

16.01.21.

Тема:

Определение производной. Физический смысл производной. Приращение аргумента и приращение функции. Производная степенной функции.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://iu.ru/video-lessons/7981a604-de36-40db-a5a3-ab78e640f119>

<https://youtu.be/6N6c-sKRLew>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### Производная

На станции метро расстояние от тормозной отметки до остановки первого вагона равно 80 м. С какой скоростью поезд должен подойти к тормозной отметке, если дальше он движется равнозамедленно с ускорением  $1,6 \text{ м/с}^2$ ?

Для решения задачи нужно найти скорость движения поезда в момент прохождения тормозной отметки, т. е. *мгновенную скорость* в этот момент времени. Тормозной путь вычисляется по формуле  $s = \frac{at^2}{2}$ , где  $a$  — ускорение,  $t$  — время торможения. В данном случае  $s = 80$ ,  $a = 1,6$ , поэтому  $80 = 0,8t^2$ , откуда  $t = 10$  с. По формуле  $v = at$  находим мгновенную скорость  $v = 1,6 \cdot 10 = 16$ , т. е.  $v = 16 \text{ м/с}$ . ◁

От мгновенной скорости зависит решение многих практических задач.

Например, от скорости вхождения в воду спортсмена, прыгающего с вышки, зависит глубина его погружения.

При нахождении мгновенной скорости используется средняя скорость движения за малый промежуток времени.

Рассмотрим, как связаны между собой средняя и мгновенная скорости движения.

Пусть материальная точка  $M$  движется вдоль оси  $Ox$ , где  $O$  — положение материальной точки в момент времени  $t = 0$ . Если в момент времени  $t$  координата материальной точки равна  $s$ , где  $s = s(t)$ , то функцию  $s(t)$  называют законом движения точки  $M$ .

При неравномерном движении материальная точка за равные по длительности промежутки времени может совершать перемещения, разные не только по величине, но и по направлению. Средняя скорость движения материальной точки за промежуток времени от  $t$  до  $t + h$  определяется формулой

$$v_{\text{cp}} = \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Если рассматриваемое движение не является равномерным, то  $v_{\text{cp}}$  при фиксированном  $t$  будет меняться при изменении  $h$ , и чем меньше  $h$ , тем лучше  $v_{\text{cp}}$  будет характеризовать движение точки в момент  $t$ . Скоростью точки в момент  $t$  (мгновенной скоростью) называют предел, к которому стремится средняя скорость, когда  $h \rightarrow 0$ , т. е. скорость  $v$  в момент  $t$  определяется равенством

$$v = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{s(t+h) - s(t)}{h}.$$

Таким образом, скорость движения в момент  $t$  — предел отношения приращения координаты  $\Delta s = s(t+h) - s(t)$  за промежуток времени от  $t$  до  $t+h$  к приращению времени  $h$ , когда  $h \rightarrow 0$ , если этот предел существует.

Отношение  $\frac{s(t+h) - s(t)}{h}$  называют *разностным отношением*, а его предел при  $h \rightarrow 0$  называют *производной функции*  $s(t)$  и обозначают  $s'(t)$  (читается: «Эс штрих от тэ»).

Вообще, пусть функция  $f(x)$  определена на некотором промежутке,  $x$  — точка этого промежутка и число  $h \neq 0$  такое, что  $x+h$  также принадлежит данному промежутку. Тогда предел разностного отношения  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$  при  $h \rightarrow 0$  (если этот предел существует) называется *производной функции*  $f(x)$  в точке  $x$  и обозначается  $f'(x)$  (читается: «Эф штрих от икс»). Таким образом,

$$f'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}. \quad (1)$$

### Задача

Найти производную функции  $f(x) = x^2$ .

► Составим разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} = \frac{2xh + h^2}{h} = 2x + h.$$

Если  $h \rightarrow 0$ , то  $2x + h \rightarrow 2x$ , поэтому

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} (2x + h) = 2x.$$

Следовательно,  $(x^2)' = 2x$ . ◁

**Задача**

Найти производную функции  $f(x) = C$ , где  $C$  — заданное число.

▶  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{C - C}{h} = 0$ . Так как разностное отношение равно нулю при любом  $h \neq 0$ , т. е. его значение не меняется при  $h \rightarrow 0$ , то предел этого отношения также равен нулю. Таким образом, производная постоянной равна нулю, т. е.  $(C)' = 0$ . ◁

**Задача**

Найти производную линейной функции

$$f(x) = kx + b.$$

▶  $\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{k(x+h) + b - (kx + b)}{h} = \frac{kh}{h} = k$ .

Так как разностное отношение равно  $k$  при любом  $h \neq 0$ , то и предел этого отношения при  $h \rightarrow 0$  также равен  $k$ . Следовательно,  $(kx + b)' = k$ . ◁

Применяя формулу

$$(kx + b)' = k,$$

например, получаем

$$(3x + 7)' = 3, \quad (-2x + 1)' = -2, \quad (5x)' = 5, \quad (x)' = 1.$$

## Производная степенной функции

Вообще, справедлива формула производной степенной функции для любого действительного показателя:

$$(x^p)' = px^{p-1}. \quad (1)$$

Например,  $(x^5)' = 5x^4$ ,  $\left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$ ,  $\left(x^{\frac{3}{2}}\right)' = \frac{3}{2}x^{\frac{1}{2}}$ ,

$$(x^{\sqrt{2}})' = \sqrt{2}x^{\sqrt{2}-1}.$$

**Задача**Вычислить  $f'(9)$ , если  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$ .

$$\blacktriangleright f'(x) = \left(x^{-\frac{1}{2}}\right)' = -\frac{1}{2} x^{-\frac{3}{2}}, \quad f'(9) = -\frac{1}{2} \cdot 9^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{54}. \quad \triangleleft$$

Пользуясь формулами  $(x^p)' = px^{p-1}$  и  $(kx + b)' = k$ , можно найти производные степенной и линейной функций, например  $(x^7)' = 7x^6$ ,  $(3x - 1)' = 3$ . В более сложных случаях, например при нахождении производной функции  $(3x - 1)^7$ , можно воспользоваться следующей формулой:

$$((kx + b)^p)' = pk(kx + b)^{p-1}. \quad (2)$$

По формуле (2) при  $k = 3$ ,  $b = -1$ ,  $p = 7$  имеем

$$((3x - 1)^7)' = 21(3x - 1)^6.$$

**Задача**Вычислить  $f'(-3)$ , если  $f(x) = \sqrt{4 - 7x}$ .

$$\blacktriangleright \text{Запишем данную функцию так: } f(x) = (-7x + 4)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\text{По формуле (2) находим } f'(x) = -\frac{7}{2}(-7x + 4)^{-\frac{1}{2}}.$$

$$\text{При } x = -3 \text{ получаем } f'(-3) = -\frac{7}{2} \cdot 25^{-\frac{1}{2}} = -0,7. \quad \triangleleft$$

Практическая часть.

Найти производную функции (787—792).

787 1)  $x^6$ ; 2)  $x^7$ ; 3)  $x^{11}$ ; 4)  $x^{13}$ .

788 1)  $x^{-2}$ ; 2)  $x^{-3}$ ; 3)  $x^{-4}$ ; 4)  $x^{-7}$ .

789 1)  $x^{\frac{1}{2}}$ ; 2)  $x^{\frac{2}{3}}$ ; 3)  $x^{-\frac{2}{7}}$ ; 4)  $x^{\sqrt{3}}$ .

790 1)  $\frac{1}{x^5}$ ; 2)  $\frac{1}{x^9}$ ; 3)  $\sqrt[4]{x}$ ; 4)  $\sqrt[3]{x^2}$ ; 5)  $\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ ; 6)  $\frac{1}{\sqrt[4]{x^3}}$ .

791 1)  $(4x - 3)^2$ ; 2)  $(5x + 2)^{-3}$ ; 3)  $(1 - 2x)^{-6}$ ;

4)  $(2 - 5x)^4$ ; 5)  $(2x)^3$ ; 6)  $(-5x)^4$ .

792 1)  $\sqrt[3]{2x + 7}$ ; 2)  $\sqrt[4]{7 - 3x}$ ; 3)  $\sqrt[4]{3x}$ ; 4)  $\sqrt[3]{5x}$ .