



Кубанский государственный
аграрный университет



Начертательная геометрия
Направление : 35.03.06 | Агроинженерия
Направленность: Технические системы в агробизнесе

Лекция 3: Плоскость. Главные линии плоскости.
Взаимное расположение точки и плоскости.
Взаимное расположение прямой линии и плоскости.

КубГАУ, 2021 г.



Задание и изображение на чертеже

Положение плоскости в пространстве и на чертеже можно определить:

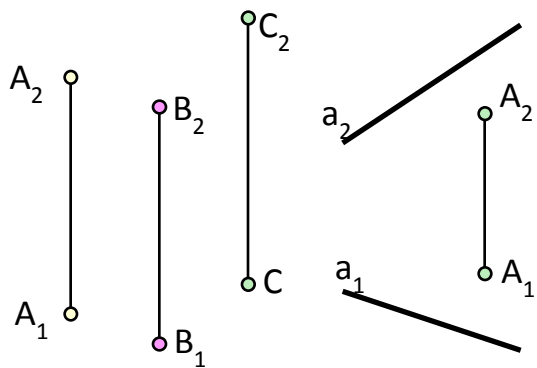
- 1) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 2) прямой и точкой вне ее;
- 3) двумя пересекающимися прямыми;
- 4) двумя параллельными прямыми;
- 5) любой плоской фигурой;
- 6) следами.

Следом плоскости называется линия пересечения этой плоскости с плоскостями проекций.

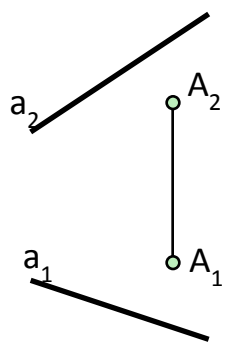
Горизонтальный след P_{Π_1} ; фронтальный P_{Π_2}

Плоскость, не перпендикулярная ни одной плоскости проекций, называется плоскостью общего положения. На комплексном чертеже проекции элементов, задающих плоскость, занимают общее положение.

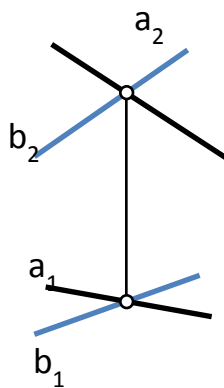
Плоскость, перпендикулярная или параллельная одной из плоскостей проекций, называется плоскостью частного положения.



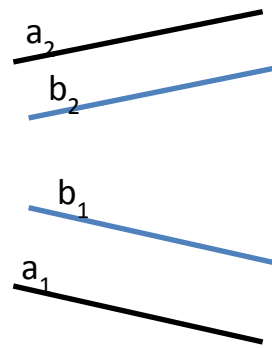
1)



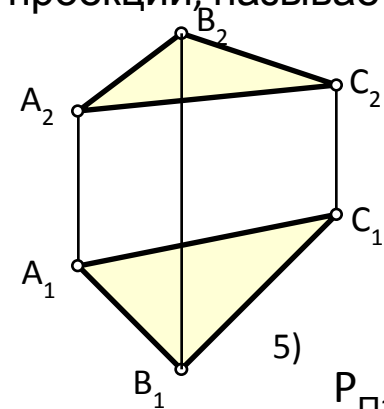
2)



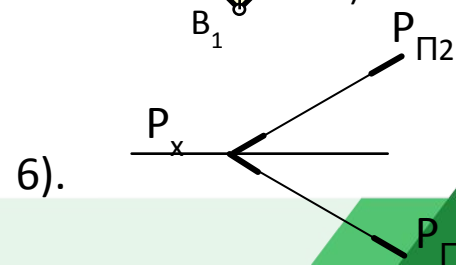
3)



4)



5)



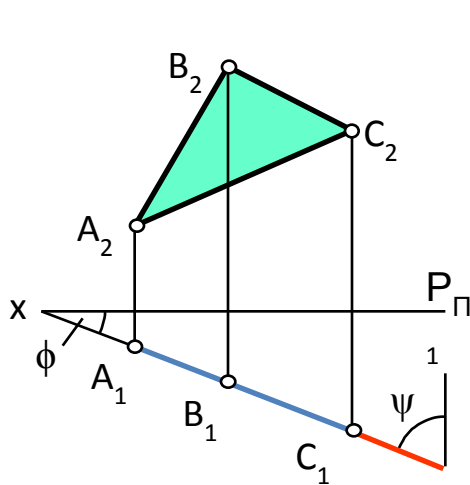
6).

Проецирующая плоскость

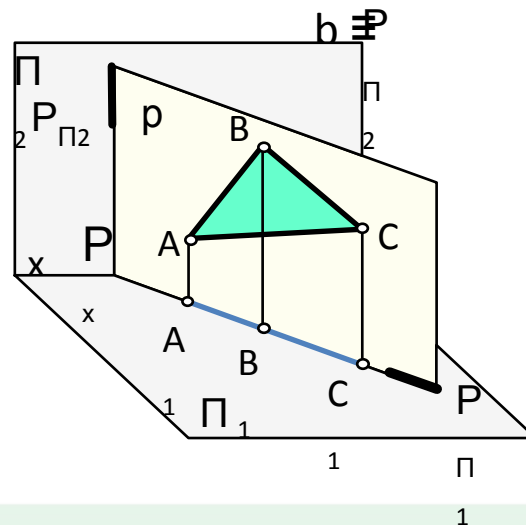
Плоскость, перпендикулярная одной из плоскостей проекций, называется проецирующей. Различают:

- а) горизонтально проецирующая плоскость ($\alpha \perp \Pi_1$); б) фронтально проецирующая плоскость
- б) ($\beta \perp \Pi_2$);
- в) профильно-проецирующая плоскость ($\gamma \perp \Pi_3$).

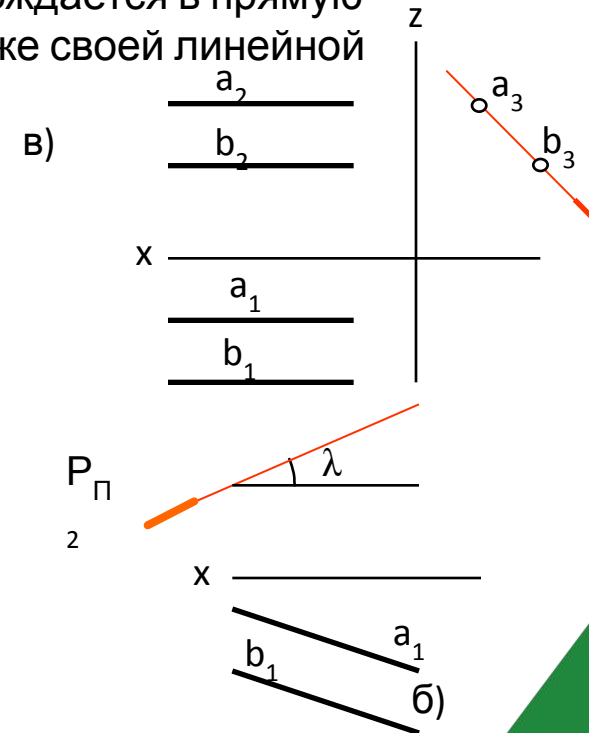
У проецирующих плоскостей одна проекция вырождается в прямую. Поэтому проекция фигуры, принадлежащей такой плоскости (треугольник **ABC**), вырождается в прямую (**A₁B₁C₁**). Проецирующая плоскость однозначно задается на чертеже своей линейной проекцией или проецирующим следом плоскости ($P_{\Pi_1} P_{\Pi_2} P_{\Pi_3}$)



а

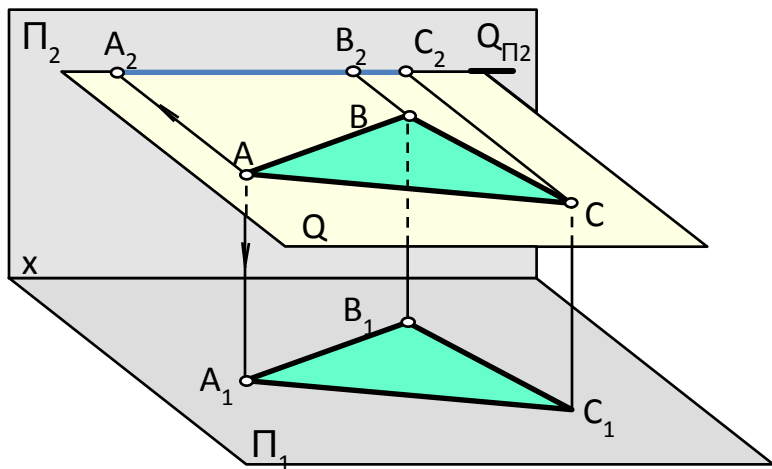


1



б)

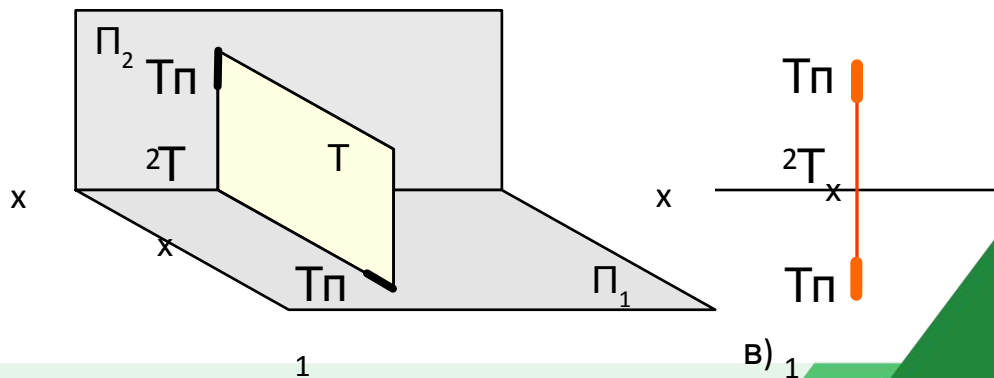
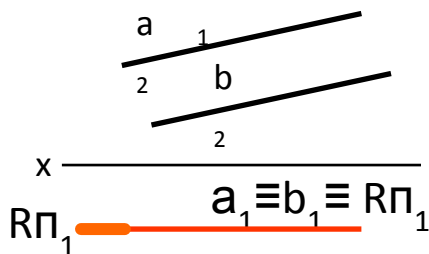
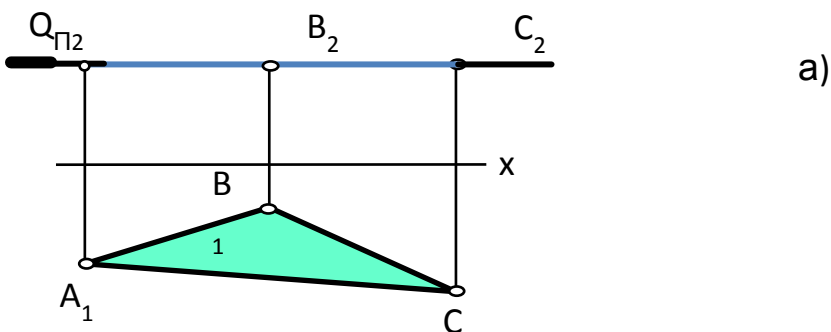
Плоскость, параллельная одной из плоскостей проекций, называется *плоскостью уровня*.



Различают:

- а) горизонтальная плоскость уровня ($Q_{П2} // П_1$);
- б) фронтальная плоскость уровня ($R_{П1} // П_2$);
- в) профильная плоскость уровня ($T_{П2} // П_3$).

Плоскость уровня является частным случаем проецирующей плоскости, поэтому на чертеже задается своей линейной проекцией или собирательным следом Фигура, принадлежащая плоскости уровня, проецируется на соответствующую плоскость проекций в натуральную величину.



б)

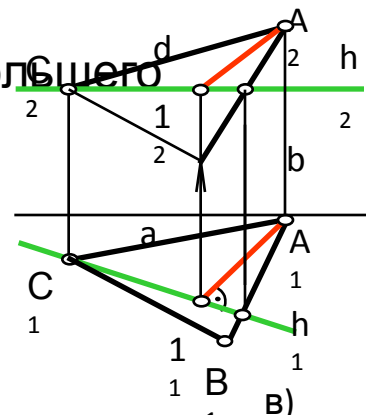
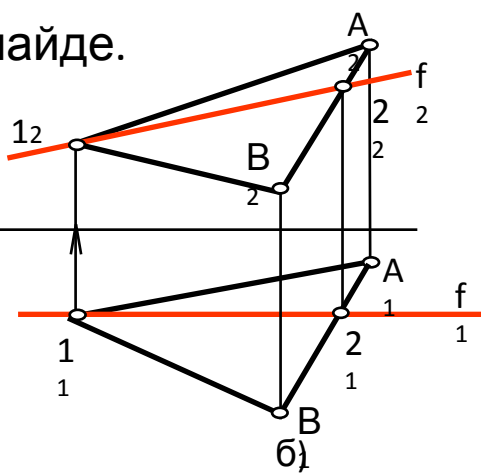
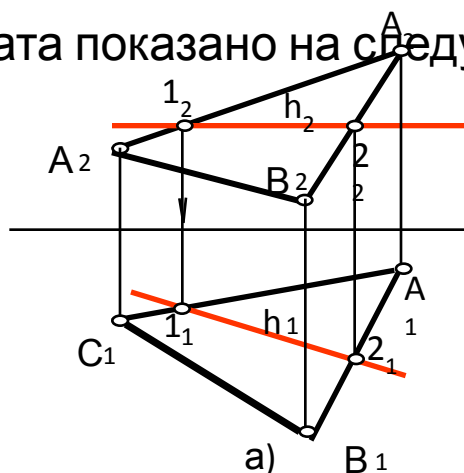
в) 1

В любой плоскости можно провести бесчисленное множество главных линий:

а) горизонтали; б) фронталы; в) профильные прямые; г) линии наибольшего ската. Линии наибольшего ската - прямые, проведенные в плоскости перпендикулярно к горизонталям этой плоскости.

Построение горизонтали начинают с ее фронтальной проекции h_2 ; построение фронталы плоскости начинают с ее горизонтальной проекции f_1 ; линию ската начинают с ее горизонтальной проекции $A_1 1_1$, которая перпендикулярна h_1 .

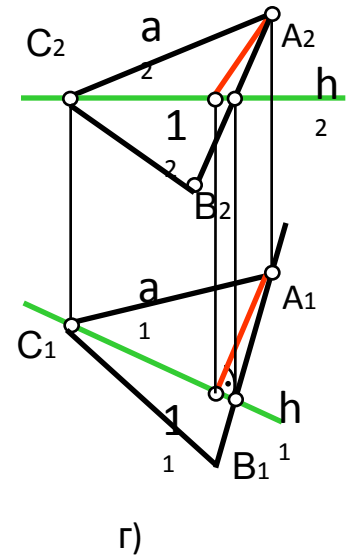
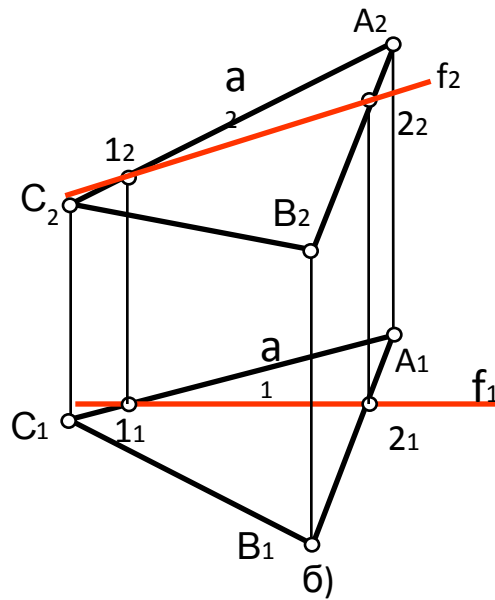
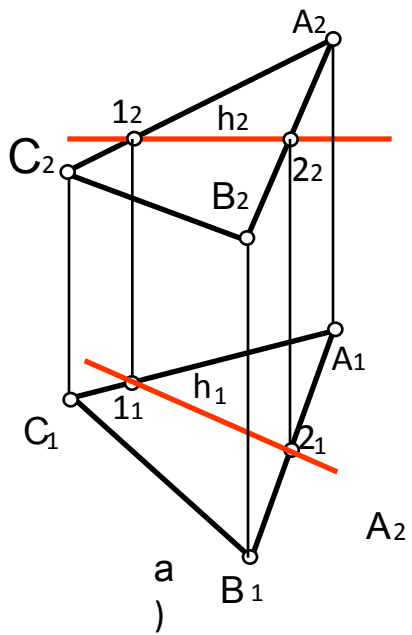
Поэтапное построение горизонтали, фронталы и линии наибольшего ската показано на следующем слайде.



Линиями наибольшего наклона плоскости к плоскостям Π_1 , Π_2 и Π_3 называют прямые, лежащие в ней и перпендикулярные или к горизонтальной плоскости, или к ее фронталю, или к ее

Горизонталью называется прямая лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций.

Фронталью называется прямая принадлежащая заданной плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций.



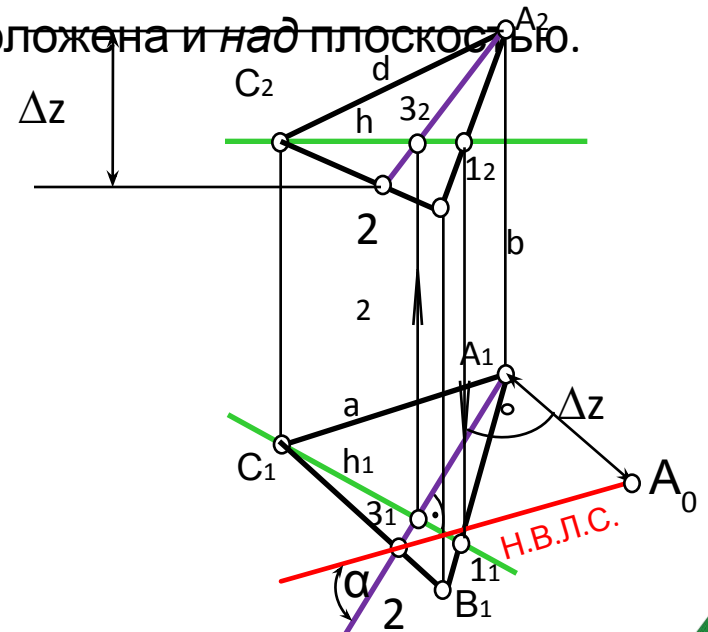
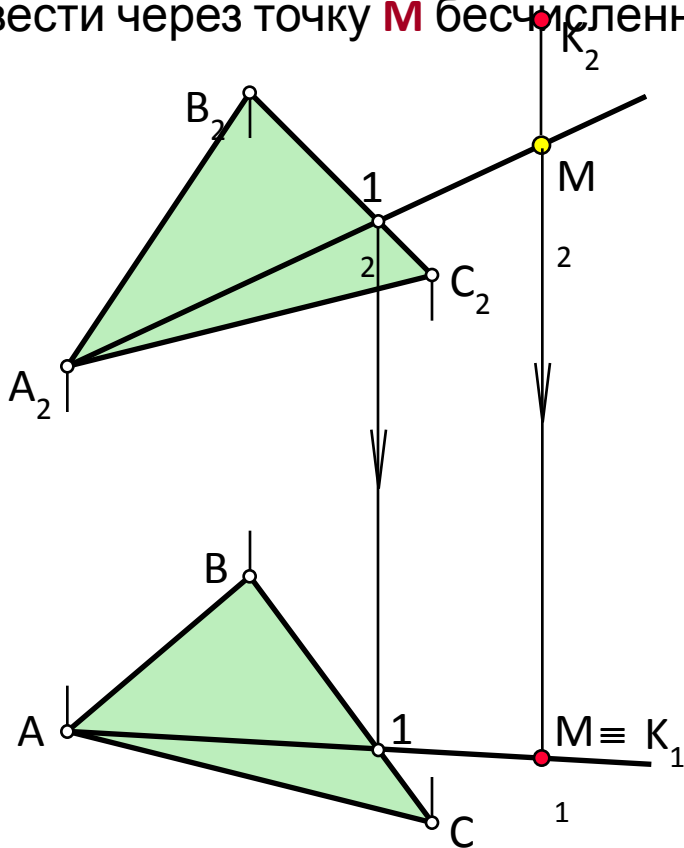
Точка лежит в плоскости, если ее проекции находятся на одноименных проекциях какой-либо прямой, принадлежащей данной плоскости.

Произвольно выбирают одну проекцию точки **M**, например, фронтальную ее проекцию

Искомую горизонтальную проекцию **M₁** точки **M** находят по линиям связи на горизонтальной

проекции (**A₁ 1₁**) прямой **A₁** плоскости. Таких вспомогательных прямых в плоскости можно провести через точку **M** бесчисленное множество. Одна из них и представлена на эпю

Если взять точку **K** горизонтально конкурирующую с точкой **M** и расположенную *над* ней, то точка **K** будет расположена и *над* плоскостью **A₂**.

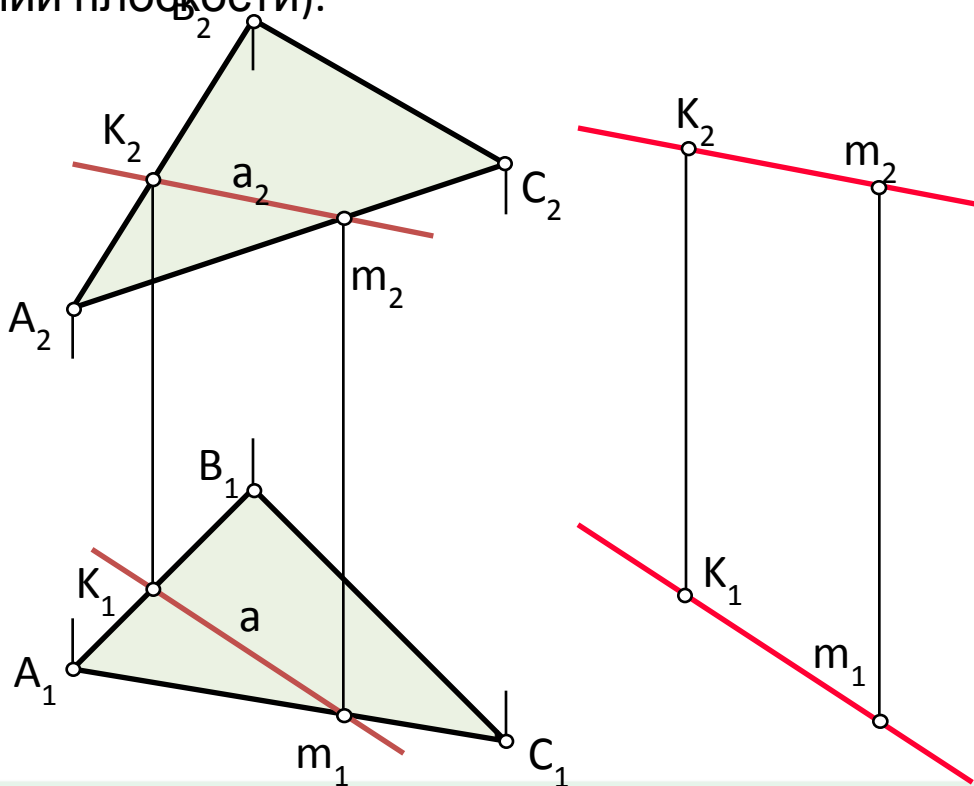


Возможны следующие три случая относительного расположения прямой и плоскости:

прямая *принадлежит* плоскости, прямая *параллельна* плоскости, прямая *пересекает* плоскость.

На основании свойства плоскости: если прямая линия соединяет две точки данной плоскости, то такая прямая всеми своими точками лежит в этой плоскости.

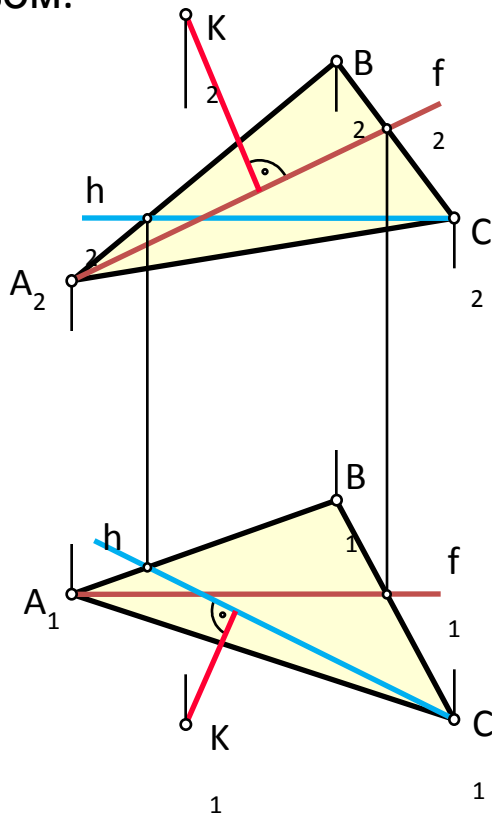
Построение прямых, принадлежащих плоскости рассмотрены на слайде (главные линии плоскости).



Из стереометрии известно: если прямая параллельна плоскости, то она параллельна одной из прямых, лежащих в этой плоскости. На эпюре параллельность прямой **m** и плоскости **ABC** доказывается тем, что $m_2 // a_2$, $m_1 // a_1$; прямая принадлежит плоскости **ABC**.

Если прямая линия пересекает плоскость под прямым углом, то на комплексном чертеже проекции этой прямой располагаются перпендикулярно проекциям соответствующих линий уровня плоскости.

Если, например, на плоскость, заданную треугольником **ABC**, необходимо опустить перпендикуляр из точки **K**, то построение выполняют следующим образом.



На плоскости проводят горизонталь **h** (h_2, h_1) и фронталь **f** (f_1, f_2).

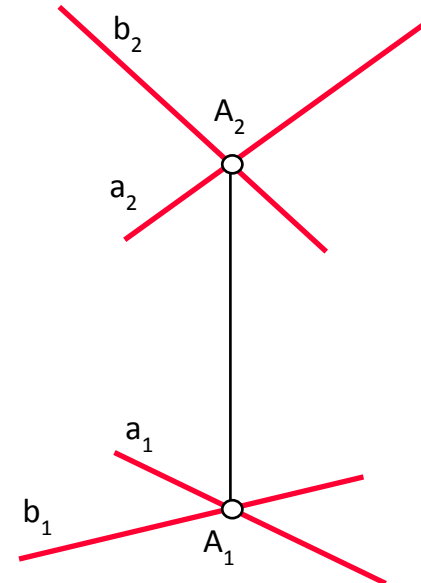
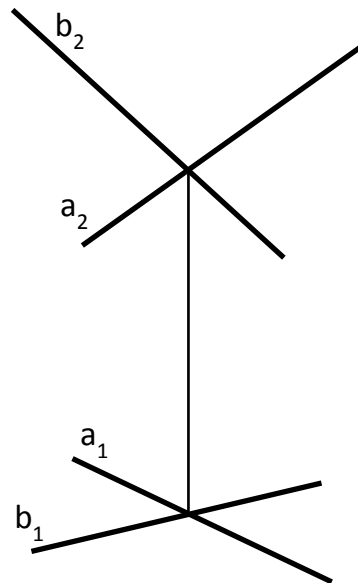
Затем из заданных проекций K_1 и K_2 точки **K** опускают перпендикуляры соответственно на h_1 и f_2 .

Прямая, проведенная таким образом из точки **K**, будет перпендикулярна плоскости треугольника **ABC** (так как прямая, перпендикулярная плоскости должна быть перпендикулярна двум прямым, лежащим в этой плоскости).

Две плоскости в пространстве могут быть либо взаимно параллельными, либо пересекающимися.

Плоскости параллельны, если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум пересекающимся прямым другой плоскости.

Искомая плоскость β , параллельная заданной плоскости α , определена прямыми a_1 и b_1 соответственно параллельными a и b заданной плоскости и проходящими через произвольную точку пространства A .

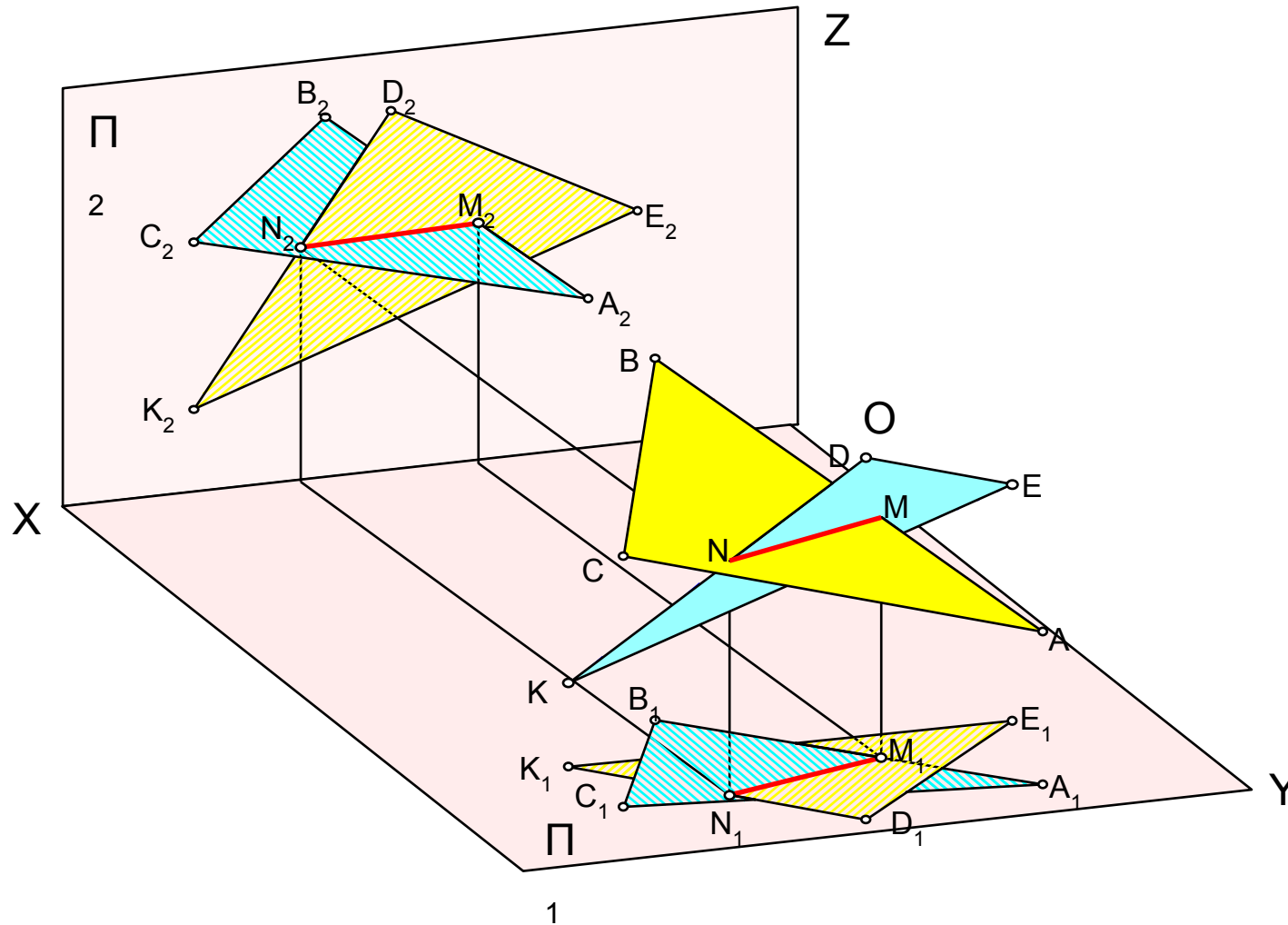


Определение линии пересечения двух плоскостей общего положения

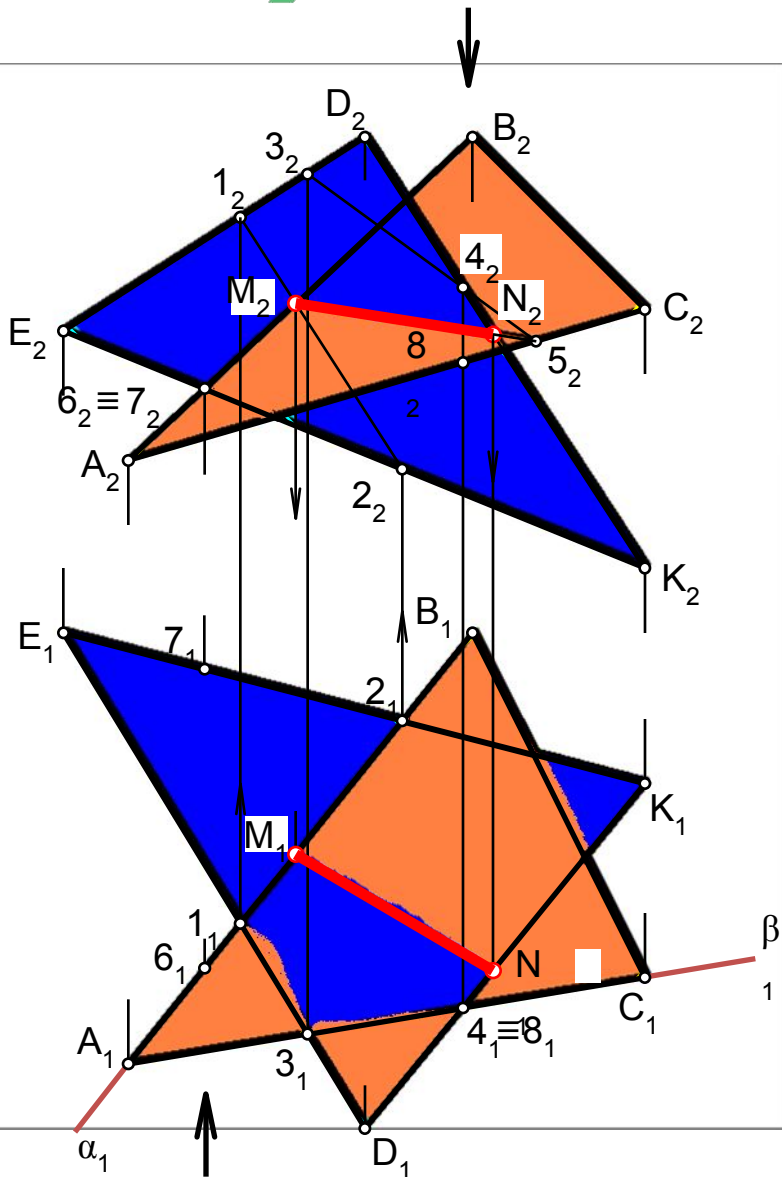
Для определения точек линии пересечения обе заданные плоскости **a** и **b** пересекают двумя вспомогательными (параллельными между собой) плоскостями-посредниками. Некоторое упрощение можно достичь, если вспомогательные плоскости проводить через прямые, задающие плоскость.

Рассмотрим пример. Плоскость **a** задана (**ABC**), плоскость **b** задана (**DEK**). Точки **M** и **N**, определяющие искомую линию пересечения двух данных плоскостей найдем как точки пересечения каких-либо двух сторон (как две прямые) треугольника **ABC** с плоскостью другого треугольника **DEK**, т.е. дважды решим позиционную задачу на определение точки пересечения прямой с плоскостью по рассмотренному алгоритму.

Выбор сторон треугольников произволен, так как только построением можно точно определить, какая действительно сторона и какого треугольника пересечет плоскость другого. Выбор плоскости-посредника также произволен, так как прямую общего положения, какими являются все стороны треугольников **ABC** и **DEK**, можно заключить в горизонтально проецирующую или во фронтально проецирующую плоскости.



Здесь вы видите аксонометрическое изображение решения задачи на определение линии MN пересечения двух плоскостей ABC и DEK .



1-й этап решения

Для построения точки **M** использована горизонтально проецирующая плоскость - посредник **a** (a_1), в которую заключена сторона **AB** треугольника **ABC** ($AB \perp a$).

2-й этап решения.

Строим линию пересечения (на чертеже она задана точками **1** и **2**) плоскости-посредника **a** (a_1) и плоскости **DEK**.

3-й этап решения.

Находим точку **M** пересечения прямой **1 - 2** с прямой **AB**.

Найдена одна точка **M** искомой линии пересечения.

Для построения точки **N** использована горизонтально проецирующая плоскость **b** (b_1), в которую заключена сторона **AC** треугольника **ABC**.

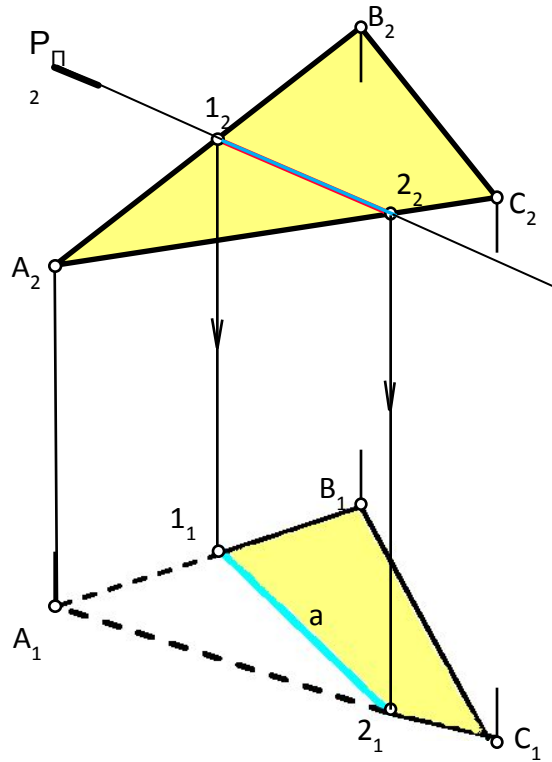
Построение аналогичны предыдущим. одна точка **M** искомой линии пересечения.

Определение видимости на плоскости Π_1 выполнено с помощью горизонтально конкурирующих точек **4** и **8** ($4_1 \circ 8_1$).

Точка **4** расположена **над** точкой **8** (4_2 и 8_2), поэтому на плоскости Π_1 часть треугольника **DEK**, расположенная в сторону точки **4**, закрывает собой часть треугольника **ABC**, расположенную от линии пересечения в сторону точки **8**.

С помощью пары фронтально конкурирующих точек **6** и **7** ($6_2 \circ 7_2$) определена видимость на плоскости Π_2 .

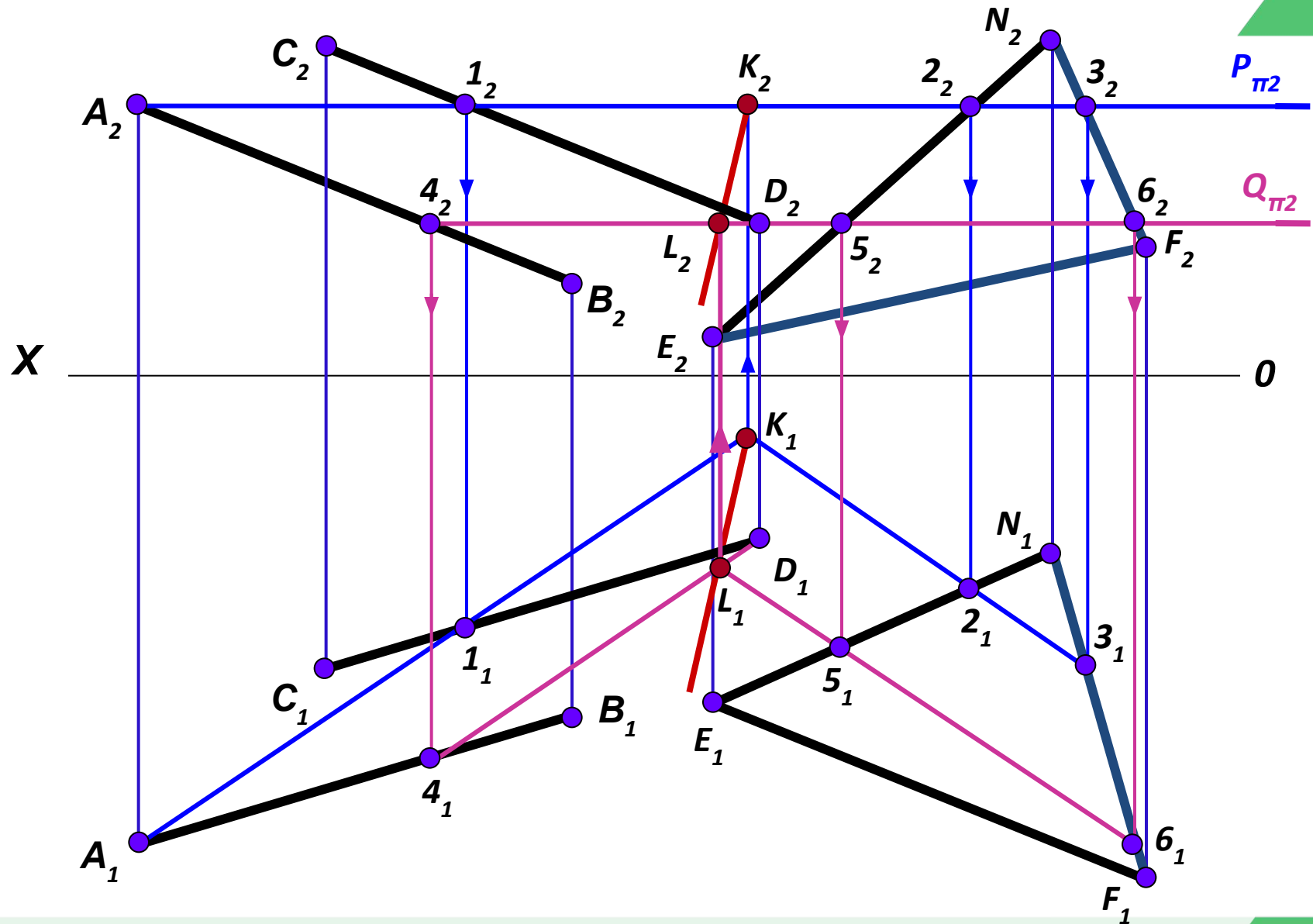
Пересекающиеся плоскости.



Линией пересечения двух плоскостей является прямая, для построения которой достаточно определить две точки, общие обеим плоскостям.

Если одна из пересекающихся плоскостей занимает частное положение, то ее вырожденная проекция (след плоскости) включает в себя и проекцию линии **a** пересечения плоскостей.

Горизонтальную проекцию прямой строят по двум общим с плоскостью точкам **1₁** и **2₁**. На горизонтальной проекции часть $\Delta 1_1, A_1, 2_1$ будет не видима, т.к находится ниже проецирующего следа P_{Π} .

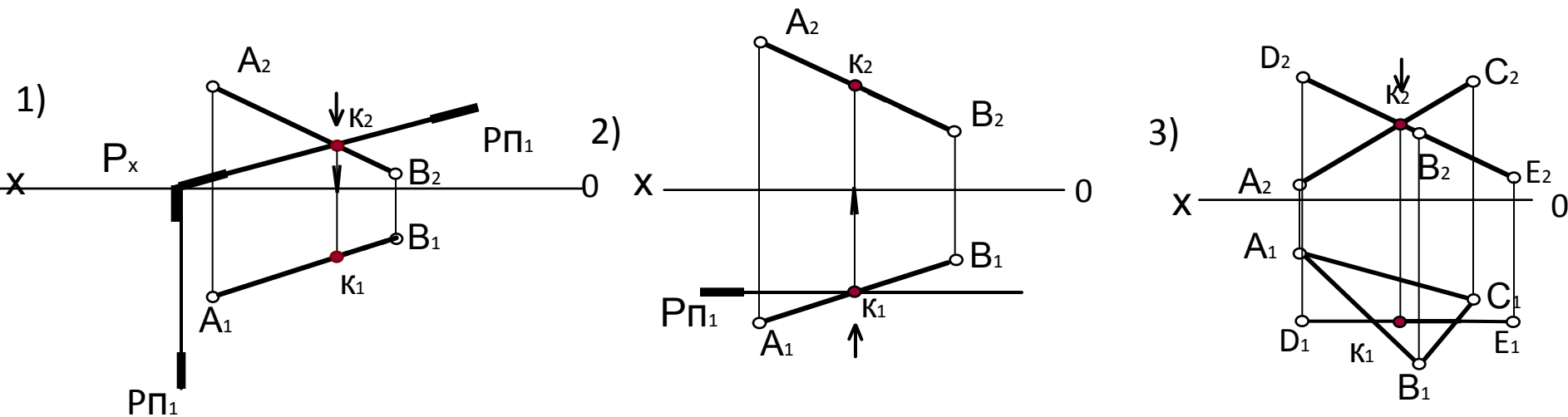


АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ЛИНИИ ПЕРЕСЕЧЕНИЯ ПЛОСКОСТЕЙ:

1. Для решения задачи воспользуемся двумя вспомогательными секущими плоскостями уровня.
2. Определяем линию пересечения первой вспомогательной плоскости $P_{п_1}$ с заданными плоскостями (AB и CD ; и $\triangle ENF$) там, где на горизонтальной проекции эти 2 линии между собой пересекаются, находим точку K_1 – общую для трех плоскостей. Фронтальная проекция точки K лежит на фронтальном следе плоскости $P_{п_2}$.
3. Со второй секущей плоскостью $Q_{п_2}$ делаем аналогичные построения. Находим общую точку для трех плоскостей $K_1 \setminus ; K_2 \setminus$. Одноименные проекции точек соединяем.

(2-Я ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ)

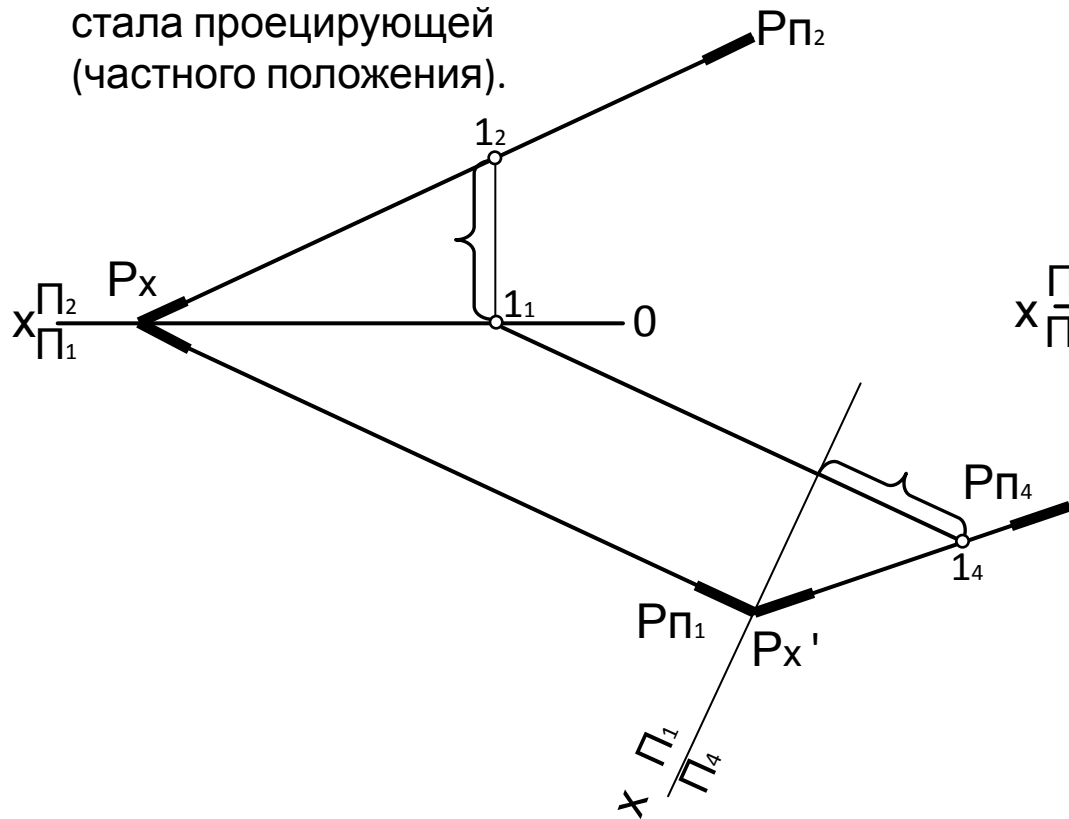
Если плоскость задается частного положения и требуется определить точку встречи прямой с плоскостью, необходимо вспомнить о собирательном свойстве одного из следов плоскости. А согласно этому свойству точка встречи всегда лежит на собирательном следе. Значит остается найти вторую проекцию точки встречи.



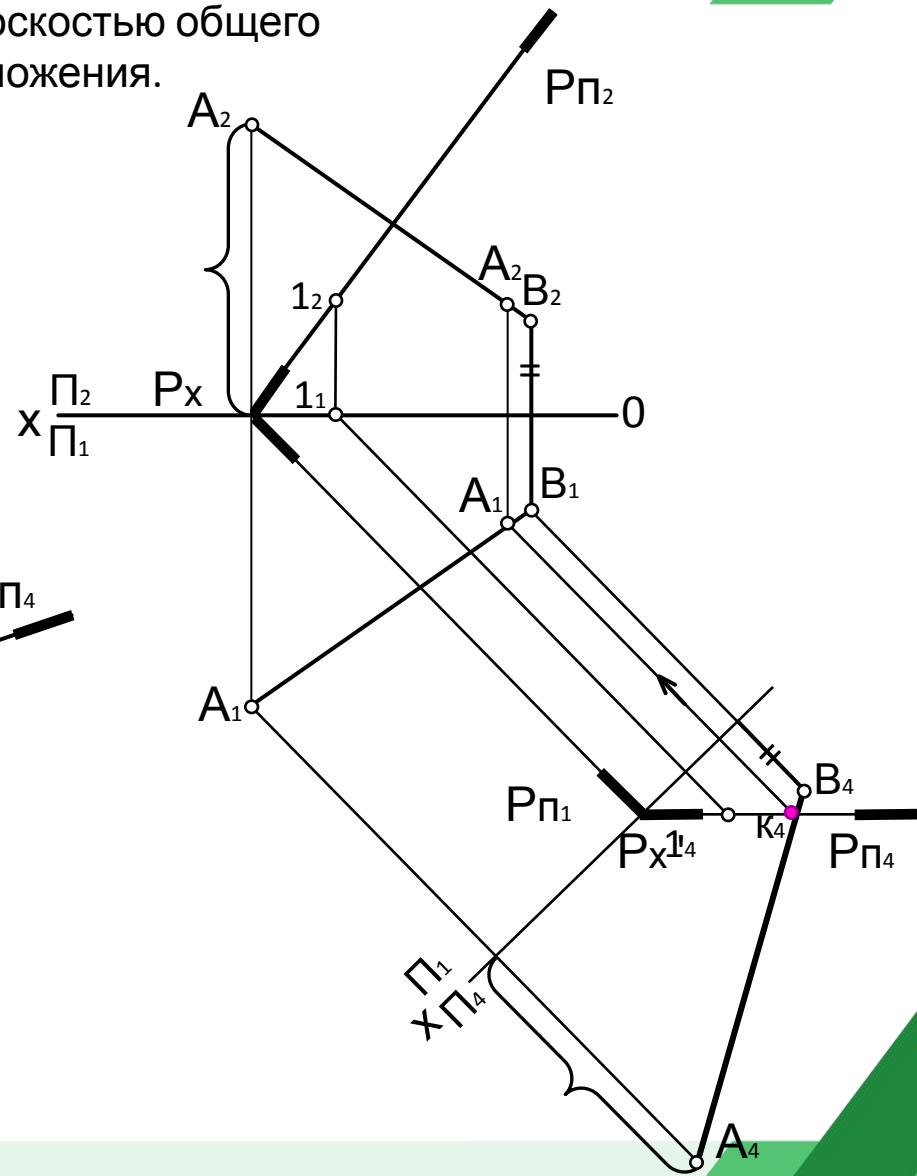
Если задана плоскость общего положения и прямая, то для нахождения точки пересечения прямой с плоскостью необходимо сделать следующие построения:

- 1) заключить прямую в плоскость частного положения;
- 2) Построить линию пересечения заданной плоскости со вспомогательной;
- 3) Определить точку пересечения прямой с плоскостью;
- 4) Определить видимость прямой.

Пример 1. Преобразовать методом замены плоскостей эюр таким образом, чтобы плоскость общего положения стала проецирующей (частного положения).



Пример 2. Определить точку встречи прямой с плоскостью общего положения.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЯ ОТ ТОЧКИ ДО ПЛОСКОСТИ.

(3-Я ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ).

Если плоскость до которой определяем расстояние является плоскостью частного положения, задача решается очень просто.

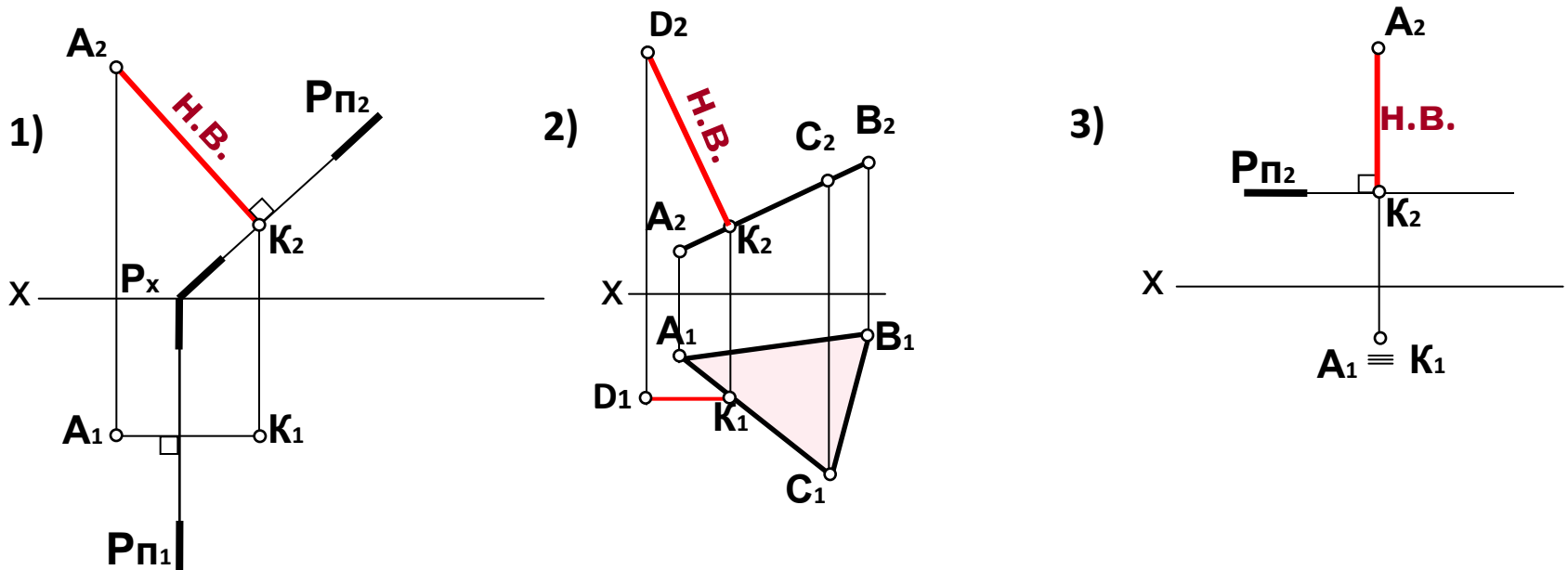
Собирательное свойство плоскости частного положения дает нам возможность сразу определить на следе точку пересечения перпендикуляра, опущенного из точки к собирательному следу плоскости. Вторая проекция точки встречи находится по линии проекционной связи.

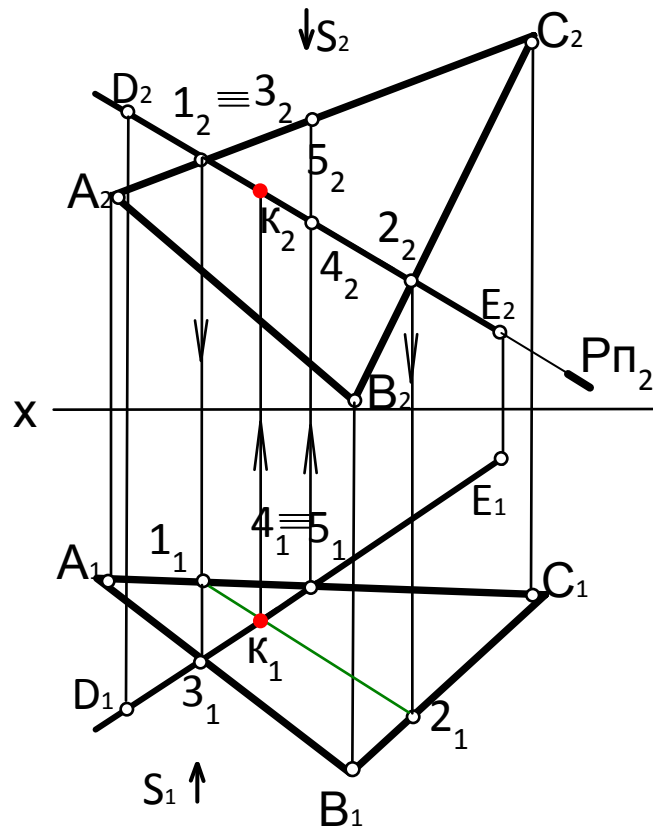
Опустить перпендикуляр к плоскости заданной следами, это значит провести его на проекциях перпендикулярно соответствующим следам плоскости (согласно теореме о проекции прямого угла).

Если плоскость частного положения задана треугольником или любым другим способом, перпендикуляр из точки нужно проводить на той проекции где треугольник или другой геометрический образ проецировался в одну линию. Определим точку «К», а на второй проекции перпендикуляр, проведенный из точки «К» будет всегда \perp оси ox , т.к. на первой проекции он проецируется в натуральную величину.

Если задается плоскость общего положения до которой нужно определить расстояние, нужно преобразовывать эпюр таким образом, чтобы эта плоскость стала проецирующей, а затем решать, как примеры 1, 2, 3

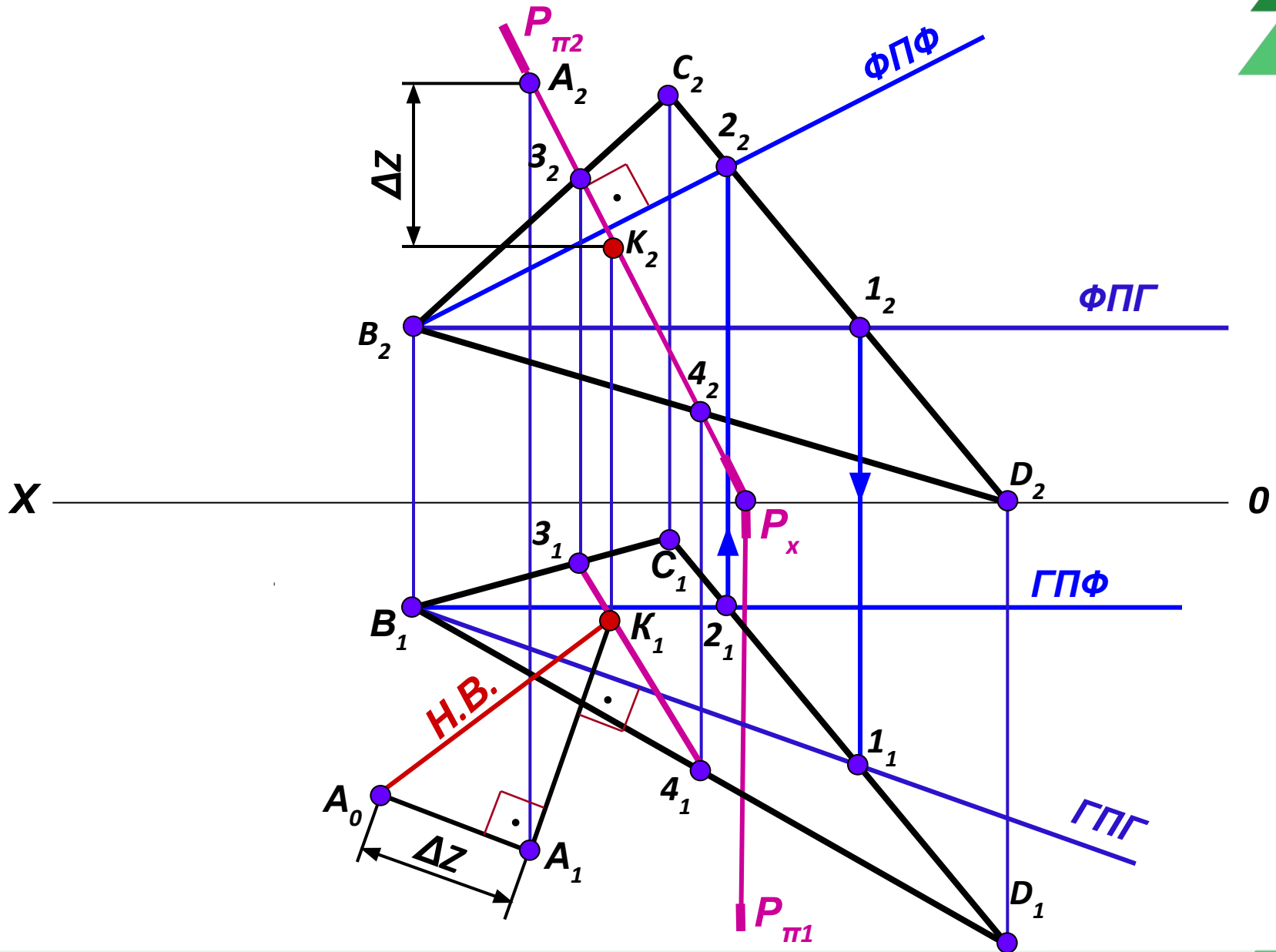
Определение расстояние от точки **A** до частного положения плоскости





Для того, чтобы определить видимость на горизонтальной проекции нужно:

1. конкурирующие точки $4_1; 5_1$ обозначить на горизонтальной проекции, найти их проекции на фронтальной плоскости;
2. определить, у которой из точек большая координата Z , та прямая и будет видимая на горизонтальной плоскости.



Если требуется определить расстояние от точки до плоскости общего положения, например, ΔBCD .

Для решения задачи используем алгоритм:

1. Проводим в треугольнике BCD горизонталь h_1, h_2 .
2. Проводим в треугольнике фронталь f_1, f_2 .
3. Из точки A_2 опускаем перпендикуляр к f_2 .
4. Из точки A_1 опускаем перпендикуляр к h_1 .
5. Заключаем перпендикуляр, опущенный из точки A_2 во фронтально-проецирующую плоскость Pp_2 .
6. Находим точки пересечения следа Pp_2 со сторонами треугольника $3_2 4_2$. Спроецируем линию пересечения на горизонтальную проекцию треугольника $3_1 4_1$.
7. На пересечении горизонтальной проекции линий пересечения плоскостей и горизонтальной проекции перпендикуляра определяем точку встречи перпендикуляра с плоскостью K_1 . Находим фронтальную проекцию точки встречи перпендикуляра с плоскостью K_2 .
8. Определяем натуральную величину перпендикуляра методом прямоугольного треугольника. Для этого замеряем величину Δz , строим на горизонтальной проекции прямоугольный треугольник, у которого один катет является проекцией перпендикуляра K_1 , а второй – величиной Δz . Гипотенуза этого треугольника есть натуральная величина