Лекция №4

Системы линейных алгебраических уравнений.

План лекции:

1. Системы линейных уравнений. Основные понятия.
2. Матричный метод решения систем линейных уравнений.
3. Правило Крамера.

Системы линейных уравнений. Основные понятия.

Системой из m линейных уравнений с n неизвестными называется система вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \ldots & + & a_{1n}x_n & = & b_1, \\ a_{21}x_1 & + & a_{22}x_2 & + & \ldots & + & a_{2n}x_n & = & b_2, \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{m1}x_1 & + & a_{m2}x_2 & + & \ldots & + & a_{mn}x_n & = & b_m. \end{cases} \qquad (1)$$

Здесь переменные $x_1, x_2, \ldots, x_n$

называются **неизвестными** системы, числа a_{ij}, где $i = 1, 2, \ldots, m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ называются **коэффициентами** системы, а числа $b_1, b_2, \ldots, b_m$ – **свободными членами**.

Система называется ***однородной***, если все её свободные члены равны нулю $b_1 = 0, b_2 = 0, \ldots, b_m = 0$

иначе — ***неоднородной***

Определение. **Решением системы** называется упорядоченный набор чисел

$(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$,

который после подстановки в систему (1) превращает все её уравнения в тождества.

<u>Определение</u>. Две системы **называются эквивалентными**, если решение первой является решением второй и наоборот.

Определение. Система, имеющая хотя бы одно решение, называется **совместной**. Система, не имеющая ни одного решения, называется **несовместной**.

Определение. Система, имеющая единственное решение, называется **определенной**, а имеющая более одного решения – **неопределенной**.

Однородная система всегда совместна, то есть всегда имеет решение.

Обозначим:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$X=\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} \qquad B=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{pmatrix}$$

где A – матрица размера $m \times n$, составленная из коэффициентов при неизвестных, эта матрица называется **матрицей системы;** X матрица - столбец из неизвестных системы; B – матрица-столбец свободных членов.

Тогда систему (1) можно записать в виде матричного уравнения:

$$AX = B. \qquad (2)$$

Это запись называется **матричной формой записи системы** (1) .

Расширенной матрицей системы называется матрица A^*, получаемая из матрицы A добавлением справа столбца свободных членов системы:

$$A^* = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & .. \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Матричный метод решения систем линейных уравнений

Систему уравнений, записанную в матричном виде (2), умножим на обратную матрицу A^{-1} слева, получим: $A^{-1}AX = A^{-1}B$.

Так как A^{-1}A=E, то $X = A^{-1}B$. Таким образом, получили теорему.

Теорема. Система линейных уравнений $AX = B$, обладающая квадратной невырожденной матрицей, имеет единственное решение:

$$X = A^{-1}B\,.$$

Правило Крамера.

Пусть для системы линейных уравнений $AX = B$, определитель $|A| = \Delta \neq 0$. Пусть Δ_i – определитель матрицы, полученной из A заменой i-того столбца на столбец свободных членов. Тогда эта система имеет единственное решение, которое находится по **формулам Крамера:**

$$\boldsymbol{x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}}, \qquad \boldsymbol{i = 1, 2, \dots n}.$$

Теорема Крамера. **Если определитель системы отличен от нуля, то система линейных уравнений имеет одно единственное решение, причём неизвестное равно отношению определителей.**

В знаменателе – определитель системы, а в числителе – определитель, полученный из определителя системы путём замены коэффициентов при этом неизвестном свободными членами. Эта теорема имеет место для системы линейных уравнений любого порядка.

Пример

Предприятие выпускает три вида продукции, используя сырье трех видов. Необходимые характеристики производства указаны в табл. Определить объем выпуска продукции каждого вида при заданных запасах сырья.

Вид сырья	Расход сырья по видам продукции, вес. ед. изд.			Запас сырья, вес. ед.
	1вид продукции	2 вид продукции	3 вид продукции	
1	3	1	5	1200
2	4	2	1	1200
3	6	4	1	2000

Решение. Пусть x_i - объем выпуска продукции i-го вида, $i = 1, 2, 3$. При условии полного расхода запасов каждого вида сырья составим балансовые соотношения:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 5x_3 = 1200, \\ 4x_1 + 2x_2 + x_3 = 1200, \\ 6x_1 + 4x_2 + x_3 = 2000. \end{cases}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 2000 \end{pmatrix}$$

Тогда систему можно записать в матричной форме

в виде: $AX=B$. Решение системы: $\boldsymbol{X = A^{-1}B}$.

Вычислим определитель матрицы А:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 80 - 60 - 4 - 12 = 16$$

определитель матрицы не равен нулю, следовательно решение существует

2) находим алгебраические дополнения к каждому элементу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = -2 \qquad A_{12} = -\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = 2 \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 19 \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 6 & 1 \end{vmatrix} = -27 \qquad A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 6 & 4 \end{vmatrix} = -6$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -9 \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} = 17 \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2$$

Тогда обратная матрица равна

$$A^{-1} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2 & 19 & -9 \\ 2 & -27 & 17 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

Находим решение:

$$X = \frac{1}{16}\cdot\begin{pmatrix} -2 & 19 & -9 \\ 2 & -27 & 17 \\ 4 & -6 & 2 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 1200 \\ 1200 \\ 2000 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} -2400+22800-18000 \\ 2400-32400+34000 \\ 4800-7200+4000 \end{pmatrix} = \frac{1}{16}\begin{pmatrix} 2400 \\ 4000 \\ 1600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 150 \\ 250 \\ 100 \end{pmatrix}$$

Тогда $x_1 = \frac{24000}{16} = 150;$ $x_2 = \frac{4000}{16} = 250;$ $x_3 = \frac{1600}{16} = 100.$

Ответ: При заданных запасах сырья объемы выпуска продукции по каждому виду составят соответственно 150, 250 и 100 условных единиц

Решить систему уравнений с помощью формул Крамера:

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \qquad i = 1,2,\dots n.$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 4 & 2 & 1 \\ 6 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 6 + 6 + 80 - 60 - 4 - 12 = 16$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 1200 & 1 & 5 \\ 1200 & 2 & 1 \\ 2000 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 2400 + 2000 + 24000 - 20000 - 1200 - 4800 = 2400$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 1200 & 5 \\ 4 & 1200 & 1 \\ 6 & 2000 & 1 \end{vmatrix} = 3600 + 7200 + 40000 - 36000 - 4800 - 6000 = 4000$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1200 \\ 4 & 2 & 1200 \\ 6 & 4 & 2000 \end{vmatrix} = 12000 + 7200 + 19200 - 14400 - 8000 - 14400 = 1600$$

Откуда решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{2400}{16} = 150 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{4000}{16} = 250 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{1600}{16} = 100$$

3) Проверяем подстановкой полученных значений в исходную систему:

$$3\cdot 150 + 1\cdot 250 + 5\cdot 100 = 450 + 250 + 500 = 1200$$
$$4\cdot 150 + 2\cdot 250 + 1\cdot 100 = 600 + 500 + 100 = 1200$$
$$6\cdot 150 + 4\cdot 250 + 1\cdot 100 = 900 + 1000 + 100 = 2000$$

Ответ: $x_1 = 150$ $\quad x_2 = 250$ $\quad x_3 = 100$

Решить систему линейных уравнений матричным методом $\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ -2x_1 + 3x_2 - 3x_3 = -5 \\ 3x_1 - 4x_2 + 5x_3 = 10 \end{cases}$

Решение: Введем обозначения: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix}$ $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$; $B = \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix}$.

тогда исходная система запишется в виде: $AX = B$, откуда решение определяется по формуле: $X = A^{-1}B$. Определим

2) транспонируем матрицу: обратную матрицу:

1) определитель матрицы определитель не равен нулю:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 \\ 0 & -10 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 7 & -1 \\ -10 & 2 \end{vmatrix} = 4,$$

следовательно, решение существует;

3) находим алгебраические дополнения к каждому элементу:

$$A_{11} = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 3 \qquad A_{12} = \begin{vmatrix} 2 & -4 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = -14; \qquad A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -9;$$

$$A_{21} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -3 & 5 \end{vmatrix} = 1; \qquad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 2; \qquad A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 1;$$

$$A_{31} = \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -1; \qquad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 10; \qquad A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7;$$

4) обратная матрица формируется из алгебраических дополнений, записанных вместо элементов транспонированной матрицы, и деленных на определитель исходной матрицы:

$$A^{-1} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix}$$

Проверяем выполнение условия: $A^{-1}A = E$:

$$\frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -3 \\ 3 & -4 & 5 \end{pmatrix} =$$

$$= \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3+28-27 & 6-42+36 & 3+42-45 \\ 1-4+3 & 2+6-4 & 1-6+5 \\ -1-20+21 & -2+30-28 & -1-30+35 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Находим решение: $X = \frac{1}{4} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -14 & -9 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 10 & 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 10 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 24+70-90 \\ 8-10+10 \\ -8-50+70 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$

Проверяем: $\begin{cases} 1 \cdot 1 + 2 \cdot 2 + 1 \cdot 3 = 8 \\ -2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 - 3 \cdot 3 = -5 \\ 3 \cdot 1 - 4 \cdot 2 + 5 \cdot 3 = 10 \end{cases}$ *Ответ:* $x_1 = 1$; $x_2 = 2$; $x_3 = 3$.

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 2x_1 - x_2 - 6x_3 = -1 \\ 3x_1 - 2x_2 = 8 \end{cases}$$

Решение. Находим определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 18 - 4 + 3 - 12 - 0 = -31.$$

Итак, определитель не равен нулю, следовательно, система является определённой. Для нахождения её решения вычисляем определители при неизвестных

$$\Delta_{x_1} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -6 \\ 8 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 0 - 48 + 2 + 8 - 24 = -62.$$

$$\Delta_{x_2} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & -6 \\ 3 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 0 + 16 - 36 + 3 + 48 + 0 =$$

$$= 31.$$

$$\Delta_{x_3} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & 8 \end{vmatrix} = -8-3-8+6-2-16 =$$

$$= -31.$$

По формулам Крамера находим:

$$x_1 = \frac{-62}{-31} = 2, \qquad x_2 = \frac{31}{-31} = -1, \qquad x_3 = \frac{-31}{-31} = 1.$$

Итак, решение системы - (2; -1; 1).

Решить систему линейных уравнений методом Крамера:

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + x_2 + x_3 = 11 \\ x_1 + x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Решение:

1) Составим определители, соответствующие исходной системе и каждому неизвестному:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix}$$

2) Вычислим определитель системы: сложим соответствующие элементы первой и второй строк, затем первой и третьей, получим во втором столбце нули, кроме элемента в первой строке. Найдем определитель разложением по второму столбцу:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 5$$

Определитель ненулевой, значит, **система имеет решение.**

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 11 & 1 & 1 \\ 8 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 14 & 0 & 2 \\ 11 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 14 & 2 \\ 11 & 3 \end{vmatrix} = 20$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 11 & 1 \\ 1 & 8 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 8 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \end{vmatrix} = 1\cdot(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} 1 & 8 \\ -12 & 2 \end{vmatrix} = 10$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 11 \\ 1 & 1 & 8 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 3 & 0 & 14 \\ 2 & 0 & 11 \end{vmatrix} = (-1)\cdot(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} 3 & 14 \\ 2 & 11 \end{vmatrix} = 5$$

Откуда решение системы:

$$x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = \frac{20}{5} = 4 \qquad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = \frac{10}{5} = 2 \qquad x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = \frac{5}{5} = 1$$

3) Проверяем подстановкой полученных значений в исходную систему:

$$1\cdot 4-1\cdot 2+1\cdot 1=3$$

$$2\cdot 4+1\cdot 2+1\cdot 1=11$$

$$1\cdot 4+2\cdot 2+2\cdot 1=8$$

Ответ: $x_1=4$ $x_2=2$ $x_3=1$

Контрольные вопросы:

1.Что называется решением системы линейных уравнений?

2.Какие системы называются совместными, а какие – несовместными?

3. Что называется матрицей и расширенной матрицей системы линейных уравнений?

4. В чем состоит матричный способ решения систем линейных уравнений?

5. Напишите формулы Крамера. В каком случае они применимы?

Литература:

1. Кремер Н. Ш. Высшая математика для экономистов: учебник для вузов / Н.Ш. Кремер – Москва: ЮНИТИ, 2010. 483 с. (Глава 1. Глава 2 (§§2.1-2.5))
2. Малугин В.А. Математика для экономистов: Линейная алгебра. Курс лекций. – М.: Эксмо, 2006. – 224 с. (Глава 1. Глава 2 (§§ 2.1-2.6))
3. Рябушко А.П. и др. Индивидуальные задания по высшей математике. Из-во Высшая школа, 2000.