

**Производная и интеграл
степенной функции с
действительным показателем**

Цели урока

- 11.3.1.9 - знать и применять правила нахождения производной степенной функции с действительным показателем;
- 11.3.1.10 - знать и применять правила нахождения интеграла степенной функции с действительным показателем

Производная степенной функции

- Производная степенной функции равна произведению показателя степени и основания в степени на единицу меньше.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

- Заметим, что в качестве степени может быть как натуральное число, то есть 1, 2, 3, ...; так и любое отрицательное число: - 1, - 2 и т.д., а также и любое дробное, например, 2,34; - 4,1 или $\frac{3}{5}$.

Пример

Найти производную функции: $f(x) = x^8$

Решение

Искомая производная: $f'(x) = (x^8)'$

Находим производную степенной функции по формуле:

$$f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$$

Ответ: $f'(x) = 8x^7$

1. Производная $f(x)$ в натуральной степени. $(x^n)' = nx^{n-1}$.

Производные простых функций:

$$f(x) = 1, f'(x) = 0;$$

$$f(x) = x, f'(x) = 1;$$

$$f(x) = x^2, f'(x) = 2x,$$

$$f(x) = x^3, f'(x) = 3x^2.$$

2. Производная произвольной рациональной степени.

$$y = x^{\frac{3}{4}}, y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}};$$

$$y = x^{-\frac{3}{4}}, y' = -\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x}};$$

3. Производная функции $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^n}$.

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$y = \frac{1}{x^2} \quad y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, y' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}; \quad -\frac{2}{x^3};$$

$$y = \frac{1}{x^k} = x^{-k}, y' = -kx^{-k-1} = -\frac{k}{x^{k+1}}.$$

4. Производная функции $y = \sqrt{x}$.

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Интеграл степенной функции

- **Интеграл от степенной функции** равен этой же функции в степени на единицу больше, деленной на эту же степень, плюс постоянная интегрирования.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- Заметим, что в качестве степени может быть как натуральное число; так и любое отрицательное число, кроме (-1) , а также и любое дробное, например, $2,34$; $-4,1$ или $\frac{3}{5}$.
- Если $n = -1$, то $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Упражнения

- Заполните пропуски

$$\int x^8 dx = \frac{1}{\boxed{9}} x^9 + C$$

$$\int x^{\boxed{10}} dx = \frac{1}{11} x^{11} + C$$

$$17 \int x^{\boxed{16}} dx = x^{\boxed{17}} + C$$

$$\boxed{7} \int x^{\boxed{6}} dx = x^7 + C$$

- Найдите интегралы функции

$$1) \int \frac{1}{x^4} dx = \int x^{-4} dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + C$$

$$2) \int \sqrt{x} dx = \int x^{\frac{1}{2}} dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3} x\sqrt{x} + C$$

$$3) \int \frac{2}{x\sqrt{x}} dx = \int 2x^{-\frac{3}{2}} dx = -\frac{4}{\sqrt{x}} + C$$

$$4) \int \sqrt[5]{x^2} dx = \int x^{\frac{2}{5}} dx = \frac{5}{7} \sqrt[5]{x^7} + C$$

Выполните задания:

№1 Вычислите : $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}} dx$.

/2/

№2 Вычислите $y'(1)$:

$$y = 3x^2\sqrt[3]{x}$$

/2/

№3 Вычислите $y'(1)$:

$$y = \frac{1}{(x^3 - 1)^3};$$

/2/

№4 Найдите интеграл :

$$\int \frac{2\sqrt[3]{x^2} - x + 3}{\sqrt{x}} dx$$

/3/

№5 найдите интеграл :

$$\int \frac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{2x}} dx$$

/3/

№6 Найдите площадь фигуры ограниченную линиями

$$y(x) = x^{\frac{7}{9}}, \quad x = 1, \quad x = 0, \quad y = 4$$

/3/

№7

$$f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{10}{\sqrt{x}} + 1, \quad x \geq 0$$

Найдите функцию проходящую через точку

(4;25)

/5/

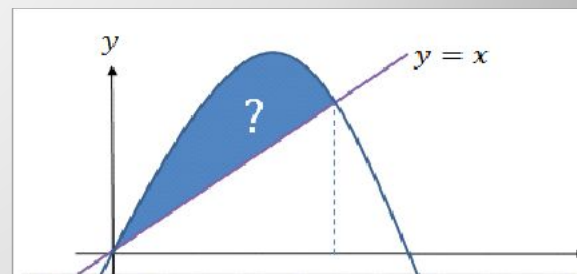
№8

При каком значении x производная функции принимает отрицательные значения :

$$y = (5 - 3x)^2(3x - 1).$$

/5/

№9



Determine the area between the lines with equations $y = x(4 - x)$ and $y = x$

/5/

Рефлексия

- *чему научился*
- *что осталось непонятым*
- *над чем необходимо работать*

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1} \quad \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$