Издательство Легион»

Задачи с параметром в ОГЭ

докладчик: Кулабухов Сергей Юрьевич

Основные виды задач с параметром

1. Линейные уравнения
2. Линейные неравенства
3. Графики уравнений на плоскости Oxy
4. Графики неравенств на плоскости Oxy
5. Квадратные уравнения
6. Разложение квадратного трехчлена на множители. Формулы Виета
7. Расположение корней квадратного уравнения относительно заданных точек
8. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней
9. Использование свойств функций и алгебраических выражений
10. Задачи с модулем

1. Линейные уравнения

5. Найдите, при каких значениях параметра a уравнение $2a^2(x-1) = a - 3(ax+1)$ имеет корень, принадлежащий промежутку $[-3; 2)$.

Решение: Выясним, при каких значениях параметра a уравнение имеет корни.

$2a^2x - 2a^2 = a - 3xa - 3;$

$2a^2x + 3ax = 2a^2 + a - 3;$

$ax(2a+3) = 2a^2 + a - 3.$

Если $a(2a+3) \neq 0$, то есть $a \neq 0$ и $a \neq -1{,}5$, то $x = \dfrac{2a^2+a-3}{a(2a+3)}$;

$x = \dfrac{(2a+3)(a-1)}{a(2a+3)}$; $x = \dfrac{a-1}{a}$. Найдём, при каких значениях a корень уравнения принадлежит промежутку $[-3; 2)$.

$-3 \leqslant \dfrac{a-1}{a} < 2$. Решим систему неравенств:

$$\begin{cases} \dfrac{a-1}{a} \geqslant -3, \\[2ex] \dfrac{a-1}{a} < 2; \end{cases} \quad \begin{cases} \dfrac{4a-1}{a} \geqslant 0, \\[2ex] \dfrac{-a-1}{a} < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} a < 0 \text{ или } a \geqslant 0{,}25, \\ a < -1 \text{ или } a > 0. \end{cases}$$

$a < -1$ или $a \geqslant 0{,}25$

Учитывая, что $a \neq -1{,}5$ и $a \neq 0$, получим
$a \in (-\infty; -1{,}5) \cup (-1{,}5; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

Если $a = 0$, уравнение принимает вид $0 \cdot x = -3$, корней нет.

Если $a = -1{,}5$, уравнение превращается в тождество $0 \cdot x = 0$. Корнем уравнения является любое действительное число, то есть при $a = -1{,}5$ уравнение имеет корни, принадлежащие промежутку $[-3; 2)$.

Значит, искомые $a \in (-\infty; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -1) \cup [0{,}25; +\infty)$.

2.1. Линейные неравенства

6. Найдите все значения параметра p, при которых хотя бы одно значение переменной x из промежутка $[-3; 2)$ является решением неравенства $8(-x+p) > 5$.

Решение: Решим неравенство.

$-8x + 8p > 5;$

$-8x > -8p + 5;$

$$x < \frac{-8p+5}{-8};$$

$$x < p - \frac{5}{8}.$$

Нам нужно, чтобы хотя бы одно значение из промежутка $[-3; 2)$ являлось решением неравенства $x < p - \dfrac{5}{8}$. Чтобы понять, какие p нам подходят, рассмотрим ряд случаев.

1. Все значения $[-3; 2)$ являются решениями неравенства (см. рис. 3). В этом случае $2 \leqslant p - \frac{5}{8}$ и такие p нам подходят.

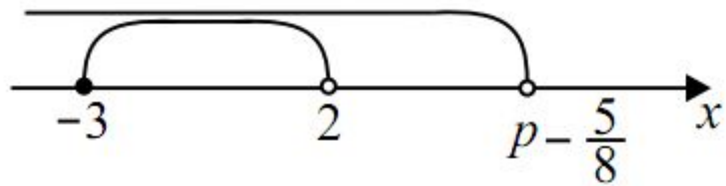


Рис. 3.

2. $-3 < p - \frac{5}{8} < 2$. В этом случае часть чисел из промежутка $[-3; 2)$ являются решениями неравенства, а часть не являются (см. рис. 4). Эти p нам тоже подходят.

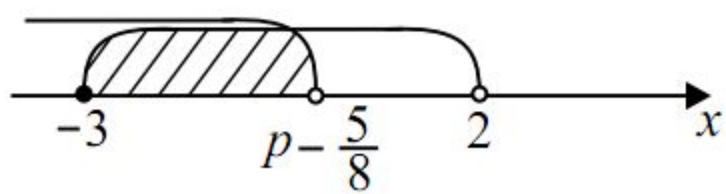


Рис. 4.

3. $p - \frac{5}{8} = -3$. Видим, что $x = -3$ не является решением неравенства в этом случае, а $x > -3$ не являются решениями тем более (см. рис. 5). Такое p нам не подходит.

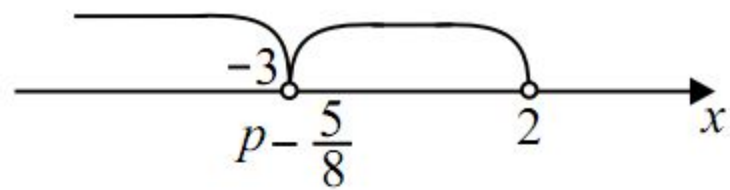


Рис. 5.

4. $p - \frac{5}{8} < -3$. В этом случае ни одно из чисел из промежутка $[-3; 2)$ не является решением неравенства (см. рис. 6), значит при $p - \frac{5}{8} < -3$ условие не выполняется.

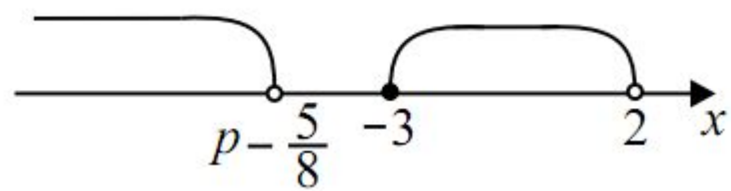


Рис. 6.

Мы получили, что при $p - \frac{5}{8} > -3$, т.е. $p > -2\frac{3}{8}$, условие выполнено.

Ответ: $p > -2\frac{3}{8}$.

2.2. Системы линейных неравенств

3. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} 3x \leqslant 5 + ax, \\ 17(x - a) \geqslant 2(5x + 7) - 17a \end{cases}$$ имеет хотя бы одно решение?

Решение: Преобразуем систему:

$$\begin{cases} 3x \leqslant 5 + ax, \\ 17x - 17a \geqslant 10x - 17a + 14; \end{cases} \quad \begin{cases} 3x - ax \leqslant 5, \\ 7x \geqslant 14; \end{cases} \quad \begin{cases} (3 - a)x \leqslant 5, \\ x \geqslant 2. \end{cases} \quad (1)$$

Рассмотрим систему (1).

1) $a = 3$, $\begin{cases} 0 \leqslant 5, \\ x \geqslant 2; \end{cases} \quad x \geqslant 2.$

При $a = 3$ система (1) имеет решение.

2) $a < 3$, $\begin{cases} x \leqslant \dfrac{5}{3-a} \\ x \geqslant 2. \end{cases}$

Эта система имеет хотя бы одно решение, если $\dfrac{5}{3-a} \geqslant 2$ (см. рис. 11).

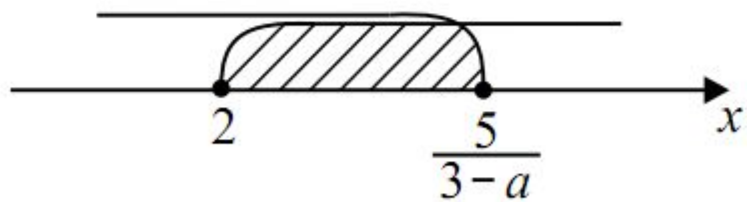


Рис. 11.

Так как в этом случае $a < 3$, т.е. $3-a > 0$, можно неравенство $\dfrac{5}{3-a} \geqslant 2$ умножить на $3-a$, получим $5 \geqslant 2(3-a)$, $5 \geqslant 6-2a$, $2a \geqslant 1$, $a \geqslant 0{,}5$.

При $\begin{cases} a \geqslant 0{,}5, \\ a < 3 \end{cases}$ система (1) имеет решения.

3) $a > 3$. В этом случае $\begin{cases} x \geqslant \dfrac{5}{3-a}, \\ x \leqslant 2. \end{cases}$

Эта система при любом $a > 3$ имеет решения.

Учитывая все рассмотренные случаи, получаем, что исходная система имеет решения при $a \geqslant 0{,}5$.

Ответ: $a \geqslant 0{,}5$.

3.1. Уравнение прямой

1. При каких значениях a прямая $y = 2ax + 7$

а) параллельна прямой $y = (a+5)x - 3a$?

б) совпадает с этой прямой?

Решение: Прямые параллельны, если их угловые коэффициенты равны, но свободные коэффициенты не равны:

$$\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 \neq -3a; \end{cases} \quad \begin{cases} a = 5, \\ a \neq -\dfrac{7}{3}; \end{cases} \quad a = 5.$$

При $a = 5$ прямые параллельны.

Прямые совпадают, если равны и угловые, и свободные коэффициенты соответственно, то есть $\begin{cases} 2a = a + 5, \\ 7 = -3a. \end{cases}$

Эта система не имеет решений, поэтому эти прямые не могут совпадать.

Ответ: а) $a = 5$, б) нет таких a.

3.2. Взаимное расположение прямых

3. Найдите все значения параметра a, при которых прямая $y = a(x-2)+3$ имеет не менее двух общих точек с квадратом, вершины которого находятся в точках $(-5;0)$, $(0;3)$, $(-1;-1)$.

Решение: Построим квадрат $BCDE$ с заданными вершинами (см. рис. 17).

Найдём координату точки D. Так как $DC = BE$ и $DC \| BE$, то вектор $\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{CD}$. Координаты $\overrightarrow{BE}\,\{-4; 1\}$, координаты $\overrightarrow{CD}\,\{x_D - x_C; y_D - y_C\}$, то есть $\{x_D - 0; y_D - 3\}$. У равных векторов — равные координаты, поэтому $x_D - 0 = -4$, $x_D = -4$, $y_D - 3 = 1$, $y_D = 4$. Получим $D(-4; 4)$.

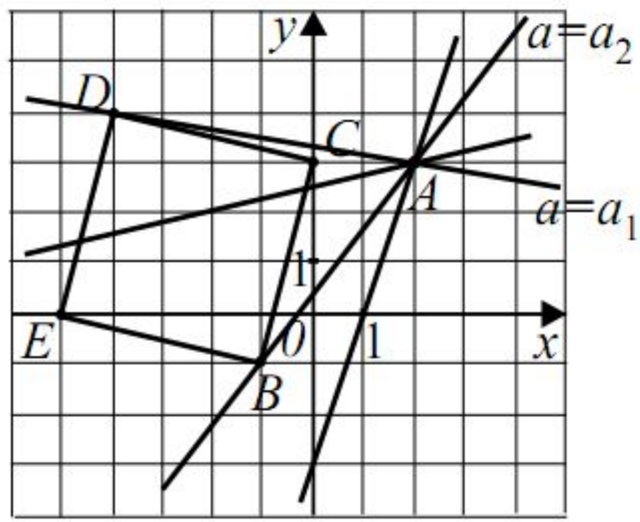


Рис. 17.

$y = a(x-2) + 3$ — семейство прямых, проходящих через точку $A(2; 3)$.

По рисунку 17 видно, что при $a \in (a_1; a_2)$ прямая имеет с квадратом более одной общей точки.

Найдём a_1. Прямая $y = a(x-2)+3$ проходит через точку $(-4; 4)$.

$a(-4-2)+3 = 4,$

$-6a = 1,$

$a = -\dfrac{1}{6}.$

Найдём a_2. Прямая проходит через точку $(-1; -1)$.

$a(-1-2)+3 = -1,$

$-3a = -4,$

$a = \dfrac{4}{3}.$

Значит, искомые $a \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{4}{3}\right)$.

Ответ: $a \in \left(-\dfrac{1}{6}; \dfrac{4}{3}\right)$.

3.3. График функции *y=k/x*

4. Найдите, при каких значениях параметра p уравнение $p \cdot |x| = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$ имеет один корень.

Решение: Решим задачу графически.

Уравнение $p \cdot |x| = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$ имеет столько решений, сколько общих точек имеют графики $y = p \cdot |x|$ и $y = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$.

При $x \geqslant 0$ график $y = p \cdot |x|$ — часть прямой $y = px$, при $x < 0$ — часть прямой $y = -px$. Несколько графиков такого вида можно увидеть на рисунке 20а.

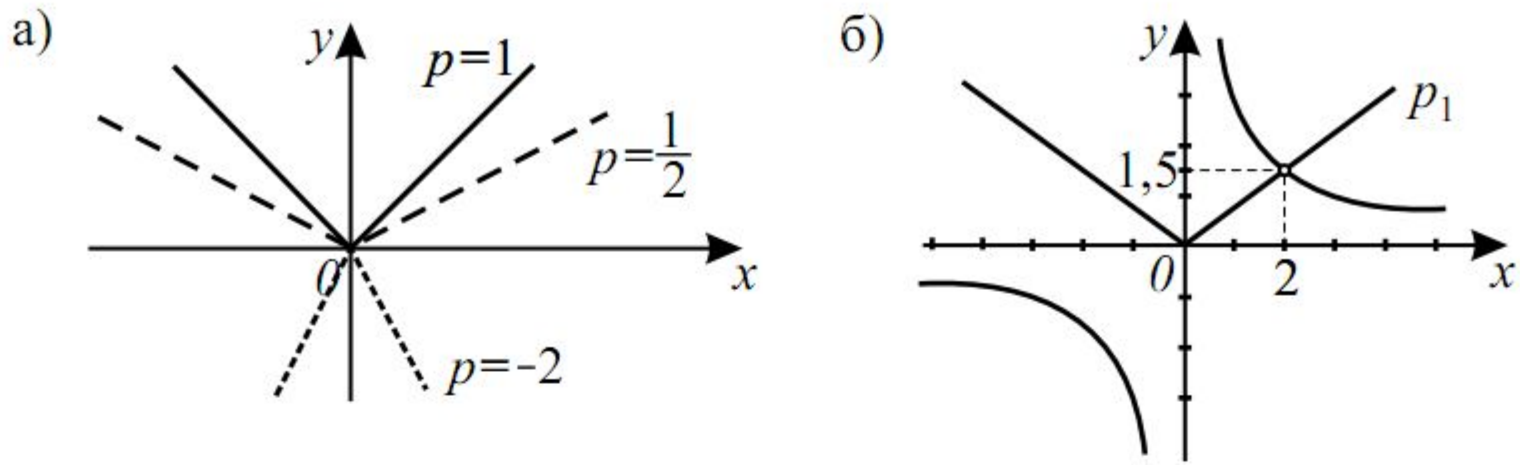


Рис. 20.

Построим график функции $y = \dfrac{3x-6}{x^2-2x}$. (1)

Найдём область допустимых значений аргумента $x^2-2x \neq 0$, $x \neq 0$, $x \neq 2$. Упростим уравнение (1):

$$\frac{3x-6}{x^2-2x} = \frac{3(x-2)}{x(x-2)} = \frac{3}{x},\ y = \frac{3}{x}.$$

График уравнения (1) — гипербола с выколотой точкой (так как $x \neq 2$). По рисунку 20б видно, что графики имеют одну общую точку, если $p \neq 0$ и если график $y = p_1 \cdot |x|$ не проходит через точку $A\left(2; \dfrac{3}{2}\right)$.

Найдём p_1. $y = p_1|x|$, $\dfrac{3}{2} = p_1 \cdot |2|$, $p_1 = \dfrac{3}{2} : 2 = \dfrac{3}{4}$.

Значит, исходное уравнение имеет один корень при $p \neq 0$ и $p \neq \dfrac{3}{4}$.

Ответ: $p \neq 0, p \neq \dfrac{3}{4}$.

3.4. Окружность

7. Найдите все значения параметра a, при которых система
$$\begin{cases} y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}, \\ y = a(x-3) + 2 \end{cases}$$
имеет решения.

Решение: Построим график уравнения
$y = \sqrt{-x^2 - 6x - 5}$, $y = \sqrt{4 - (x^2 + 6x + 9)}$.

Если $y \geqslant 0$, то $y^2 = 4 - (x+3)^2$, $(x+3)^2 + y^2 = 4$. При $y < 0$ нет точек, удовлетворяющих уравнению. Получилась полуокружность с центром $(-3; 0)$ и радиусом 2 (см. рис. 23).

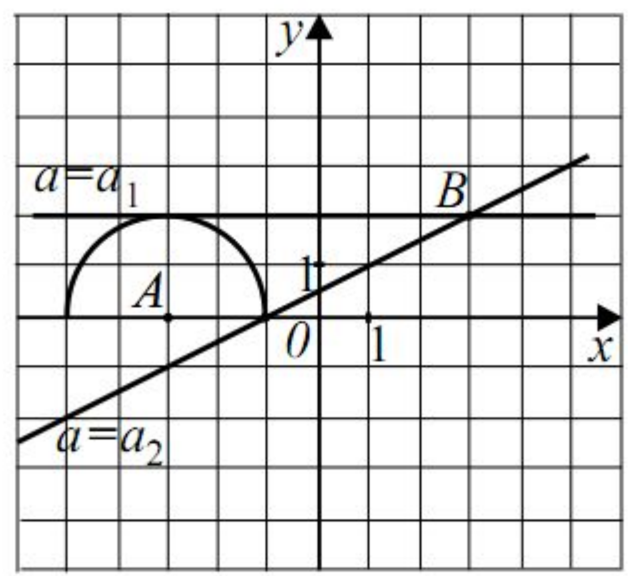


Рис. 23.

$y = a(x-3)+2$ — семейство прямых с угловым коэффициентом a, проходящих через точку $B(3;2)$.

Рассмотрим рисунок 23.

Видно, что кривые имеют общие точки, то есть система уравнений имеет решения, если $a \in [a_1; a_2]$.

$a_1 = 0$. Найдём a_2 из условия, что прямая проходит через точку с координатами $(-1;0)$.

$$a(-1-3)+2=0;\ -4a=-2,\ a=\frac{1}{2}.$$

Значит, система имеет решения при $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

Ответ: $a \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$.

3.5. Парабола

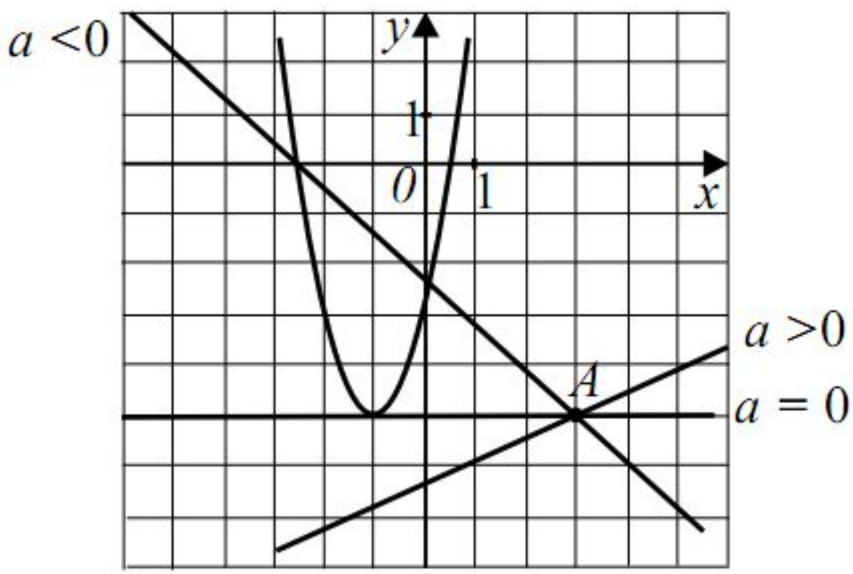
8. Найдите значение параметра a, при котором система

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 4x - 3, \\ y = ax - 5 - 3a \end{cases}$$ имеет ровно одно решение.

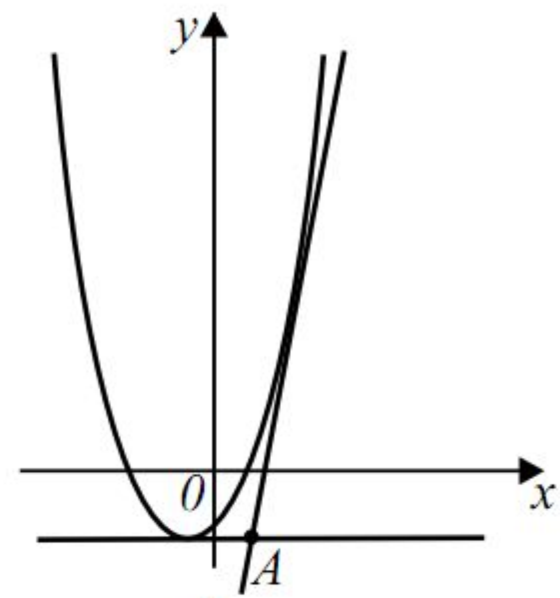
Решение: Уравнение $y = ax - 5 - 3a$ запишем в виде $y = a(x - 3) - 5$.

$y = 2x^2 + 4x - 3$ — парабола с вершиной с координатами

$x_0 = -\dfrac{4}{2 \cdot 2} = -1$, $y_0 = -5$ (см. рис. 29).



а)



б)

Рис. 29.

$2x^2 + 4x - 3 = ax - 5 - 3a,\ 2x^2 + (4 - a)x + 3a + 2 = 0.$

Найдём дискриминант.

$D = (4-a)^2 - 4 \cdot 2(3a+2) = 16 - 8a + a^2 - 24a - 16 = a^2 - 32a = a(a-32).$

Квадратное уравнение имеет один корень при $a = 0$ и $a = 32$.

Ответ: $a = 0,\ a = 32.$

3.6. Кусочные графики

10. Постройте график функции

$$y = \begin{cases} x, \text{ если } x \leqslant 2, \\ (x-3)^2 - 1, \text{ если } 2 < x \leqslant 5, \\ 5{,}5 - 0{,}5x, \text{ если } x > 5. \end{cases} \qquad (1)$$

При каких значениях m график уравнения $y = m$ имеет ровно три общие точки с графиком функции (1)?

Решение: Построим график (1).

$y = x$ и $y = -0{,}5x + 5{,}5$ — прямые.

$y = (x-3)^2 - 1$ — парабола с вершиной $(3; -1)$.

График функции (1) изображен на рисунке 30.

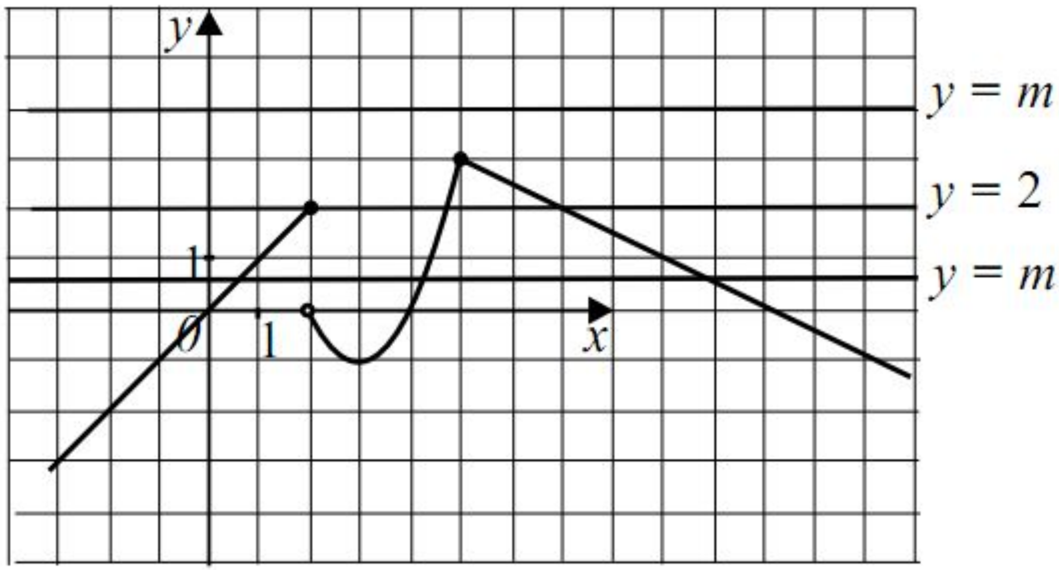


Рис. 30.

Прямые вида $y = m$ параллельны оси абсцисс. По рисунку видно, что три общие точки графики имеют при $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

Ответ: $m \in \{-1\} \cup [0; 2]$.

4. Графики неравенств

11. Найдите все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 + 4x - 2 + a \geqslant 0$ не имеет решений, принадлежащих отрезку $[-3; 0]$.

Решение: Запишем неравенство в виде $a \geqslant -x^2 - 4x + 2$ и построим на плоскости Oxa график этого неравенства.

$a = -x^2 - 4x + 2$ — парабола с вершиной $(-2; 6)$, $a(-3) = 5$, $a(0) = 2$.

Множество точек, удовлетворяющих неравенству, показано на рисунке 48.

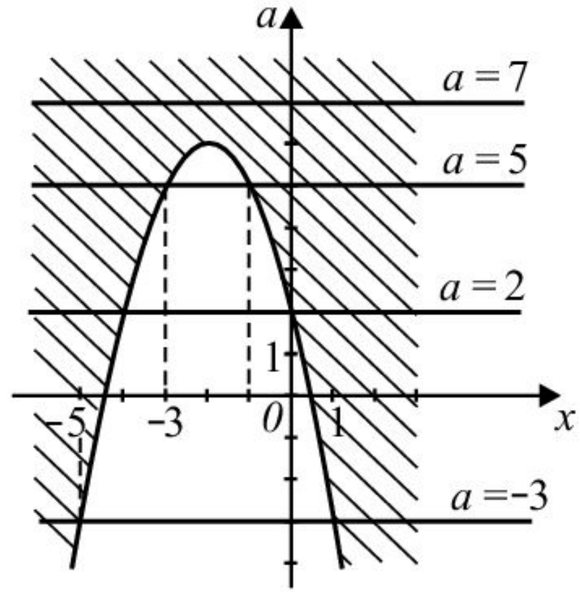


Рис. 48.

Проведём прямую $a = a_0$ для нескольких значений параметра a, например при $a = -3, a = 2, a = 5$ и $a = 7$. При $a = -3$ все решения неравенства лежат на лучах $(-\infty; -5]$ и $[1; +\infty)$, то есть все точки прямой $a = -3$, попадающие в заштрихованную зону.

Соответственно если $a = 2$, то $x \in (-\infty; -4] \cup [0; +\infty)$; если $a = 5$, то $x \in (-\infty; -3] \cup [-1; +\infty)$; если $a = 7$, то x может быть любым числом.

По рисунку определяем, что при $a < 2$ неравенство не имеет решений на отрезке $[-3; 0]$, при $a = 2$ имеет одно такое решение $x = 0$, при $a > 2$ таких решений уже бесконечно много.

Ответ: $a < 2$.

5. Квадратные уравнения с параметром

4. При каких значениях параметра a уравнение $(a-8)x^2+2ax+a+1=0$ имеет корни?

Решение: Если $a-8=0$ $(a=8)$, то уравнение не является квадратным. Подставим $a=8$ в исходное уравнение $16x+8+1=0$, $x=-\dfrac{9}{16}$ — корень уравнения.

Если $a \neq 8$, то уравнение имеет корни при $D \geqslant 0$.

$D=(2a)^2-4\cdot(a-8)\cdot(a+1)=4a^2-4(a^2-7a-8)=28a+32$.

$D \geqslant 0$ при $28a+32 \geqslant 0$, т.е. $a \geqslant -\dfrac{32}{28}$, $a \geqslant -1\dfrac{1}{7}$. В этом случае мы должны были бы исключить $a=8$, но при этом значении параметра уравнение тоже имеет корень, значит подойдут все $a \geqslant -1\dfrac{1}{7}$.

Ответ: $\left[-1\dfrac{1}{7};+\infty\right)$.

6.1. Разложение квадратного трехчлена на множители

3. При каких числовых значениях m выражение $(4-m)x^2+(m+2)x+m$ является полным квадратом?

Решение: Квадратный трёхчлен является полным квадратом, если его можно представить в виде $(px+q)^2$ или (что то же самое) в виде $a(x-x_0)^2$, где $a>0$. Значит, заданное выражение является полным квадратом, если $4-m>0$ и при этом дискриминант D квадратного уравнения $(4-m)x^2+(m+2)x+m=0$ равен нулю.

Найдём D.

$D=(m+2)^2-4(4-m)\cdot m=m^2+4m+4-16m+4m^2=5m^2-12m+4.$

$5m^2-12m+4=0$, если $m=2$ или $m=\dfrac{2}{5}$.

$4-m>0$ при $m<4$. Очевидно, что оба значения m удовлетворяют требуемому условию.

Ответ: $2;\ \dfrac{2}{5}$.

6.2. Теорема Виета

4. Дано уравнение $x^2 - (3p^2 - p + 2)x + 7p + 3 = 0$. Известно, что сумма его корней равна 4. Найдите произведение его корней и число p.

Решение: По теореме Виета, если данное квадратное уравнение имеет корни x_1 и x_2, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 3p^2 - p + 2, \\ x_1 x_2 = 7p + 3. \end{cases}$$

По условию $x_1 + x_2 = 4$, тогда $3p^2 - p + 2 = 4$, $3p^2 - p - 2 = 0$, $p_1 = 1$, $p_2 = -\dfrac{2}{3}$.

Если $p = 1$, $x_1 x_2 = 7 \cdot 1 + 3 = 10$, если $p = -\dfrac{2}{3}$, $x_1 x_2 = 7 \cdot \left(-\dfrac{2}{3}\right) + 3 = -1\dfrac{2}{3}$.

Однако мы не нашли x_1 и x_2, а потому нельзя утверждать, что уравнение будет иметь вещественные корни при найденных значениях p. При $p = 1$ уравнение $x^2 - 4x + 10 = 0$ не имеет вещественных корней, при $p = -\dfrac{2}{3}$ уравнение $x^2 - 4x - \dfrac{5}{3} = 0$ имеет вещественные корни.

Ответ: $x_1 x_2 = -1\dfrac{2}{3}$, $p = -\dfrac{2}{3}$.

7.1. Поиск корней и ограничения

2. Найдите все значения параметра m, при которых один из корней уравнения $x^2 - (m+3)x - 2m^2 + 3m + 2 = 0$ находится между числами 2 и 4, а второй — между числами -2 и 1.

Решение: Данное квадратное уравнение имеет дискриминант $D = (m+3)^2 - 4 \cdot (-2m^2 + 3m + 2) = m^2 + 6m + 9 + 8m^2 - 12m - 8 = $ $= 9m^2 - 6m + 1 = (3m-1)^2 \geqslant 0$, поэтому его корни

$$x_1 = \frac{m+3+(3m-1)}{2} = 2m+1, \ x_2 = \frac{m+3-(3m-1)}{2} = -m+2.$$

Мы не знаем, какой из корней больше, поэтому разберём два случая, чтобы найти искомые значения параметра.

1) $\begin{cases} 2 < 2m+1 < 4, \\ -2 < -m+2 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 1 < 2m < 3, \\ -4 < -m < -1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0{,}5 < m < 1{,}5, \\ 1 < m < 4; \end{cases}$

$1 < m < 1{,}5.$

2) $\begin{cases} 2 < -m+2 < 4, \\ -2 < 2m+1 < 1; \end{cases} \quad \begin{cases} 0 < -m < 2, \\ -3 < 2m < 0; \end{cases} \quad \begin{cases} -2 < m < 0, \\ -1{,}5 < m < 0; \end{cases}$

$-1{,}5 < m < 0.$

Ответ: $-1{,}5 < m < 0$ или $1 < m < 1{,}5$.

7.2. Сравнения корней с нулем

3. Найдите p, при которых корни уравнения $3x^2 + (p+6)x + p = 0$:
а) разного знака (один положительный, другой — отрицательный);
б) положительные;
в) отрицательные.

Решение: Найдём дискриминант уравнения
$D = (p+6)^2 - 12p = p^2 + 36$.
Уравнение при любом значении p имеет два различных корня, т.к. $D > 0$.

а) Корни разного знака (один положительный, другой — отрицательный), если $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} < 0$, то есть при $p < 0$.

б) Оба корня положительные, если $x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} > 0$ и

$x_1 + x_2 = -\dfrac{p+6}{3} > 0$; $\begin{cases} p > 0, \\ p + 6 < 0; \end{cases}$ $\begin{cases} p > 0, \\ p < -6; \end{cases}$ таких p нет.

в) Оба корня отрицательные, если

$$\begin{cases} x_1 \cdot x_2 = \dfrac{p}{3} > 0, \\[2ex] x_1 + x_2 = -\dfrac{p+6}{3} < 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} p > 0, \\ p + 6 > 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} p > 0, \\ p > -6; \end{cases} \qquad p > 0.$$

Ответ: а) $p < 0$; б) нет таких p; в) $p > 0$.

7.3. Расположение корней квадратичной функции

6. При каких значениях a любой корень уравнения $x^2+6x+5=0$ меньше любого корня уравнения $(a-3)x^2+2x-1=0$?

Решение: Корнями уравнения $x^2+6x+5=0$ являются числа -1 и -5. Значит, нам нужно, чтобы все корни второго уравнения были больше числа $\beta=-1$.

Рассмотрим $f(x)=(a-3)x^2+2x-1$.

Если $a-3=0$, то $x=0{,}5$ и этот случай нам подходит.

Обозначим через D дискриминант, а через x_0 — абсциссу вершины параболы $y = f(x)$.

Если $a - 3 \neq 0$, то уравнение квадратное и имеет корень, только если $D \geqslant 0$.

$$-1 < x_1 < x_2 \text{ (см. рис. 35), если } \begin{cases} D \geqslant 0, \\ (a-3)f(-1) > 0, \\ x_0 > -1. \end{cases}$$

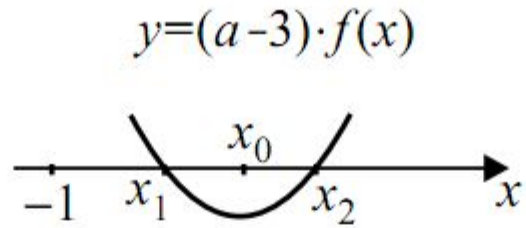


Рис. 35.

$$D = 4-4\cdot(a-3)\cdot(-1) = 4a-8,\ f(-1) = (a-3)\cdot(-1)^2+2\cdot(-1)-1 = a-6,$$

$$x_0 = -\frac{2}{2\cdot(a-3)} = -\frac{1}{a-3}.$$

$$\begin{cases} 4a-8 \geqslant 0, \\ (a-3)(a-6) > 0, \\ -\dfrac{1}{a-3} > -1; \end{cases} \quad \begin{cases} a \geqslant 2, \\ a < 3 \text{ или } a > 6, \\ 1 - \dfrac{1}{a-3} > 0; \end{cases} \quad \begin{cases} 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6 \\ \dfrac{a-4}{a-3} > 0; \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6 \\ a < 3 \text{ или } a > 4; \end{cases} \quad 2 \leqslant a < 3 \text{ или } a > 6.$$

Учитывая, что $a = 3$ подходит, получаем $2 \leqslant a \leqslant 3$ или $a > 6$.

Ответ: $2 \leqslant a \leqslant 3$ или $a > 6$.

8.1. Простейшие дробно-рациональные уравнения

2. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{(x+a+1)(x-3)}{x-3a}=0$ имеет только один корень.

Решение: Уравнение равносильно системе $\begin{cases} (x+a+1)(x-3)=0, \\ x-3a\neq 0. \end{cases}$

Уравнение имеет корни $x_1=-a-1$ или $x_2=3$, если для них выполняется условие $x\neq 3a$.

Рассмотрим те случаи, при которых исходное уравнение может иметь единственный корень. Это возможно, если один из корней уравнения $(x+a+1)(x-3)=0$ удовлетворяет условию $x\neq 3a$, а другой нет или если корни равны, то есть $x_1=x_2$.

1) $\begin{cases} x_1=3a, \\ x_2\neq 3a; \end{cases}$ $\begin{cases} -a-1=3a, \\ 3\neq 3a; \end{cases}$ $\begin{cases} a=-0{,}25, \\ a\neq 1; \end{cases}$ $a=-0{,}25.$

2) $\begin{cases} x_1\neq 3a, \\ x_2=3a; \end{cases}$ $\begin{cases} 3=3a, \\ -a-1\neq 3a; \end{cases}$ $\begin{cases} a=1, \\ a\neq -0{,}25; \end{cases}$ $a=1.$

3) $-1-a=3$; $a=-4$.

Значит, уравнение имеет единственный корень при $a=-4$, $a=-0{,}25$, $a=1$.

Ответ: -4; $-0{,}25$; 1.

8.2. Дробно-рациональные уравнения. Отбор корней

4. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $\dfrac{x^2+6x-2a}{x^2+a-12}=0$ имеет только один корень.

Решение: Попробуем решить задачу аналитически.

Уравнение равносильно системе $\begin{cases} x^2+6x-2a=0, \\ x^2+a-12\neq 0. \end{cases}$

Корень в уравнении единственный в одном из двух случаев — если числитель имеет один корень, и этот корень не обращает в нуль знаменатель или если числитель имеет два корня, но один из этих корней обращает знаменатель в нуль, а другой нет.

Проблемы возникают, когда мы найдём нули числителя и знаменателя.

$x^2+6x-2a=0$, $x_1=-3-\sqrt{9+2a}$, $x_2=-3+\sqrt{9+2a}$, если $9+2a\geqslant 0$, то есть $a\geqslant -4{,}5$.

Корень единственный, если $9+2a=0$, $a=-4{,}5$, тогда $x=-3$.

Проверим, обратит ли $x=-3$ знаменатель в нуль при $a=-4{,}5$.

$$x^2+a-12=(-3)^2-4{,}5-12=-7{,}5\neq 0.$$

Значит, при $a=-4{,}5$ уравнение $\dfrac{x^2+6x-2a}{x^2+a-12}=0$ имеет единственный корень.

Перейдём ко второму случаю. Один корень в заданном уравнении будет, если x_1 и x_2 удовлетворяют таким условиям:

$$\begin{cases} x_1^2+a-12=0, \\ x_2^2+a-12\neq 0; \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} x_2^2+a-12=0, \\ x_1^2+a-12\neq 0. \end{cases}$$

Видим, что при подстановке $x_1=-3-\sqrt{9+2a}$, $x_2=-3+\sqrt{9+2a}$ системы превращаются в иррациональные и их решение непросто.

Попробуем решить задачу графически.

Построим графики $x^2 + 6x - 2a = 0$ и $x^2 + a - 12 = 0$ на плоскости Oxa (см. рис. 57).

$a = 0{,}5x^2 + 3x$ — парабола с вершиной $(-3; -4{,}5)$.

$a = 12 - x^2$ — парабола с вершиной $(0; 12)$. Она выделена пунктиром, в точках A и B решений нет.

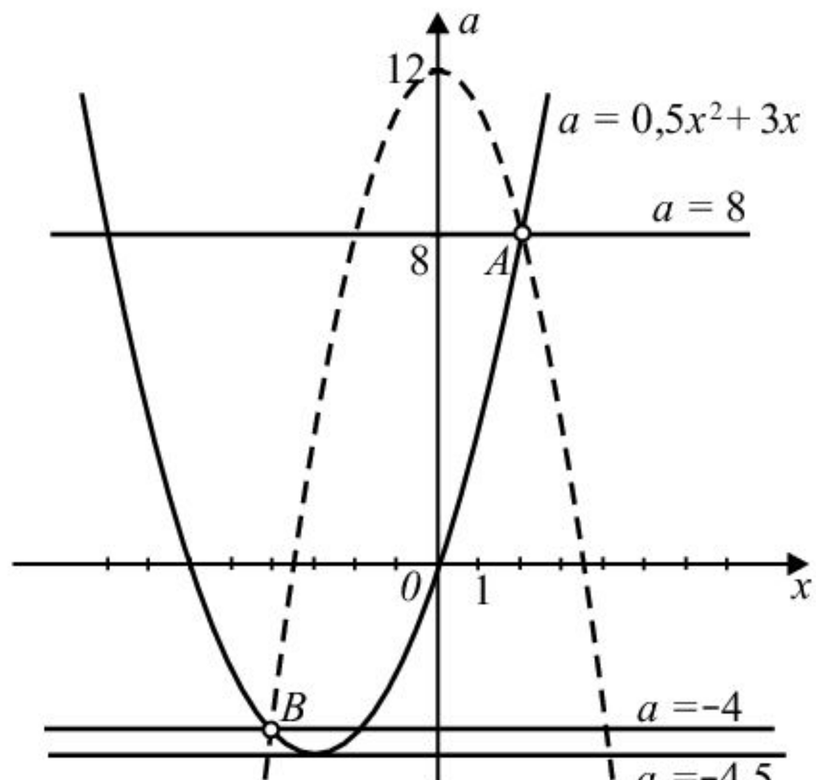


Рис. 57.

Найдём точки пересечения этих парабол.

$0{,}5x^2 + 3x = 12 - x^2,\ 1{,}5x^2 + 3x - 12 = 0,$

$x_1 = 2\,(a = 8),$

$x_2 = -4\,(a = -4).$

$A(2; 8)$ и $B(-4; -4)$.

По рисунку видно, что прямая $a = a_1$ имеет с параболой $a = 0,5x^2 + 3x$ одну общую точку (с учётом условия $a \neq 12 - x^2$) при $a = -4{,}5$, $a = -4$, $a = 8$.

Ответ: $-4{,}5; -4; 8$.

9.1. Использование симметрии алгебраических выражений

1. При каких значениях параметра a уравнение $(2a-3)x^4+(a+7)x^2-2a^2-14a=0$ имеет единственное решение?

Решение: Заметим, что при замене x на $-x$ уравнение не изменится, поэтому если x_0 является корнем уравнения, то и $-x_0$ тоже будет корнем. Значит, необходимое условие единственности корня следующее: $x_0 = -x_0$, то есть $x_0 = 0$ — корень уравнения.

Подставим в уравнение $x = 0$.

$$-2a^2 - 14a = 0, \;\; -2a(a+7) = 0, \; a = 0 \text{ или } a = -7.$$

Теперь нужно проверить, сколько корней при этих значениях a. Тот факт, что $x = 0$ является корнем, ещё не означает, что других корней нет.

1) $a = 0$, $(2 \cdot 0 - 3)x^4 + (0+7)x^2 - 0 = 0$, $-3x^4 + 7x^2 = 0$, $x^2(7 - 3x^2) = 0$, $\left[\begin{array}{l} x^2 = 0, \\ 7 - 3x^2 = 0, \end{array}\right.$ $x_1 = 0$, $x_{2,3} = \pm\sqrt{\dfrac{7}{3}}$.

Получаем 3 корня.

2) $a = -7$, $(2 \cdot (-7) - 3)x^4 + 0 - 0 = 0$, $-17x^4 = 0$, $x = 0$.

Получаем 1 корень.

Значит, корень единственный при $a = -7$

Ответ: -7.

9.2. Использование монотонности функций

5. При всех $a > 0$ найдите корни уравнения $\dfrac{a}{x} = x^2 - 2x + a + 1$, удовлетворяющие условию $x \geqslant 1$.

Решение: Попробуем решить эту задачу графически.

Перепишем условие $\begin{cases} a > 0, \\ y = \dfrac{a}{x}, \quad (1) \\ y = (x-1)^2 + a, \\ x \geqslant 1. \end{cases}$

График уравнения (1) — гипербола, при $a > 0$ её ветви расположены в I и III четвертях (см. рис. 38).

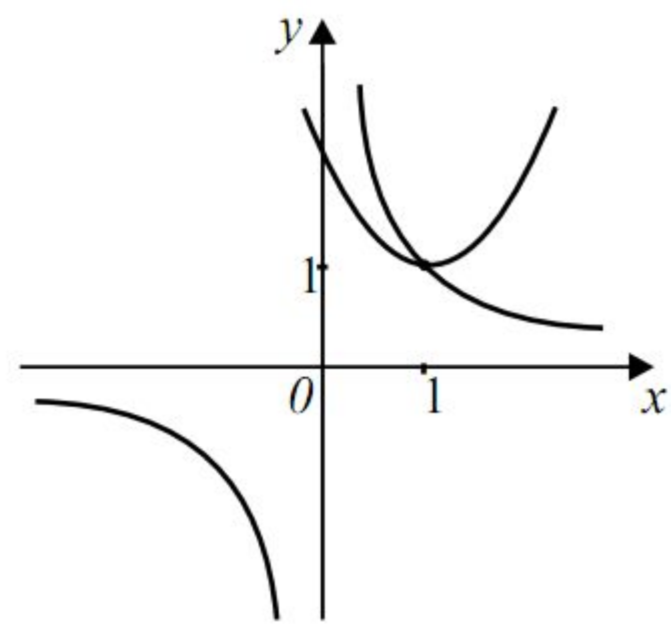


Рис. 38.

$y = (x-1)^2 + a$ — парабола, ветви которой направлены вверх, вершина расположена в точке $(1; a)$.

При $x \geqslant 1$ $\;y = (x-1)^2 + a$ возрастает, а $y = \dfrac{a}{x}$ убывает.

Значит, у них не более одной общей точки.

Заметим, что при $x = 1$ значения этих двух функций совпадают. Значит, $x = 1$ — единственный корень уравнения, удовлетворяющий заданному условию.

Ответ: $x = 1$.

9.3. Использование ОДЗ и оценка множества значений

6. Решите уравнение $\sqrt{x-5}+(a-2)x=7\sqrt{15-3x}+a^2-24$ при всех значениях параметра a.

Решение: Найдем ОДЗ.

$$\begin{cases} x-5\geqslant 0; \\ 15-3x\geqslant 0; \end{cases} \quad \begin{cases} x\geqslant 5; \\ x\leqslant 5; \end{cases} \quad x=5.$$

Множество допустимых значений переменной x состоит из одного числа. Проверим, при каких a число 5 будет корнем уравнения.

$$\sqrt{5-5}+(a-2)\cdot 5=7\sqrt{15-3\cdot 5}+a^2-24,$$

$5a-10=a^2-24,\ \ a^2-5a-14=0,\ \ a_1=-2,\ \ a_2=7.$

При других a корней нет.

Ответ: Если $a=-2$, $a=7$, то $x=5$; если $a\neq 2$, $a\neq -7$, то корней нет.

7. Найдите, при каких значениях m и n выражение $n^2 + m^2 - 6m + 18n + 3$ принимает наименьшее значение. Какое это значение?

Решение: Обозначим через A и преобразуем заданное выражение.

$$A = n^2 + 18n + m^2 - 6m + 3 = (n^2 + 18n + 81) -$$
$$-81 + (m^2 - 6m + 9) - 9 + 3 = (n+9)^2 + (m-3)^2 - 87.$$

Полный квадрат некоторого выражения принимает наименьшее значение (нуль), если это выражение равно нулю. Так как $(n + 9)^2 \geqslant 0$, $(m-3)^2 \geqslant 0$, то $A \geqslant -87$, причём $A = -87$, только если

$$\begin{cases} n + 9 = 0, \\ m - 3 = 0; \end{cases} \quad \begin{cases} n = -9, \\ m = 3. \end{cases}$$

Ответ: $n = -9, m = 3$; наименьшее значение -87.

10. Задачи с модулем

6. Найдите все значения параметра a, при которых уравнение $|x+4|+|x-a|=2a$ имеет корни.

Решение.

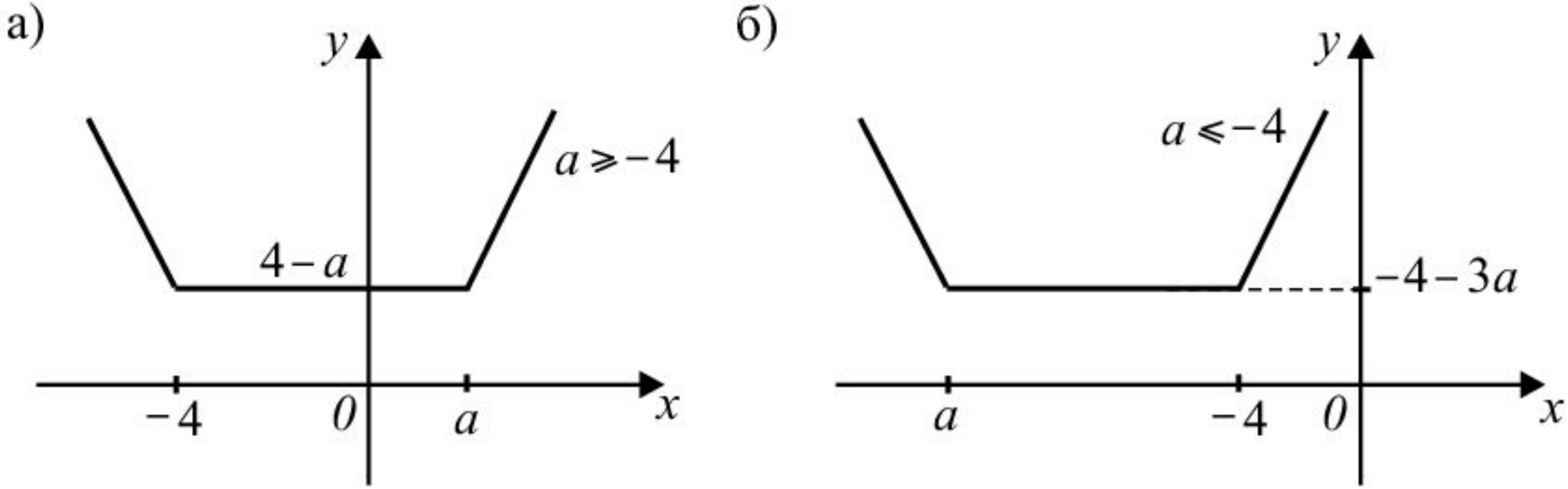
Запишем уравнение следующим образом: $|x+4|+|x-a|-2a=0$. Рассмотрим функцию $y=|x+4|+|x-a|-2a$. Числовая прямая разбивается на три промежутка, на которых данная функция является линейной.

Если $\begin{cases} x \leqslant -4, \\ x \leqslant a, \end{cases}$ то $y=-2x-4-a$, функция убывает.

Если $\begin{cases} x \geqslant -4, \\ x \geqslant a, \end{cases}$ то $y=2x+4-3a$, функция возрастает.

Если $\begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant a, \\ a \geqslant -4, \end{cases}$ то $y=4-a$.

Если $\begin{cases} a \leqslant x \leqslant -4, \\ a \leqslant -4, \end{cases}$ то $y=-4-3a$,



На рисунке а) и б) схематически показан график функции при $a \geqslant -4$ и при $a \leqslant -4$ соответственно.

Чтобы уравнение $y(x) = 0$ имело корни, необходимо и достаточно, чтобы график пересекал ось абсцисс.

В случае а) $\begin{cases} a \geqslant -4, \\ 4 - a \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a \geqslant -4, \\ a \geqslant 4, \end{cases}$ $a \geqslant 4.$

В случае б) $\begin{cases} a \leqslant -4, \\ -4 - 3a \leqslant 0, \end{cases}$ $\begin{cases} a \leqslant -4, \\ a \geqslant -\dfrac{4}{3}, \end{cases}$ решений нет.

Ответ: $a \geqslant 4$.

Примеры заданий из открытого банка

Задание 23 (№ 324537)

Постройте график функции $y = 1 - \frac{x^4 + x^3}{x + x^2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ имеет с графиком две общие точки.

Задание 23 (№ 324550)

Постройте график функции $y = \dfrac{(x^2+9)(x-1)}{1-x}$ и определите, при каких значениях k прямая $y = kx$ имеет с графиком ровно одну общую точку.

Задание 23 (№ 324545)

Найдите p и постройте график функции $y = x^2 + p$, если известно, что прямая $y = 6x$ имеет с этим графиком ровно одну общую точку.

Задание 23 (№ 324547)

Постройте график функции $y = \frac{(x^2 - 2x)|x|}{x-2}$ и определите, при каких значениях m прямая $y = m$ не имеет с графиком ни одной общей точки.