Никакой достоверности нет в том, что не   имеет связи с математикой

Леонардо да Винчи

Невозможно управлять тем, что нельзя измерить

Эдвард Дёминг

Карл Фридрих Гаусс – родился 30 апреля 1977 года в Германии. Считается *"королем математики"*. Занимался исследованиями в таких областях как: алгебра, дифференциальная и неевклидовая геометрия, математический анализ, теории функций комплексного переменного, теория вероятностей, а также в астрономии, геодезии и механике.

Анри Пуанкаре - выдающийся французский ученый, математик, физик, философ и астроном. Родился 29апреля 1854 года. Анри Пуанкаре являлся *членом более тридцати академий мира.* Известен как один из создателей топологии, теории относительности.

РАЗДЕЛ 1. Элементы линейной алгебры

Одной из основных задач линейной алгебры является решение системы линейных алгебраических уравнений. Использование аппарата матриц позволяет формально решать эту задачу с помощью определённых арифметических операций над числовыми таблицами из коэффициентов системы.

- **Матрицы и определители**

- **Матрицей размера m×n** называется прямоугольная таблица чисел – элементов a_{ij}, составляющих m строк и n столбцов: $i = 1; 2; 3; \dots; \mathrm{m} = \overline{1; \mathrm{m}}, \quad j = 1; 2; 3; \dots; n = \overline{1; n}$. Если m = n, матрица называется **квадратной**, а число **n** –её **порядком**.

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \dots\dots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

- **Произведением матрицы на число** называется матрица, каждый элемент которой получен умножением соответствующего элемента матрицы А на это число ⅄:

$$\lambda \cdot A = \lambda \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{m1} & \lambda a_{m2} & \dots & \lambda a_{mn} \end{pmatrix} = \mathrm{C}$$

- **Суммой (разностью)** матриц является матрица, элементами которой являются соответственно сумма (разность) элементов исходных матриц.

- **Произведением матриц** $A = (a_{ik}),\ i = \overline{1; n},$ и $B = (b_{kl}),\ l = \overline{1; n},$ матрица $P = (p_{il})$ элементы которой являются суммами произведений элементов строк первой матрицы на соответствующие элементы столбцов второй матрицы $p_{il} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kl}$:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1r} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2r} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{nr} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + \cdots + a_{1n}b_{n1} & \dots & a_{11}b_{1r} + a_{12}b_{2r} + \cdots + a_{1n}b_{nr} \\ a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + \cdots + a_{2n}b_{n2} & \dots & a_{21}b_{1r} + a_{22}b_{2r} + \cdots + a_{2n}b_{nr} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{m1}b_{11} + a_{m2}b_{21} + \cdots + a_{mn}b_{n2} & \dots & a_{m1}b_{1r} + a_{m2}b_{2r} + \cdots + a_{mn}b_{nr} \end{pmatrix}$$

ПРИМЕР 1.
Записать данную систему в виде одного матричного уравнения

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -18 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

Эварист Галуа
(1811- 1831 г.г.) – выдающийся французский математик, основатель современной высшей алгебры. Революционер-республиканец, он был застрелен на дуэли в возрасте двадцати лет

Решение. Обозначим А-матрица коэффициентов системы или основная матрица, X - матрица неизвестных В-матрица свободных членов

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

Ответ: A·X=B < = >

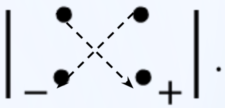
$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix}$$

• Определители второго и третьего порядков

Определителем или детерминантом квадратной матрицы А размерности $n \times n$ называется число Δ (обозначается также $|A|$ или $\det A$), которое вычисляется с помощью элементов матрицы по определенному правилу в зависимости от её порядка n.

Если n = 2, то ***определитель второго порядка***

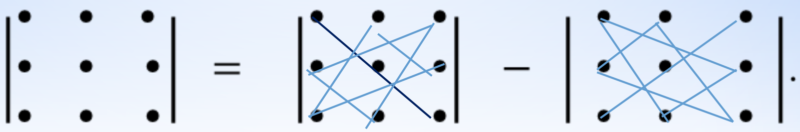
$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21},$$ схема вычисления



Если n = 3, то ***определителль третего порядка*** $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} =$

$$= (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}\,a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}),$$

Схема вычисления определителя 3 − го порядка по правилу треугольников



- **Вычисление определителя порядка $\mathbf{n \geq 2}$**

Определители порядка $\mathrm{n} > 2$ можно вычислять разложением по элементам первой строки матрицы $\mathrm{A} = (\mathrm{a_{ik}})_{\mathrm{n,n}}$ по правилу

$$\det A = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{1+k} a_{1k} M_{1k},$$

где M_{1k} - определитель матрицы A', которая получается из A вычёркиванием 1-ой строки и $k-$ ого столбца.

Процедура последовательно повторяется начиная с определителей порядка

$\mathrm{n}, \mathrm{n}-1, n-2, n-3,$ ... до $n-(n-3)=3$ или $\mathrm{n}-(n-2)$ =2.

Например согласно последнему правилу определитель 3 – его порядка

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} . =$$

$$=a_{11}(a_{22}a_{33}-a_{23}a_{32})-a_{12}(a_{21}a_{33}-a_{23}a_{31})+a_{13}(a_{21}a_{32}-a_{22}a_{31})$$

• Единичная и обратная матрицы

Единичной матрицей называется квадратная матрица вида

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ & \dots\dots & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix}$$

Матрица A^{-1} называется **обратной** к квадратной матрице A, если

$$A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = E.$$

Для того чтобы матрица A имела обратную, необходимо и достаточно, чтобы она была *невырожденной*, т.е. чтобы $\det A \neq 0$.

Обратная матрица к матрице A с определяется таблицей чисел

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{m1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{m2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{mn} \end{pmatrix}.$$

Числа A_{ij}- *алгебраические дополнения матрицы* A подсчитываются по правилу $A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$. где M_{ij} – *миноры матрицы* A - определители матрицы A', которая получается из A вычёркиванием i - ой строки и j-го столбца.

ПРИМЕР 2. Найти матрицу, обратную к матрице $A=\begin{pmatrix}2 & -1 & -2\\ 3 & 1 & -1\\ -2 & 3 & 4\end{pmatrix}.$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем алгебраические дополнения элементов матрицы А

$$A_{11}=+\begin{vmatrix}1 & -1\\ 3 & 4\end{vmatrix}=7 \quad A_{21}=-\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=-2, \quad A_{31}=+\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{12}=-\begin{vmatrix}3 & -1\\ -2 & 4\end{vmatrix}=-10 \quad A_{22}=+\begin{vmatrix}2 & -2\\ -2 & 4\end{vmatrix}=4, \quad A_{32}=-\begin{vmatrix}2 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=-4$$

$$A_{13}=+\begin{vmatrix}3 & 1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=11 \quad A_{23}=-\begin{vmatrix}2 & -1\\ -2 & 3\end{vmatrix}=-4, \quad A_{33}=+\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5$$

$$\Delta(A)=2\cdot 7+(-1)\cdot(-10)+(-2)\cdot 11=2.$$

Ответ:

$$A^{-1}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}7 & -2 & 3\\ -10 & 4 & -4\\ 11 & -4 & 5\end{pmatrix}.$$

ТЕМА 2 . Системы линейных алгебраических уравнений

ПРИМЕР 3. Решить матричное уравнение $AX = B$.

Р е ш е н и е . Умножим обе части матричного уравнения $AX = B$ на матрицу A^{-1}:
$A^{-1}\cdot(AX) = A^{-1}\cdot B$. Так как $A^{-1}\cdot(AX) = (A^{-1}\cdot A)\cdot X = E\cdot X = X$, получаем

О т в е т: $X = A^{-1}\cdot B$.

ПРИМЕР 4

Решить матричным методом систему уравнений

$$\begin{cases} 3x + y - 2z = -18 \\ x + 3y - z = -11 \\ 4x - 2y - 3z = -12 \end{cases}$$

Р е ш е н и е . $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$ $\quad A^{-1} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}.$

$X = A^{-1}\cdot B$

$$= -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} -11 & 7 & 5 \\ -1 & -1 & 1 \\ -14 & 10 & 8 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} -13 \\ -11 \\ -12 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ -24 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

О т в е т: $x = -1$, $y = -2$, $z = 4$.

• Правило Крамера

Если отличен от нуля главный определитель матрицы А из коэффициентов системы линейных алгебраических уравнений

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \qquad \ldots \\ \qquad \ldots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

$$\Delta = \det A = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{vmatrix} \neq 0$$

то эта система имеет единственное решение, которое вычисляется по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}, \; i = \overline{1;n}.$$

Частный определитель Δi находится путем замены i-того столбца в главном определителе Δ на столбец свободных членов b_i.

ПРИМЕР 5. Решить систему уравнений методом Крамера

$$\begin{cases} 2x+4y-z=3 \\ -x+3y+2z=7 \\ 3x+2y-2z=-3 \end{cases}.$$

РЕШЕНИЕ. Вычисляем определители

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 4 & -1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=7, \quad \Delta_x=\begin{vmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 7 & 3 & 2 \\ -3 & 2 & -2 \end{vmatrix}=-21,$$

$$\Delta_y=\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ -1 & 7 & 2 \\ 3 & -3 & -2 \end{vmatrix}=14, \quad \Delta_z=\begin{vmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix}=-7.$$

$$x=\frac{-21}{7}=-3, \quad y=\frac{14}{7}=2, \quad z=\frac{-7}{7}=-1.$$

ОТВЕТ: $x=-3, \quad y=2, \quad z=-1.$

* • **Метод Жордана - Гаусса**

Основой идеей метода Гаусса является приведение тождественными преобразованиями расширенной матрицы системы к треугольному виду

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ & & \dots & & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} & b_n \end{array}\right) => \quad T = \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & \square_{12} & \square_{13} & \square & \square_{1\square} & \square_{1} \\ 0 & 1 & \square_{23} & \square & \square_{2\square} & \square_{2} \\ 0 & 0 & 1 & \square & \square_{3\square} & \square_{3} \\ \square & \square & \square & \square & \square & \square \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \square_{\square-1,\square} & \square_{\square-1} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \square_{\square} \end{array}\right)$$

Тождественные преобразования матриц,

не меняющие решение исходной системы линейных уравнений, заключаются в следующем:

- перемена местами двух строк матрицы;
- умножение любой строки на любое ненулевое число;
- умножение строки на любое число, отличное от нуля и сложение с соответствующими элементами другой строки.

ПРИМЕР 6. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} 2x - y + 3z = 4 \\ 3x + y - 2z = 5 \\ x + 4y + z = -11 \end{cases}.$$

РЕШЕНИ**Е**

$$\tilde{A} = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 1 & 4 & 1 & -11 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 \Leftrightarrow C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 3 & 1 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 3 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} C_2 - 3C_1 \\ \sim \\ C_3 - 2C_1 \end{array} \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -11 & -5 & 38 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim$$

$$\underset{\sim}{4C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & -44 & -20 & 152 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_2 - 5C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & -9 & 1 & 26 \end{array}\right) \sim \underset{\sim}{C_3 + 2C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & -224 & 224 \end{array}\right) \underset{\sim}{-\frac{1}{224}C_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 1 & -11 \\ 0 & 1 & -25 & 22 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \sim$$

$$\begin{array}{c} C_2 + 25C_3 \\ \sim \\ C_1 - C_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 4 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right) \underset{\sim}{C_1 - 4C_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

ОТВЕТ: $x = 2$, $y = -3$, $z = -1$.