. е. можно выбирать какие-то параметры, влияющие на его ход и исход, причем на каждом шаге выбирается какое-то решение, от которого зависит выигрыш на данном шаге и выигрыш за операцию в целом.
- Это решение называется **«шаговым управлением»**.
- Совокупность всех шаговых управлений представляет собой управление операцией в целом. Обозначим его буквой  $x$ , а шаговые управления — буквами  $x_1, x_2, \dots, x_m$ :  
$$x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$$

- Требуется найти такое управление  $x^*$ , при котором выигрыш  $W$  обращается в максимум:

$$W = \sum_{i=1}^m w_i \Rightarrow \max.$$

- То управление  $x^*$ , при котором этот максимум достигается, будем называть **оптимальным управлением**. Оно состоит из совокупности оптимальных шаговых управлений:

$$x^* = (x^*_1, x^*_2, \dots, x^*_m)$$

и позволяет достигнуть максимальный выигрыш  $W^*$ .



# *Оптимальное распределение ресурсов*

- Пусть имеется некоторое количество ресурсов  $x$ , которое необходимо распределить между  $n$  различными предприятиями, объектами, работами и т.д. так, чтобы получить максимальную суммарную эффективность от выбранного способа распределения.

# Оптимальное распределение ресурсов

- Введем обозначения:  $x_i$  — количество ресурсов, выделенных  $i$ -му предприятию;
- $g_i(x_i)$  — функция полезности, в данном случае это величина дохода от использования ресурса  $x_i$ , полученного  $i$ -м предприятием;
- $f_k(x)$  — наибольший доход, который можно получить при использовании ресурсов  $x$  от первых  $k$  различных предприятий.

# Оптимальное распределение ресурсов

- Математическая форма

$$f_n(x) = \max \sum_{i=1}^n g_i(x_i)$$

$$\sum_{i=1}^n x_i = x,$$
$$x_i \geq 0, \quad i = \overline{1, n}.$$

# Оптимальное распределение ресурсов

- Для решения задачи необходимо получить рекуррентное соотношение, связывающее  $f_k(x)$  и  $f_{k-1}(x)$ .
- Обозначим через  $x_k$  количество ресурса, используемого  $k$ -м способом ( $0 \leq x_k \leq x$ ), тогда для  $(k - 1)$  способов остается величина ресурсов, равная  $(x - x_k)$ . Наибольший доход, который получается при использовании ресурса  $(x - x_k)$  от первых  $(k - 1)$  способов, составит  $f_{k-1}(x - x_k)$ .

# Оптимальное распределение ресурсов

- Для максимизации суммарного дохода от  $k$ -го и первых  $(k - 1)$  способов необходимо выбрать  $x_k$  таким образом, чтобы выполнялись соотношения

$$f_1(x) = g_1(x),$$

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$

# Пример

- Совет директоров фирмы рассматривает предложения по наращиванию производственных мощностей для увеличения выпуска однородной продукции на четырех предприятиях, принадлежащих фирме.
- Для расширения производства совет директоров выделяет средства в объеме 120 млн р. с дискретностью 20 млн р. Прирост выпуска продукции на предприятиях зависит от выделенной суммы, его значения представлены предприятиями и содержатся в таблице
- Найти распределение средств между предприятиями, обеспечивающее максимальный прирост выпуска продукции, причем на одно предприятие можно осуществить не более одной инвестиции.

# Пример

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

# Решение

- Разобьем решение задачи на четыре этапа по количеству предприятий, на которых предполагается осуществить инвестиции.

$$f_1(x) = g_1(x_1),$$

$$f_k(x) = \max\{g_k(x_k) + f_{k-1}(x - x_k)\}, \quad k = \overline{2, n}.$$



# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- **1-й этап.** Инвестиции производим только первому предприятию. Тогда

$$\begin{aligned} f_1(20) &= 8, & f_1(40) &= 16, & f_1(60) &= 25, \\ f_1(80) &= 36, & f_1(100) &= 44, & f_1(120) &= 62. \end{aligned}$$

# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- **2-й этап.** Инвестиции выделяем первому и второму предприятиям.

# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- **3-й этап.** Финансируем 2-й этап и третье предприятие.

# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- **4-й этап.** Инвестиции в объеме 120 млн р. распределяем между 3-м этапом и четвертым предприятием.

# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- Получены условия управления от 1-го до 4-го этапа. Вернемся от 4-го к 1-му этапу.

# Решение

Выделяемые средства, млн р.	Прирост выпуска продукции, млн р.			
	Предприятие № 1	Предприятие № 2	Предприятие № 3	Предприятие № 4
20	8	10	12	11
40	16	20	21	23
60	25	28	27	30
80	36	40	38	37
100	44	48	50	51
120	62	62	63	63

- Таким образом, инвестиции в объеме 120 млн р. целесообразно выделить второму, третьему и четвертому предприятиям по 40 млн р. каждому, при этом прирост продукции будет максимальным и составит 64 млн р.

# Задача

- В трех районах города предприниматель планирует построить пять предприятий одинаковой мощности по выпуску хлебобулочных изделий, пользующихся спросом.
- Необходимо разместить предприятия таким образом, чтобы обеспечить минимальные суммарные затраты на их строительство и эксплуатацию. Значения функции затрат  $g_i(x)$  приведены в таблице

# Задача

$x$	1	2	3	4	5
$g_1(x)$	11	18	35	51	76
$g_2(x)$	10	19	34	53	75
$g_3(x)$	9	20	36	54	74



# ***Оптимальная стратегия замены оборудования***

- Оптимальная стратегия замены оборудования состоит в определении оптимальных сроков замены.
- Критерием оптимальности может служить прибыль от эксплуатации оборудования, которую следует оптимизировать, или суммарные затраты на эксплуатацию в течение рассматриваемого промежутка времени, подлежащие минимизации.

# ***Оптимальная стратегия замены оборудования***

Введем обозначения:

- $r(t)$  — стоимость продукции, производимой за один год на единице оборудования возраста  $t$  лет;
- $u(t)$  — ежегодные затраты на обслуживание оборудования возраста  $t$  лет;
- $s(t)$  — остаточная стоимость оборудования возраста  $t$  лет;
- $P$  — покупная цена оборудования.