Производная и интеграл степенной функции с действительным показателем

Цели урока

- 11.3.1.9 - знать и применять правила нахождения производной степенной функции с действительным показателем;
- 11.3.1.10 - знать и применять правила нахождения интеграла степенной функции с действительным показателем

Производная степенной функции

- Производная степенной функции равна произведению показателя степени и основания в степени на единицу меньше.

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

- Заметим, что в качестве степени может быть как натуральное число, то есть 1, 2, 3, ...; так и любое отрицательное число: - 1, - 2 и т.д., а также и любое дробное, например, 2,34; - 4,1 или $\frac{3}{5}$.

Пример

Найти производную функции: $f(x) = x^8$

Решение

Искомая производная: $f'(x) = \left(x^8\right)'$

Находим производную степенной функции по формуле:

$$f'(x) = 8x^{8-1} = 8x^7$$

Ответ: $f'(x) = 8x^7$

1. **Производная $f(x)$ в натуральной степени.** $(x^{n})' = nx^{n-1}$.

Производные простых функций:

$$f(x) = 1,\ f'(x) = 0;$$

$$f(x) = x,\ f'(x) = 1;$$

$$f(x) = x^{2},\ f'(x) = 2x;$$

$$f(x) = x^{3},\ f'(x) = 3x^{2}.$$

2. **Производная произвольной рациональной степени.**

$$y = x^{\frac{3}{4}},\ y' = \frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = \frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = \frac{3}{4\sqrt[4]{x}};$$

$$y = x^{-\frac{3}{4}},\ y' = -\frac{3}{4}x^{\frac{3}{4}-1} = -\frac{3}{4x^{\frac{1}{4}}} = -\frac{3}{4\sqrt[4]{x}};$$

3. **Производная функции** $y = \frac{1}{x}$, $y = \frac{1}{x^2}$, $y = \frac{1}{x^n}$.

$$y = \frac{1}{x} = x^{-1}, y' = -1x^{-1-1} = -x^{-2} = -\frac{1}{x^2};$$

$$y = \frac{1}{x^2} \; y = \frac{1}{x^2} = x^{-2}, y' = -2x^{-2-1} = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}; -\frac{2}{x^3};$$

$$y = \frac{1}{x^k} = x^{-k}, y' = -kx^{-k-1} = -\frac{k}{x^{k+1}}.$$

4. **Производная функции** $y = \sqrt{x}$.

$$y = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}}, y' = \frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1} = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Интеграл степенной функции

- **Интеграл от степенной функции** равен этой же функции в степени на единицу больше, деленной на эту же степень, плюс постоянная интегрирования.

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$

- Заметим, что в качестве степени может быть как натуральное число; так и любое отрицательное число, кроме (- 1), а также и любое дробное, например, 2,34; - 4,1 или $\frac{3}{5}$.
- Если *n=-1*, то $\int \frac{1}{x} dx = \ln x + C$

Упражнения

- Заполните пропуски

$$\int x^8\,dx = \frac{1}{\boxed{9}}x^9 + C$$

$$\int x^{\boxed{10}}\,dx = \frac{1}{11}x^{11} + C$$

$$17\int x^{\boxed{16}}\,dx = x^{\boxed{17}} + C$$

$$\boxed{7}\int x^{\boxed{6}}\,dx = x^7 + C$$

- Найдите интегралы функции

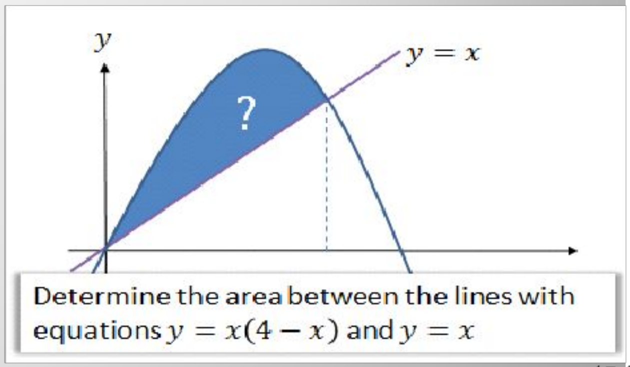
1) $\int \frac{1}{x^4}dx \quad = \int x^{-4}dx = \frac{x^{-3}}{-3} = -\frac{1}{3x^3} + C$

2) $\int \sqrt{x}dx \quad = \int x^{\frac{1}{2}}dx = \frac{x^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}x\sqrt{x} + C$

3) $\int \frac{2}{x\sqrt{x}}dx \quad = \int 2x^{-\frac{3}{2}}dx = -\frac{4}{\sqrt{x}} + C$

4) $\int \sqrt[5]{x^2}dx \quad = \int x^{\frac{2}{5}}dx == \frac{5}{7}\sqrt[5]{x^7} + C$

Выполните задания:

№1 Вычилите : $\int \frac{x\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}}dx$. /2/	№2Вычислите $y'(1)$: $y = 3x^2\sqrt[3]{x}$ /2/	№3 Вычислите $y'(1)$: $y = \frac{1}{(x^3-1)^3}$; /2/
№4Найдите интеграл : $\int \frac{2\sqrt[3]{x^2} - x + 3}{\sqrt{x}}dx$ /3/	№5 найдите интеграл : $\int \frac{2x^2 - 6x + 4}{\sqrt{2x}}dx$ /3/	***№6* Найдите площадь фигуры ограниченную линиями** $y(x) = x^{\frac{7}{9}}, \ x = 1, \ x = 0, \ y = 4$ /3/
№7 $f'(x) = \frac{3}{8}x^2 - \frac{10}{\sqrt{x}} + 1, \ x \neq 0$ Найдите функцию проходящую через точку (4;25) /5/	*№8* При каком значении x производная функции принимает отрицательные значения : $y = (5-3x)^2(3x-1)$. /5/	№9  /5/

Рефлексия

- *чему научился*
- *что осталось непонятным*
- *над чем необходимо работать*

$$\left(x^n\right)' = nx^{n-1}$$

$$\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C$$