Метод искусственного базиса

Цель метода искусственного базиса – построение начального БДП (либо установить отсутствие БДП).

ЗЛП задана в канонической форме, ($b_i \geq 0\,, \quad i=\overline{1,m}$ Этого всегда можно добиться, умножив уравнения на -1):

$$C(x) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_n x_n \to \max$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \qquad (1)$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0$$

Вспомогательная задача к ЗЛП (1):

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n + x_{n+1} = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n + x_{n+2} = b_2 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n + x_{n+m} = b_m \end{cases} \qquad \textbf{(2)}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m} \geq 0$$

$$\widetilde{C}(\widetilde{x}) = -x_{n+1} - x_{n+2} - \ldots - x_{n+m} \to \max$$

Вектор составлен из естественных переменных ЗЛП (1.) и *искусственных переменных*, введенных в ЗЛП (2):

$$\widetilde{x} = (\underbrace{x_1, x_2, \ldots, x_n}_{\text{естественные переменные}}, \underbrace{x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots, x_{n+m}}_{\text{искусственные переменные}})$$

Искусственные переменные не несут никакого экономического смысла. Они необходимы только для поиска начального БДП.

Единичные векторы $A_{n+1}, A_{n+2}, \ldots, A_{n+m}$ образуют ***искусственный базис*** системы ограничений ЗЛП (2). Они представляют собой единичную матрицу размера $m \times m$.

В ЗЛП (2) мы имеем начальный БДП, в котором первые n координат равны нулю.

Пусть множество допустимых планов задачи (1) - D_1, а множество допустимых планов задачи (2) - D_2.

Теорема. **(**О существовании плана ЗЛП).

Пусть $\widetilde{x}^{\,*} = (x_1^*, ..., x_n^*, x_{n+1}^*, ..., x_{n+m}^*)$ оптимальный план ЗЛП (2), тогда:

1. Если $\widetilde{C}(\widetilde{x}^{\,*}) = 0$, то план $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_m^*)$ является планом задачи (1), т.е. $x^* = (x_1^*, x_2^*, ..., x_n^*)$ $\in D_1$.
2. Если $\widetilde{C}(\widetilde{x}^{\,*}) < 0$, то ЗЛП (1) не имеет допустимых планов, т.е. D_1 есть пустое множество ($D_1 = \varnothing$).

<u>Замечание.</u> Вспомогательная задача (2) всегда имеет оптимальный план.

П р и м е р: Рассмотрим ЗЛП:

$$C(x) = 2x_1 - x_2 \to \min$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 \\ x_1 - x_2 \geq 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

Приведем данную ЗЛП к каноническому виду:

$$C_1(x) = -2x_1 + x_2 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 14 \\ x_1 - x_2 - x_4 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Единичного базиса нет, поэтому построим вспомогательную задачу, предварительно введя две искусственные переменные $x_5 \geq 0$ и $x_6 \geq 0$.

$$\widetilde{C}(\widetilde{x}) = -x_5 - x_6 \to \max$$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 14 \\ x_1 - x_2 - x_4 \quad + x_6 = 8 \end{cases}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

			-2	1	0	0	x	x
			0	0	0	0	-1	-1
c_σ	Базис	$A_0=b$	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
-1	A_5	14	1	1	-1	0	1	0
-1	A_6	8	**1**	-1	0	-1	0	1
	$/\Delta_j$	-22	-2	0	1	1	0	0
-1	A_5	6	0	**2**	-1	1	1	-1
0	A_1	8	1	-1	0	-1	0	1
	$/\Delta_j$	-6	0	-2	1	-1	0	2
0	A_2	3	0	1	-0,5	0,5	0,5	-0,5
0	A_1	11	1	0	-0,5	-0,5	0,5	0,5
	$/\Delta_j$	0	0	0	0	0	1	1
1	A_2	3	0	1	-0,5	0,5		
-2	A_1	11	1	0	-0,5	-0,5		
	$/\Delta_j$	-19	0	0	0,5	1,5	0	1

Решив данную вспомогательную задачу симплекс-методом, мы найдем ее оптимальный план и значение целевой функции на этом плане:

$$\tilde{x}^* = (11; 3; 0; 0; 0; 0) \qquad \tilde{C}(\tilde{x}^*) = 0$$

Оптимальный план вспомогательной задачи есть начальный БДП основной задачи. После чего необходимо приступить к ее решению также симплекс-методом. Оптимальный план основной задачи:

$$x^* = (11; 3; 0; 0); \quad C_1(\mathrm{x}^*) = -19; \quad C(\mathrm{x}^*) = 19$$