

ЦИКЛЫ КАРНО

Итоговая работа
Щелкуновой Ольги Юрьевны,
слушателя по программе повышения квалификации
«Методика и технологии подготовки обучающихся к
участию во всероссийских олимпиадах
по математике, физике и астрономии»

Санкт-Петербургский государственный университет
июнь 2019 года

В термодинамике **цикл Карно́** или **процесс Карно** — это идеальный круговой процесс, состоящий из двух адиабатных и двух изотермических процессов.

В процессе Карно термодинамическая система выполняет механическую работу за счёт обмена теплотой с двумя тепловыми резервуарами, имеющими постоянные, но различающиеся температуры.

Резервуар с более высокой температурой называется *нагревателем*, а с более низкой температурой — *холодильником*.

Николя Леонар Сади Карно
(1 июня 1796 – 24 августа 1832)



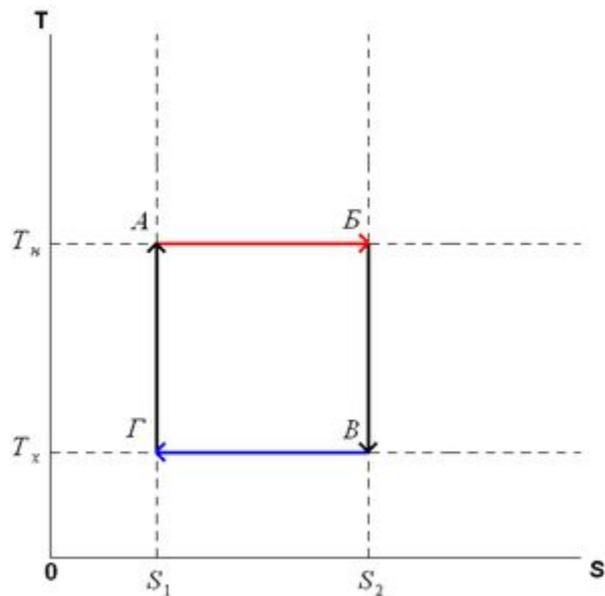


Рис. 1. Цикл Карно в координатах T — S

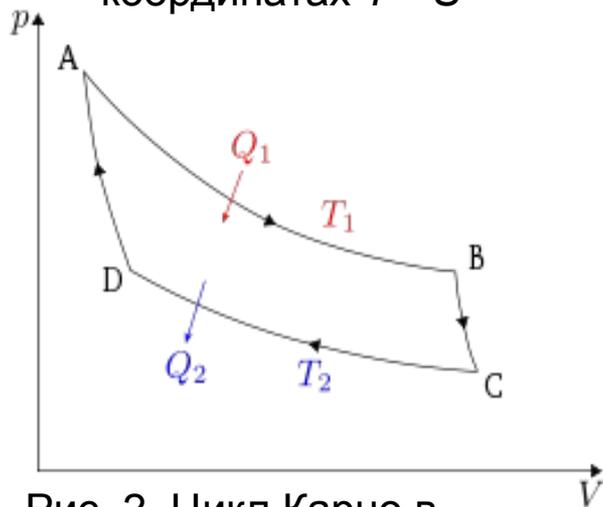


Рис. 2. Цикл Карно в координатах p — V

Пусть тепловая машина состоит из нагревателя, холодильника и рабочего тела. **Цикл Карно состоит из четырёх обратимых стадий, две из которых осуществляются при постоянной температуре (изотермически), а две — при постоянной энтропии (адиабатически).** Поэтому цикл Карно удобно представить в координатах (температура) и (энтропия).

1. Изотермическое расширение (на рис. 1 — процесс $A \rightarrow B$). В начале процесса рабочее тело имеет температуру, то есть температуру нагревателя. Затем тело приводится в контакт с нагревателем, который изотермически (при постоянной температуре) передаёт ему количество теплоты. При этом объём рабочего тела увеличивается, оно совершает механическую работу, а его энтропия возрастает.

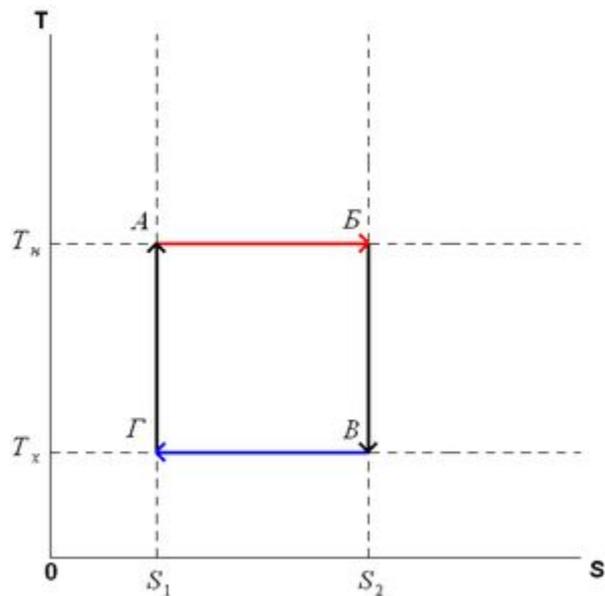


Рис. 1. Цикл Карно в координатах T — S

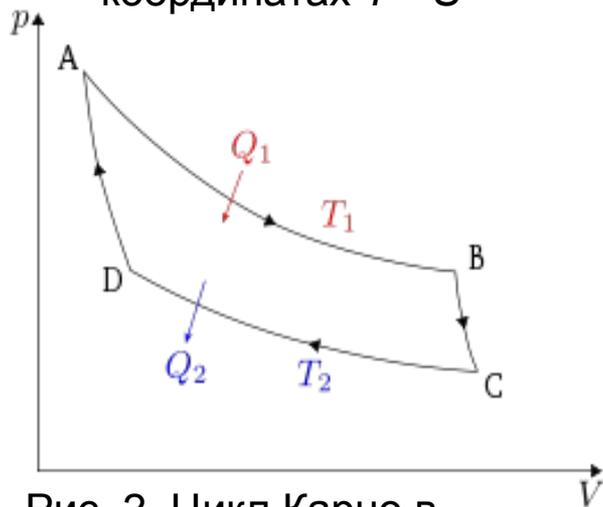


Рис. 2. Цикл Карно в координатах p — V

2. Адиабатическое расширение (на рис. 1 — процесс $B \rightarrow B$). Рабочее тело отсоединяется от нагревателя и продолжает расширяться без теплообмена с окружающей средой. При этом температура тела уменьшается до температуры холодильника, тело совершает механическую работу, а энтропия остаётся постоянной.

3. Изотермическое сжатие (на рис. 1 — процесс $B \rightarrow A$). Рабочее тело, имеющее температуру, приводится в контакт с холодильником и начинает изотермически сжиматься под действием внешней силы, отдавая холодильнику количество теплоты. Над телом совершается работа, его энтропия уменьшается.

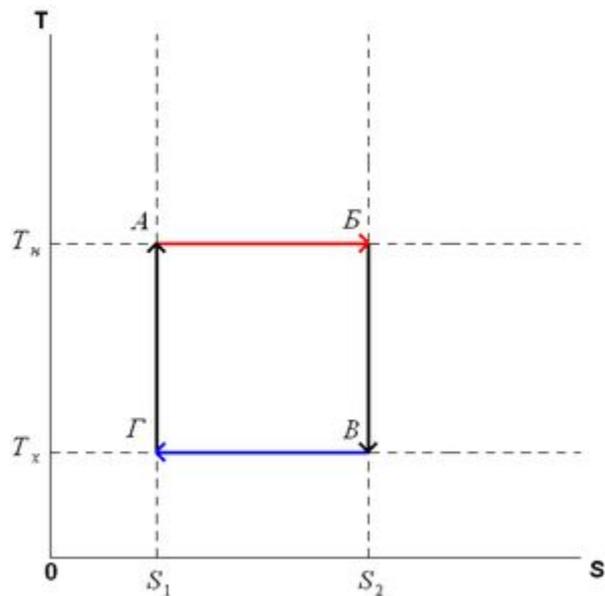


Рис. 1. Цикл Карно в координатах $T-S$

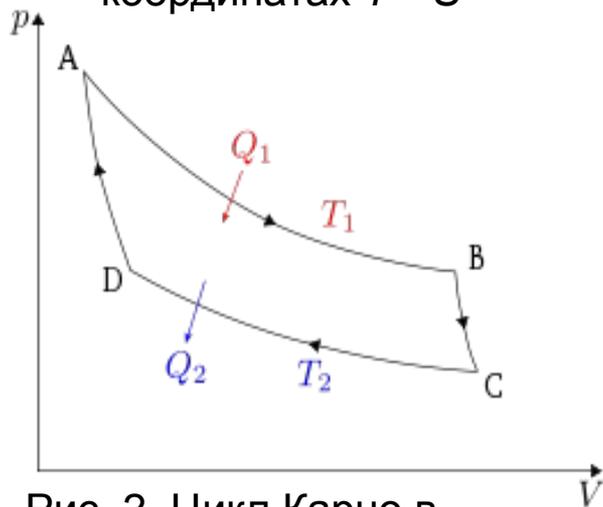


Рис. 2. Цикл Карно в координатах $p-V$

4. Адиабатическое сжатие (на рис. 1 — процесс $\Gamma \rightarrow A$). Рабочее тело отсоединяется от холодильника и сжимается под действием внешней силы без теплообмена с окружающей средой. При этом его температура увеличивается до температуры нагревателя, над телом совершается работа, его энтропия остаётся постоянной.

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

η — коэффициент полезного действия

T_1 — температура нагревателя

T_2 — температура холодильника

$[T] = 1K$ $[\eta] = \%$ (безразмерная)

Из выражения следует, что КПД тепловой машины, работающей по циклу Карно, зависит только от температур нагревателя и холодильника, но не зависит ни от устройства машины, ни от вида или свойств её рабочего тела. Этот результат составляет содержание **первой теоремы Карно**.

Кроме того, из него следует, что КПД может составлять 100 % только в том случае, если температура холодильника равна абсолютному нулю. Это невозможно, но не из-за недостижимости абсолютного нуля (этот вопрос решается только третьим началом термодинамики, учитывать которое здесь нет необходимости), а из-за того, что такой цикл или нельзя замкнуть, или он вырождается в совокупность двух совпадающих адиабат и изотерм.

Поэтому максимальный КПД любой тепловой машины не может превосходить КПД тепловой машины Карно, работающей при тех же температурах нагревателя и холодильника. Это утверждение называется **второй теоремой Карно**.

Оно даёт верхний предел КПД любой тепловой машины и позволяет оценить отклонение реального КПД от максимального, то есть потери энергии вследствие неидеальности тепловых процессов.

Для повышения КПД тепловой машины нужно увеличить температуру нагревателя и уменьшить температуру холодильника. КПД тепловой машины всегда меньше 1.

Карно показал, что невозможно построить такой периодически действующий тепловой двигатель с циклом, имеющим более высокий термический КПД, чем цикл Карно, при одинаковых начальных и конечных температурах.

В этом смысле КПД цикла Карно есть тот предел, к которому может приблизиться КПД цикла любой тепловой машины.

Одним из важных свойств цикла Карно является его обратимость: он может быть проведён как в прямом, так и в обратном направлении, при этом энтропия адиабатически изолированной (без теплообмена с окружающей средой) системы не меняется.

ЗАДАЧА 1.

Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. Воздух при давлении $p_1 = 708$ кПа и температуре $t_1 = 127^\circ \text{C}$ занимает объем $V_1 = 2$ л. После изотермического расширения воздух занял объем $V_2 = 5$ л; после адиабатического расширения объем стал равным $V_3 = 8$ л.

Найти:

- а) координаты пересечения изотерм и адиабат;
- б) работу A , совершаемую на каждом участке цикла;
- в) полную работу A , совершаемую за весь цикл; к. п. д. цикла;
- д) количество теплоты Q_1 , полученное от нагревателя за один цикл;
- е) количество теплоты Q_2 , отданное холодильнику за один цикл.

В решении задачи используем уравнение Менделеева – Клапейрона.
 Уравнение адиабаты. Определения теплоемкости, работы газа. 1 начало термодинамики, КПД цикла Карно.

Решение:

а)
 запишем ур-е
 изотермы AB:

$$pV = \frac{m}{\mu} RT_1 \quad (1)$$

т.к. точка A принадлежит AB, то

$$p_1 V_1 = \frac{m}{\mu} RT_1$$

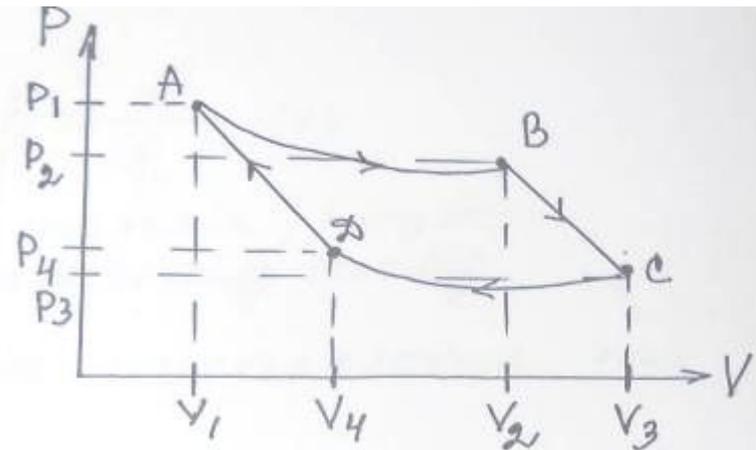
откуда $\frac{m}{\mu} = \gamma = \frac{p_1 V_1}{RT_1}$, $\gamma = 0,427 \text{ моль}$

по условию: $p_1 = 708 \text{ кПа}$, $V_1 = 2 \text{ л}$; $T_1 = 400 \text{ К}$

$$pV = 0,427 RT_1 \text{ или } pV = 1,42 \text{ кДж} \quad (1)$$

По закону Бойля – Мариотта для точки B

$$p_2 = \frac{pV}{V_2} = 284 \text{ кПа}$$



Точки B и C принадлежат адиабате BC,
$$P_2 V_2^{\gamma-1} = P_3 V_3^{\gamma-1} \Rightarrow P_3 = P_2 \cdot \left(\frac{V_2}{V_3}\right)^{\gamma} = 146 \text{ кПа}$$

$$\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{i+2}{i}; \quad i - \text{число степеней свободы молекулы газа}$$

Уравнение состояния СА имеет вид

$$P V = \nu R T_2 = P_3 V_3 \Rightarrow T_2 = \frac{P_3 V_3}{\nu R}; \quad T_2 = 330 \text{ К}$$

Координаты точек D и A удовлетворяют уравнению адиабаты DA:

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma-1} = \frac{T_1}{T_2} \Rightarrow V_4 = 3,2 \text{ л}$$

$$\left(\frac{V_4}{V_1}\right)^{\gamma} = \frac{P_1}{P_4} \Rightarrow P_4 = P_1 \left(\frac{V_1}{V_4}\right)^{\gamma}; \quad P_4 = 365 \text{ кПа}$$

Ответ:

A (2; 408); B (5; 284);

C (8; 146); D (3,2; 365);

объем (V) измеряется в литрах;
давление (P) — " — в килопаскалях.

б).

работа газа на участке АВ (изотерма)

$$A_1 = RT_1 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_1}; \quad A_1 = 1300 \text{ Дж}$$

работа газа на участке ВС (адиабата)

$$A_2 = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \right] = \frac{RT_1}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} \left(1 - \frac{T_2}{T_1} \right); \quad A_2 = 620 \text{ Дж}$$

работа газа на участке СД (изотерма)

$$A_3 = RT_2 \frac{m}{\mu} \ln \frac{V_2}{V_3}; \quad A_3 = -1070 \text{ Дж}$$

работа газа на участке ДА (адиабата)

$$A_4 = -A_2 = \frac{RT_2}{\gamma-1} \frac{m}{\mu} \left(1 - \frac{T_1}{T_2} \right); \quad A_4 = -620 \text{ Дж}$$

работа за весь цикл $A = A_1 + A_2 + A_3 + A_4 = 230 \text{ Дж}$

в). КПД цикла

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1}; \quad \eta = 0,175 \quad (17,5\%)$$

г). количество теплоты, полученное от нагревателя за один цикл:

$$Q_1 = \frac{A}{\eta}; \quad Q_1 = 1300 \text{ Дж}$$

е). количество теплоты, отданное холодильнику за один цикл:

$$Q_2 = Q_1 - A; \quad Q_2 = 1070 \text{ Дж}$$

ЗАДАЧА 1а.

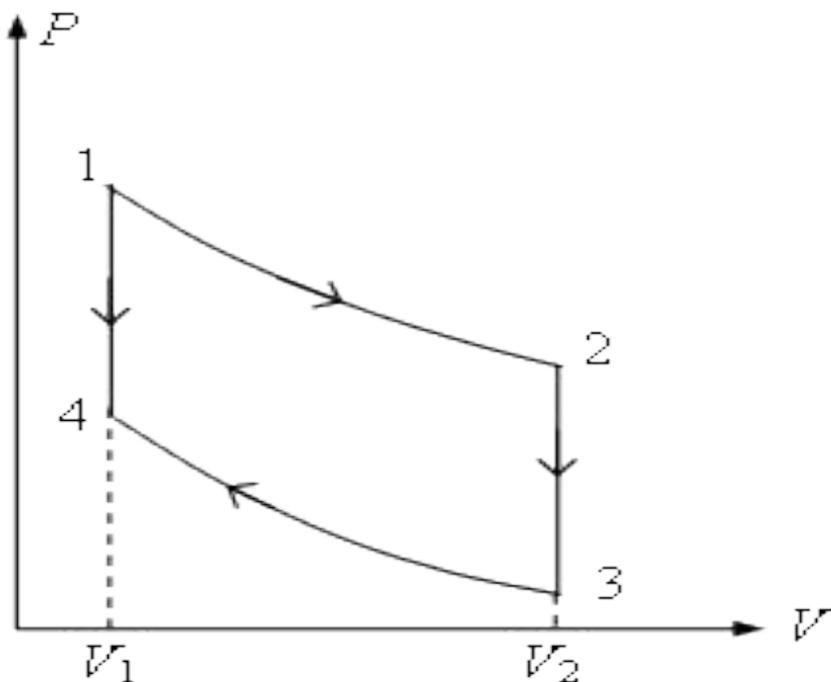
Количество $\nu = 1$ кмоль идеального газа совершает цикл, состоящий из двух изохор и двух изобар. При этом объем газа изменяется от $V_1 = 25$ м³ до $V_2 = 50$ м³ и давление изменяется от $p_1 = 100$ кПа до $p_2 = 200$ кПа. Во сколько раз работа, совершаемая при таком цикле, меньше работы, совершаемой в цикле Карно, изотермы которого соответствуют наибольшей и наименьшей температурам рассматриваемого цикла, если при изотермическом расширении объем увеличился в 2 раза?

Ответ: $A_2/A_1=2,1$

ЗАДАЧА 16.

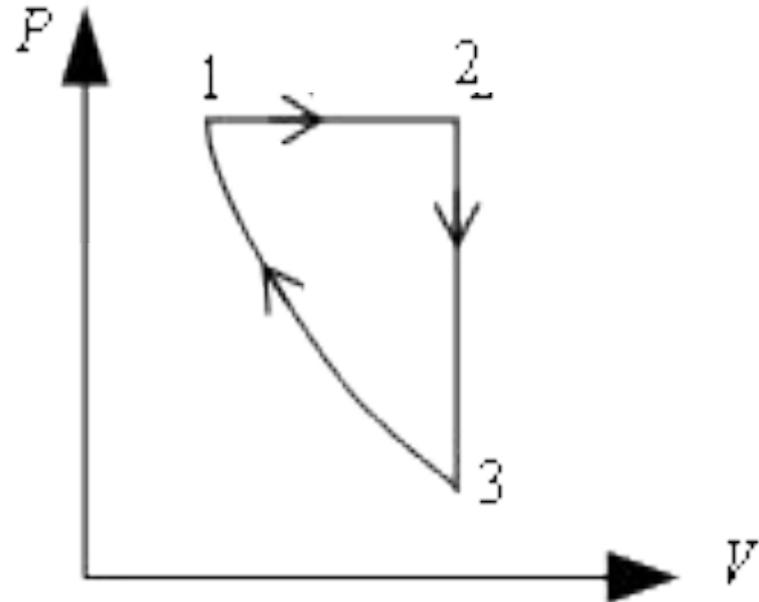
Найдите к.п.д. цикла, состоящего из двух изохор и двух адиабат (смотри рис.). Рабочим веществом является азот. Известно, что в пределах цикла объем газа изменяется в 10 раз, то есть $V_{max}/V_{min}=10$.

Ответ: КПД цикла 60%.



ЗАДАЧА 2.

Рабочее вещество, внутренняя энергия которого U связана с давлением P и объемом V соотношением $U = kPV$, совершает термодинамический цикл, состоящий из изобары, изохоры и адиабаты (рис.). Работа, совершенная веществом во время изобарного процесса, в $m = 5$ раз превышает работу внешних сил по сжатию вещества, совершенную при адиабатическом процессе. К.п.д. цикла $\eta = 1/4$. Определите k .



Решение:

КПД цикла по определению: $\eta = \frac{A}{Q_1}$ (*)

Полезная работа за цикл:

$$A = A_{12} - A_{31} \quad (**)$$

A_{12} — работа, совершаемая веществом на изобаре 12.

A_{31} — работа, совершаемая над веществом на адиабате 31 ($A_{31} < 0$)

Согласно I началу термодинамики в данном цикле тепло Q_1 подводится к рабочему веществу только на участке 12

$$Q_1 = \Delta U_{12} + A_{12} \quad (***)$$

ΔU_{12} — изменение внутренней энергии рабочего вещества на участке 12 цикла

используем данное: $U = k p V$ получим

$$\Delta V_{12} = k p (V_2 - V_1) = k p_0 V = k A_{12}$$

$$Q_1 = (k+1) A_{12} \quad (1)$$

по условию задачи: $A_{31} = \frac{A_{12}}{m}$; подставим в (**)

$$A = A_{12} - A_{12}/m = \frac{m-1}{m} A_{12} \quad (2)$$

(1) и (2) подставим в (*)

$$\eta = \left(\frac{m-1}{m} A_{12} \right) : (k+1) A_{12}$$

Решаем уравнение относительно k :

$$k = \frac{m-1-\eta m}{\eta m}$$

$$\underline{\underline{k = 2,2}}$$

ПРОСТЫЕ ЗАДАЧИ:

ЗАДАЧА 3.

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 2,94$ кДж и отдает за один цикл холодильнику количество теплоты $Q_2 = 13,4$ кДж. Найти к.п.д. цикла.

Решение:

$$\text{к.п.д. цикла Карно } \eta = \frac{A}{Q_1} \quad (1)$$

где Q_1 - количество тепла, переданное к рабочему телу.

по условию машина идеальная, то

$$\eta = \frac{T_1 - T_2}{T_1} = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1} \quad (2)$$

сравнивая (1) и (2), получим

$$A = Q_1 - Q_2$$

$$\text{откуда } Q_1 = A + Q_2,$$

$$\text{тогда } \eta = \frac{A}{A + Q_2}$$

$$\eta = \frac{2,94 \text{ кДж}}{(2,94 + 13,4) \text{ кДж}} = 0,1799 \approx 18\%$$

$$\text{Ответ: } \eta = 18\%$$

ЗАДАЧА 3а.

Идеальная тепловая машина, работающая по циклу Карно, совершает за один цикл работу $A = 73,5$ кДж. Температура нагревателя $t_1 = 100^\circ \text{C}$, температура холодильника $t_2 = 0^\circ \text{C}$. Найти к. п. д. цикла, количество теплоты Q_1 , получаемое машиной за один цикл от нагревателя, и количество теплоты Q_2 , отдаваемое за один цикл холодильнику.

Ответ: $Q_2 = 200$ кДж

ЗАДАЧА 3б.

Идеальная тепловая машина работает по циклу Карно. При этом 80% количества теплоты, получаемого от нагревателя, передается холодильнику. Машина получает от нагревателя количество теплоты $Q_1 = 6,28$ кДж. Найти к. п. д. цикла и работу A , совершаемую за один цикл.

Ответ: $\eta = 20\%$, $A = 1,256$ кДж.