

25.11.21.

Тема:

Логарифмические уравнения  
и неравенства.

*Учащиеся должны освоить теоретическую часть, прислать ответы на вопросы и решение задач, содержащиеся в практической части.*

Видео для усвоения материала:

<https://infourok.ru/videouroki/1227>

<https://infourok.ru/videouroki/1228>

## Теоретическая часть:

Прочитать и понять.

Выделенное жирным шрифтом – выучить.

### Логарифмические уравнения

Решить уравнение

$$\log_2 (x + 1) + \log_2 (x + 3) = 3. \quad (1)$$

Предположим, что  $x$  — такое число, при котором равенство (1) является верным, т. е.  $x$  — корень уравнения (1).

Тогда по свойству логарифма верно равенство

$$\log_2 ((x + 1) (x + 3)) = 3. \quad (2)$$

Из этого равенства по определению логарифма получаем

$$(x + 1) (x + 3) = 8, \quad (3)$$

$x^2 + 4x + 3 = 8$ , т. е.  $x^2 + 4x - 5 = 0$ , откуда  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = -5$ .

Так как уравнение (3) является следствием исходного уравнения, то необходима проверка. Проверим, являются ли числа 1 и  $-5$  корнями уравнения (1). Подставляя в левую часть исходного уравнения  $x = 1$ , получаем  $\log_2 (1 + 1) + \log_2 (1 + 3) = \log_2 2 + \log_2 4 = 1 + 2 = 3$ , т. е.  $x = 1$  — корень уравнения (1).

При  $x = -5$  числа  $x + 1$  и  $x + 3$  отрицательны, и поэтому левая часть уравнения (1) не имеет смысла, т. е.  $x = -5$  не является корнем этого уравнения.

**Ответ**

$x = 1$ .  $\triangleleft$

**Замечание.** Решение уравнения (1) можно заменить решением равносильной ему системы

$$\begin{cases} x + 1 > 0, \\ x + 3 > 0, \\ \log_2((x + 1)(x + 3)) = 3. \end{cases}$$

**Задача 2** Решить уравнение  $\log_2(1 - x) = 3 - \log_2(3 - x)$ .

► Перенесём логарифм из правой части в левую:

$$\log_2(1 - x) + \log_2(3 - x) = 3,$$

откуда

$$\begin{aligned} \log_2((1 - x)(3 - x)) &= 3, \\ (1 - x)(3 - x) &= 8. \end{aligned}$$

Решая это уравнение, получаем  $x_1 = 5$ ,  $x_2 = -1$ . Число  $x_1 = 5$  не является корнем исходного уравнения, так как при  $x = 5$  левая и правая части уравнения теряют смысл. Проверка показывает, что число  $x = -1$  является корнем исходного уравнения.

**Ответ**

$x = -1$ .  $\triangleleft$

**Задача 3** Решить уравнение

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg x + \lg(x + 3).$$

► По свойству логарифмов

$$\lg(2x^2 - 4x + 12) = \lg(x^2 + 3x),$$

откуда (по теореме § 18)  $2x^2 - 4x + 12 = x^2 + 3x$ ,  $x^2 - 7x + 12 = 0$ ,  $x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ . Проверка показывает, что оба значения  $x$  являются корнями исходного уравнения.

**Ответ**

$x_1 = 3$ ,  $x_2 = 4$ .  $\triangleleft$

**Задача 4** Решить уравнение  $\log_7(3x + 4) = \log_7(5x + 8)$ .

► Приравняв выражения, стоящие под знаком логарифма, получаем  $3x + 4 = 5x + 8$ , откуда  $x = -2$ . левая и правая части исходного уравнения не имеют смысла.

**Ответ**

Корней нет.  $\triangleleft$

## Логарифмические неравенства

При изучении логарифмической функции рассматривались неравенства вида  $\log_a x < b$  и  $\log_a x \geq b$ . Приведём примеры решения более сложных логарифмических неравенств. Обычный способ реше-

ния таких неравенств заключается в переходе от них к более простому неравенству или системе неравенств, имеющей то же самое множество решений, т. е. к равносильному неравенству или к равносильной системе неравенств.

**Задача 1** Решить неравенство

$$\lg(x + 1) \leq 2. \quad (1)$$

- ▶ Правая часть данного неравенства имеет смысл при всех значениях  $x$ , а левая часть — при  $x + 1 > 0$ , откуда  $x > -1$ , т. е.  $x > -1$  — область определения неравенства (1).

Исходное неравенство запишем так:

$$\lg(x + 1) \leq \lg 100. \quad (2)$$

Так как  $10 > 1$ , то  $x + 1 \leq 100$ , откуда  $x \leq 99$ . Учитывая область определения исходного неравенства, получаем  $-1 < x \leq 99$ . ◀

**Задача 2** Решить неравенство

$$\log_2(x - 3) + \log_2(x - 2) \leq 1. \quad (3)$$

- ▶ Логарифмическая функция определена при положительных значениях аргумента, поэтому левая часть неравенства имеет смысл при  $x - 3 > 0$  и  $x - 2 > 0$ .

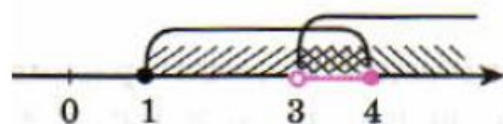
Следовательно, областью определения этого неравенства является промежуток  $(3; +\infty)$ . По свойствам логарифма неравенство (3) при  $x > 3$  равносильно неравенству

$$\log_2(x - 3)(x - 2) \leq \log_2 2. \quad (4)$$

Логарифмическая функция с основанием 2 возрастающая. Поэтому при  $x > 3$  неравенство (4) выполняется, если  $(x - 3)(x - 2) \leq 2$ .

Таким образом, исходное неравенство (3) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} (x - 3)(x - 2) \leq 2, \\ x > 3. \end{cases}$$



Решая первое неравенство этой системы, получаем  $x^2 - 5x + 4 \leq 0$ , откуда  $1 \leq x \leq 4$ . Совмещая отрезок  $[1; 4]$  с промежутком  $(3; +\infty)$ , получаем  $3 < x \leq 4$  (рис. 43).  $\triangleleft$

Практическая часть.

Решить уравнение

337

1)  $\log_2 (x - 5) + \log_2 (x + 2) = 3;$

2)  $\log_3 (x - 2) + \log_3 (x + 6) = 2;$

3)  $\lg (x + \sqrt{3}) + \lg (x - \sqrt{3}) = 0;$

338

1)  $\lg (x - 1) - \lg (2x - 11) = \lg 2;$

2)  $\lg (3x - 1) - \lg (x + 5) = \lg 5;$

339

1)  $\frac{1}{2} \lg (x^2 + x - 5) = \lg (5x) + \lg \frac{1}{5x};$

Решить неравенство

355

1)  $\log_3 (x + 2) < 3;$

2)  $\log_8 (4 - 2x) \geq 2;$

356

1)  $\lg x > \lg 8 + 1;$

2)  $\lg x > 2 - \lg 4;$