Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 8

Агаев Рафиг Пашаевич

доктор физ.-мат. наук,

ведущий научный сотрудник

Института проблем управления РАН

Линейные преобразования

- Определение
- Матрицы линейного преобразования в различных базисах
- Образ, ядро лине. преобразования
- О сумме размерностей образа и ядра
- Примеры
- Задачи

Определение линейного преобразования

Определение 1. Пусть каждому вектору x n–мерного пространства R поставлен в соответствие вектор y m-мерного пространства S. Функцию $\mathbf{A}(x)$ мы назовем **линейным преобразованием (оператором)** из пространства R в S, если выполнены следующие условия:

1. $\mathbf{A}(x_1 + x_2) = \mathbf{A}(x_1) + \mathbf{A}(x_2)$.

2. $\mathbf{A}(\lambda x) = \lambda \mathbf{A}(x)$.

Часто вместо $A(x)$ пишут Ax. В некоторых случаях мы предположим, что R совпадает S.

Пример 1. Пусть R – некоторая плоскость в трехмерном пространстве $\mathbb{R}^3$, проходящая через нуль. Поставим в соответствие каждому вектору $x \in \mathbb{R}^3$ его проекцию $\mathrm{A}(x)$ на эту плоскость R. Условия 1) и 2) выполняются. Например, 1) означает, что проекция суммы векторов равна сумме проекций.

Пример 2. Пусть $A = \left[a_{ij}\right]_{m \times n}$ – некоторая матрица. Каждому вектору $x = (x_1, \dots, x_n)^T$ поставим в соответствие вектор $y = Ax = (y_1, \dots, y_m)^T$.

Ax определяется как умножение матрицы на вектор-столбец

Выполнение условий 1) и 2) очевидно.

Слайд 1

Пример 3. Рассмотрим n-мерное $\mathbb{R}^n$ пространство, элементами которого является многочлены P степени $\leq n-1$.

Положим

$$\mathbf{A}P(t) = P'(t),$$

где $P'(t)$ - производная многочлена $P(t)$.

Заметим, что данное преобразование – линейное. Поскольку,

1) $(P_1(t) + P_2(t))' = P_1'(t) + P_2'(t)$;

2) $\left(\lambda P(t)\right)' = \lambda P'(t)$.

Выберем в $\mathbb{R}^n$ базис $e_1 = 1,\ \ e_2 = t,\ e_3 = \frac{t^2}{2!}, \dots, e_n = \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$.

Тогда $Ae_1 = 0,\ \ Ae_2 = 1 = e_1,\ Ae_3 = t = e_2, \dots, Ae_n = \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} = e_{n-1}$.

Матрица преобразования в этом базисе имеет вид:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

Пример 4. Рассмотрим пространство, в котором векторами являются непрерывные функции $f(t)$, $0 \leq t \leq 1$. Положим

$$\mathbf{A}f(t) = \int_0^1 f(t)dt\,.$$

Преобразование – линейное. Действительно,

1) $\mathbf{A}(f_1 + f_2) = \int_0^1 (f_1 + f_2)dt = \int_0^1 f_1 dt + \int_0^1 f_2 dt = \mathbf{A}f_1 + \mathbf{A}f_2$;

2) $\mathbf{A}(\lambda f) = \lambda \mathbf{A}f$.

Преобразования

- Единичное преобразование – E. (Другое обозначение - I):

$$Ex = x \quad (\text{или } Ix = x).$$

Нулевое преобразование O:

$$Ox = \mathbf{0}.$$

Преобразование сдвига координат:

Q - Главная матрица перестановки.

$$Q\left(x_1, x_2, \dots, x_n\right)^T = (\, x_2, \dots, x_n, x_1)^T.$$

Ортогональное преобразование

(ортогональной матрицей $UU^T = I$)

$y = Ux$, при этом $|y|$=$|x|$.

$$yy^T = x^T U^T U x = x^T x.$$

Преобразование поворота вектора

Связь между матрицами и линейными преобразованиями

- **Теорема 1.** Рассмотрим два пространства - R с базисом $e_1, \dots, e_n$ и S с базисом $g_1, \dots, g_m$. Пусть **A**- линейное преобразование из R в S. При заданных базисах каждому линейному преобразованию **A** однозначно соответствует матрица $A = (a_{ij})$, и наоборот, каждой матрице $A = (a_{ij})$ отвечает некоторое линейное преобразование **A**.

Доказательство.

Рассмотрим преобразование n-мерного вектора $x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i$ в m-мерный $y = \sum_{k=1}^{m} y_k g_k$:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n, \\ y_2 &= a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n, \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_m &= a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n. \end{aligned} \tag{1}$$

Преобразование (1) определяется матрицей $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ и ставить в соответствие каждому вектору x вектор y. Легко можно заметить, что преобразование (1), заданное матрицей $A = \left(a_{ij}\right)$, является линейным, т.е. для него выполняются условия 1) и 2).

продолжение ….

- А теперь докажем обратное утверждение, т.е. покажем, что для каждого линейного преобразования при фиксированном базисе существует матрица, определяющая это преобразование.

Обозначим координаты вектора $\mathbf{A}e_k$ в базисе $g_1, \dots, g_m$ через

$$(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{mk})^T$$

т.е. положим

$$\mathbf{A}e_k = \sum_{i=1}^{m} a_{ik} g_i = G\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

где $G = [g_1,\ g_2, \dots, g_m]$ матрица из столбцов базисных векторов $g_1,\ g_2, \dots, g_m$. Произвольному вектору $\mathbf{x} = x_1e_1 + \cdots + x_ne_n$ поставим в соответствие $\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x}$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}(x_1e_1 + x_ne_n) = x_1\mathbf{A}e_1 + \cdots + x_n\mathbf{A}e_n = \qquad (2)$$

$$= x_1G\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} + \cdots + x_nG\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} = G\left(\begin{bmatrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{bmatrix} x_1 + \cdots + x_n\begin{bmatrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{bmatrix} x_n\right) =$$

$$= G\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}\right) = GA\mathbf{x} = G\begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} = \sum_{k=1}^{m} y_k g_k.$$

Матрицу $A = \left(a_{ij}\right)_{m\times n}$ **называют матрицей линейного преобразования в базисах** $e_1, \dots, e_n$ и $g_1, \dots, g_m$. Теорема доказана.

Вывод

- Линейные преобразования можно описывать с помощью матриц и матрицы являются тем аналитическим аппаратом, с помощью которых изучаются линейные преобразования в конечномерном пространстве.

При изменении базиса матрица, соответствующая данному линейному преобразованию изменится.

В матрице A, отвечающей лин. преобразованию $\mathbf{A}$, k-й столбец состоит из координат $\mathbf{A}e_k$ $(k = 1, \dots, n)$.

Векторному равенству линейного преобразования $\mathbf{A}$

$$\mathbf{y} = \mathbf{A}\mathbf{x},$$

соответствует матричное представление

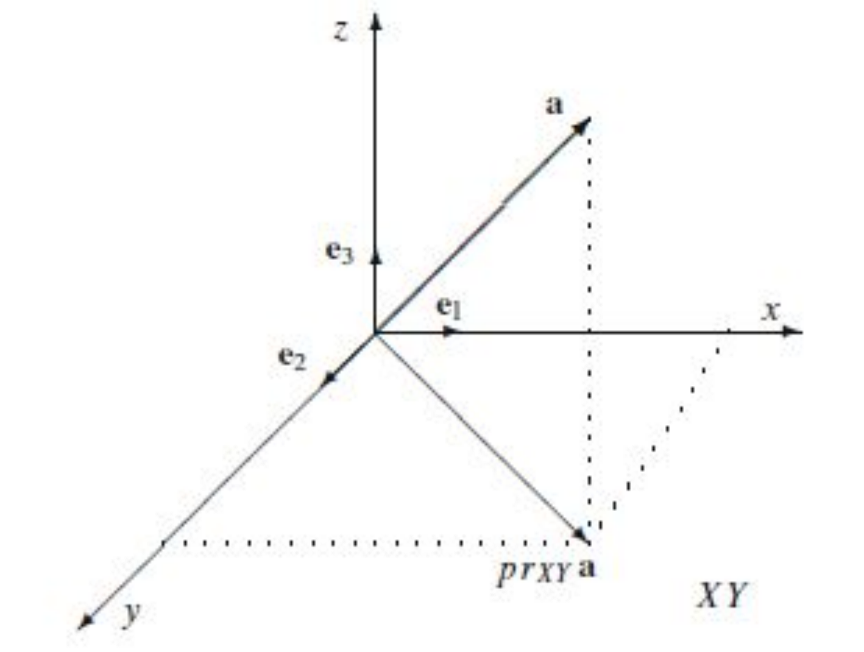
$$\mathbf{y} = A\mathbf{x}.$$

Пример

Пример. Пусть **A** отображает вектор $x \in \mathbb{R}^3$ в его проекцию на плоскость XOY.

Рассмотрим канонический базис

$$\mathbf{e}_1 = (1,0,0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0,1,0)$$
$$\mathbf{e}_3 = (0,0,1)$$



Тогда

$\mathbf{A}e_1 = e_1$;

$\mathbf{A}e_2 = e_2$;

$\mathbf{A}e_3 = \mathbf{0}$.

Матрица преобразование будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Слайд 1

- **Пример.** Пусть **A** отображает векторы канонического (стандартного) базиса

$$\mathbf{e}_1 = (1, 0, 0)$$
$$\mathbf{e}_2 = (0, 1, 0)$$
$$\mathbf{e}_3 = (0, 0, 1)$$

в векторы

$$A\mathbf{e}_1 = (1, 2),$$
$$A\mathbf{e}_2 = (-1, -2),$$
$$A\mathbf{e}_3 = (11, 22).$$

Тогда матрица преобразования будет иметь вид

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 11 \\ 2 & -2 & 22 \end{bmatrix}.$$

Сложение, умножение линейных преобразований

Определение 2. Произведение линейных преобразований A и B называется преобразование C, состоящее в последовательном выполнении сначала преобразования B, а затем преобразования A.

Другими словами: $C=AB$ и для любого вектора x верно $Cx=ABx$.

Произведение линейных преобразований есть линейное преобразование. Действительно,

$$C(x_1+x_2)=A[B(x_1+x_2)]=A(Bx_1+Bx_2)= \\ =ABx_1+ABx_2=Cx_1+Cx_2. \qquad (4)$$

Таким же образом можно доказать, что

$$C(kx)=AB(kx)=A(kBx)=kABx=k\,Cx.$$

Определение 3. Сумма линейных преобразований A и B называется преобразование C, которое каждому вектору x ставит в соответствие вектор $Ax+Bx$. Иначе говоря $C=A+B$, означает, что

$$Cx=Ax+Bx.$$

Свойства умножения и сложения линейных преобразований

- $$\mathrm{A} + B = B + C,$$
  $$(\mathrm{A} + B) + C = A + (B + C),$$
  $$\mathrm{A}(BC) = (AB)C,$$
  $$(\mathrm{A} + B)C = AC + BC.$$

Умножение не коммутативно.

Например,

Если $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$, то

$$AB = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \neq BA = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Обратное преобразование
Ядро и образ линейного преобразования

- Определение 4. Преобразование B называется обратным к A, если $AB=BA=I$, I – единичное преобразование.

Определение 5. 1) Пусть $\mathbf{A}$ – преобразование из R в S. Совокупность векторов Ax, где x пробегает все пространство R, называется образом пространства R при преобразовании A и обозначается через $\mathrm{Im}(A)$:

$$\mathrm{Im}(\mathbf{A}) = \{y \in S: y = \mathbf{A}x, \ \forall x \in R\}. \qquad (1)$$

2) Ядро или нуль-пространство $\mathrm{Ker}(\mathbf{A})$ линейного преобразования $\mathbf{A}$, это множество всех векторов $\forall x \in R$, таких что $\mathbf{A}x = 0$:

$$\mathrm{Ker}(\mathbf{A}) = \{x \in R: \mathbf{A}x = \mathbf{0}\}.$$

определяется след. образом

Аналогичным же образом определяется образ и ядро для любой матрицы А порядка $m \times n$:

$$\mathrm{Im}(A) = \{y \in S: \ y = Ax, \qquad \forall x \in R^n\};$$
$$\mathrm{Ker}(A) = \{x \in R: \ Ax = 0, \}.$$

Заметка 1. Образ матрицы $\mathrm{Im}(A)$ - это линейная оболочка столбцов матрицы A.

Важная теорема

Теорема 2. Пусть A – матрица порядка $n \times n$. Тогда

$$\dim\big(\mathrm{Im}(A)\big) + \dim\big(\mathrm{Ker}(A)\big) = \dim(R).$$

Доказательство.

Пусть ядро матрицы имеет размерность k. Выберем в ядре базис $e_1, \dots, e_k$ и дополним его до базиса всего пространства: $e_{k+1}, \dots, e_n$.
Рассмотрим векторы $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$. Множество лин. комбинаций векторов $Ae_{k+1}, \dots, Ae_n$ совпадает с образом матрицы A.

Действительно, если $y \in \mathrm{Im}(A)$, тогда существует $x = a_1 e_1 + \cdots + a_n e_n$, такой, что $Ax = y = a_{k+1} Ae_{k+1} + \cdots + a_n Ae_n$.
Докажем, что n-k векторов линейно независимы. Пусть это не так. Тогда для нетривиального набора $b_{k+1}, \dots, b_n$ должно быть

$$b_{k+1} Ae_{k+1} + \cdots + b_n Ae_n = 0. \qquad (1)$$

Рассмотрим вектор $z = b_{k+1} e_{k+1} + \cdots + b_n e_n$, для которого согласно (1) $Az = 0$. Получается, что вектор с одной стороны принадлежит ядру, и выражается базисом ядра $e_1, \dots, e_k$, с другой стороны выражается другим базисом $e_{k+1}, \dots, e_n$, что невозможно. Таким образом размерность образа равна n-k.

Теорема 2 доказана.

Связь между матрицами линейного преобразования в различных базисах

- Рассмотрим линейное преобразование $\mathbf{A}$ в $\mathbb{R}^n$ в различных базисах: $e_1, \dots, e_n$ и $f_1, \dots, f_n$. Пусть $A = (a_{ik})$ – матрица линейного преобразования $\mathbf{A}$ в базисе $e_1, \dots, e_n$, а $B = (b_{ik})$ – матрица линейного преобразования $\mathbf{A}$ в базисе $f_1, \dots, f_n$. Пусть $E = [e_1, \dots, e_n]$ и $F = [f_1, \dots, f_n]$ - две невырожденные матрицы, столбцы которых состоят из соответствующих базисных векторов. Тогда C - матрица перехода от базиса $e_1, \dots, e_n$ к базису $f_1, \dots, f_n$ определится из соотношения

$$F = EC. \qquad (1)$$

В базисе $e_1, \dots, e_n$ положим

$$y_e = Ax_e \qquad (2)$$

В базисе $f_1, \dots, f_n$, положим

$$y_f = Bx_f. \qquad (3)$$

Если C - матрица перехода, то

$$y_e = Cy_f, \qquad x_e = Cx_f. \qquad (4)$$

Тогда

$$y_e = Ax_e \Longrightarrow Cy_f = ACx_f \Longrightarrow y_f = C^{-1}ACx_f \Longrightarrow C^{-1}AC = B. \qquad (5)$$

Подобие! Важная вешь!

- **Определение 6.** Матрицы A и B, связанные соотношением $B = C^{-1}AC$, называются **подобными .**

Они соответствуют одному и тому же лин. преобразованию в различных базисах.

Задачи

Задачи из книги [Алескерова_Пионтковского]

3. Determine which of the following mappings are linear:
   (a) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y, z) = (x, z)$.
   (b) $F : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$, $F(\mathbf{x}) = -\mathbf{x}$.
   (c) $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $F(\mathbf{x}) = \mathbf{x} + (0, -1, 0)$.
   (d) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $F(x, y) = (2x + 4, y)$.
   (e) $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $F(x, y) = xy$.

5. Let R be a three dimensional space with a basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3$. Consider the operator which maps any $\mathbf{x} \in R$ to its projection on the space spanned by $\mathbf{e}_1$. Prove that this operator is linear. Find the transformation matrix with respect to the canonical basis of $R = \mathbb{R}^3$.

7. Determine which of the following mappings $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ are linear, and then find the associated transformation matrix of F with respect to the same basis through which $\mathbf{x}$ and $F(\mathbf{x})$ are represented.
   (a) $F(\mathbf{x}) = (x_2 + x_3, 2x_1 + x_3, 3x_1 - x_2 + x_3)$.
   (b) $F(\mathbf{x}) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$.
   (c) $F(\mathbf{x}) = (2x_1 + x_2, x_1 + x_3, x_3^2)$.
   (d) $F(\mathbf{x}) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$.

Задачи

Задачи из книги [Алескерова_Пионтковского]

9. Let $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ be such that $F(\mathbf{x}) = (\mathbf{x}, \mathbf{a})\mathbf{a}$, where $\mathbf{a} = (1, 2, 3)$. Prove that F is a linear operator, and find its transformation matrix with respect to the canonical basis for $\mathbb{R}^3$, and also with respect to the basis:

$$\mathbf{b}_1 = (1, 0, 1),$$
$$\mathbf{b}_2 = (2, 0, -1),$$
$$\mathbf{b}_3 = (1, 1, 0).$$

10. Assume a linear operator has the following matrix with respect to some basis $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & -1 & 2 \\ 2 & 5 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

Find the matrix of this operator with respect to the bases:

(a) $\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_4, \mathbf{e}_1$

(b) $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3, \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_4$

Задачи

12. A linear operator has the following transformation matrix

$$\begin{bmatrix} 1 & -18 & 15 \\ -1 & -22 & 15 \\ 1 & -25 & 22 \end{bmatrix}$$

with respect to the basis

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_1 &= (8, -6, 7) \\ \mathbf{a}_2 &= (-16, 7, -13) \\ \mathbf{a}_3 &= (9, -3, 7) \end{aligned}$$

Find the operator matrix with respect to the basis

$$\begin{aligned} \mathbf{b}_1 &= (1, -2, 1) \\ \mathbf{b}_2 &= (3, -1, 2) \\ \mathbf{b}_3 &= (2, 1, 2) \end{aligned}$$

18. Докажите, что у подобных матриц ранги, определители и следы совпадают.