Никакой достоверности нет в том,

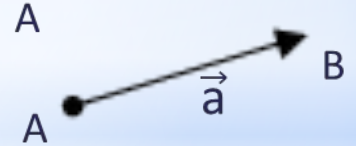
что не имеет связи с математикой

Леонардо да Винчи

РАЗДЕЛ 3. Элементы векторной алгебры

Если для характеристики величины помимо численного значения необходимо указывать направление её изменения, то она называется векторной величиной.

Векторные величины геометрически изображаются направленными отрезками, которые называются векторами. Вектор с началом в точке A концом в точке B обозначается $\overrightarrow{AB}$ или $\vec{a}$.



Вектор $\vec{a}$, имеющий длину (**модуль вектора** $|\vec{a}|$), равную единице, называется **ортом.** Вектор длины 0, не имеющий направления, называется **нулевым вектором** и обозначается $\vec{0}$.

Коллинеарными векторами называются векторы, принадлежащие одной прямой или параллельным прямым.

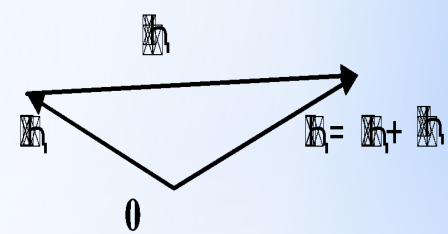
К**омпланарными векторами** называются векторы, лежащие в одной плоскости или в параллельных плоскостях.

Линейные операции над векторами.

Произведением вектора $\vec{a} \neq$о на число $\alpha \neq 0$ называется вектор $\vec{b}$, удовлетворяющий условиям

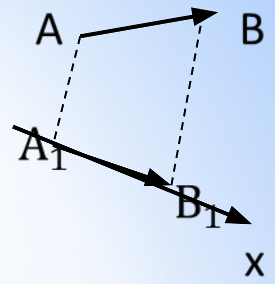
1) $\vec{b}$ коллинеарен $\vec{a}$;
2) $|\vec{b}|=\alpha\,|\vec{a}|$;
3) при $\alpha>0$ вектор $\vec{b}$ направлен одинаково (сонаправлен) с вектором $\vec{a}$;
4) при $\alpha < 0$ вектор $\vec{b}$ направлен противоположно вектору $\vec{a}$.

Суммой двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется вектор $\vec{c}$, который идет из начала вектора $\vec{a}$ в конец вектора $\vec{b}$ (при условии, что вектор $\vec{b}$ приложен к концу вектора $\vec{a}$)



Разностью двух векторов и называется такой вектор $\vec{d}$, который в сумме с вектором даёт вектор $\vec{a}$: $\vec{d}=\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-1)\cdot\vec{b}$.

Так как нулевые векторы геометрически изображаются одной точкой, то операции с векторами не должны противоречить аналогичным действиям со скалярными величинами.



Геометрической проекцией вектора на ось называется вектор , ограниченный проекциями A1 и B1 точек начала A и конца B на эту ось: $\overrightarrow{A_1B_1} = \text{пр.}_{\overrightarrow{ox}}\overrightarrow{AB}$

Координатами вектора называются коэффициенты пропорциональности, связывающие единичные векторы на координатных осях (***базисные орты***) с геометрическими проекциями вектора на эти оси**.**

Длина вектора $\overline{AB} = \vec{a}$ обозначается $\left|\overline{AB}\right|$ = и вычисляется как расстояние между точками.

В R^3 для точек $A(x_A, y_A, z_A)$ и $B(x_B, y_B, z_B)$ и вектора

$$\overrightarrow{AB} = \vec{a} = (x_a; y_a; z_a) == (x_B - x_A;\ \ y_B - y_A;\ \ z_B - z_A)$$

имеем

$$\left|\overline{AB}\right| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2} =$$

$$= |\vec{a}| = \sqrt{{x_a}^2 + {y_a}^2 + {z_a}^2}$$

В векторной алгебре при выполнении многих операций с вектором работают как с матрицей – строкой или матрицей – столбцом из его координат, количество которых равно размерности пространства моделирования

Если $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$, $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$, λ – число, то

1. $\lambda \cdot \vec{a} = (\lambda x_a;\ \lambda y_a;\ \lambda z_a)$, $|\lambda \cdot \vec{a}| = |\lambda| \cdot \overrightarrow{|a|}$

2. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{c} = (x_a + x_b;\ y_a + y_b;\ z_a + z_b)$.

3. $\vec{a} - \vec{b} = \vec{c} = (x_a - x_b;\ y_a - y_b;\ z_a - z_b)$

Условие параллельности (коллинеарности) двух векторов
$\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ и $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$

при $x_b \neq 0$, $y_b \neq 0$, $z_b \neq 0$

$$\frac{x_a}{x_b} = \frac{y_a}{y_b} = \frac{z_a}{z_b} = \lambda$$

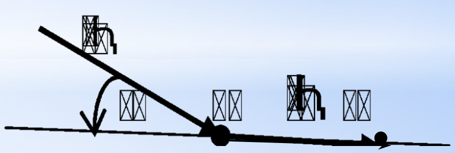
следует из равенства $\vec{a} = \lambda \cdot \vec{b}$.

Скалярное произведение векторов

- Скалярным произведением векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ называется число с (скаляр), равное произведению их модулей на косинус угла φ, образованного при вращении вектора $\vec{a}$ до направления вектора $\vec{b}$ против часовой стрелки

$$\left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}|\left|\vec{b}\right| \cos\varphi = c.$$

- ПРИМЕР . Пусть материальная точка прямолинейно движется под действием постоянной силы $\vec{F}$. Работа силы по перемещению точки из положения M в положение N численно равна скалярному



Свойства скалярного произведения

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$,

2. Два ненулевых вектора и ортогональны тогда и только тогда, когда их скалярное *произведение равно нулю:* $(\vec{a}, \vec{b}) = 0 \quad <=> \quad \vec{a} \perp \vec{b}$.

3. $(\vec{a}, \vec{a}) = \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2 = \vec{a}^2$ - скалярный квадрат вектора $\vec{a}$,

4. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$,

5. $\lambda(\vec{a}, \vec{b}) = (\overrightarrow{\lambda a}, \vec{b}) = (\vec{a}, \overrightarrow{\lambda b})$, $\lambda -$ число.

Скалярные произведения базисных ортов $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ в R^3:

$\vec{i}^2 = \vec{j}^2 = \vec{k}^2 = 1, \quad \vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{j} = 0.$

Скалярное произведение векторов $\vec{a} = (x_a; y_a; z_a)$ *и* $\vec{b} = (x_b; y_b; z_b)$

$$(\vec{a}, \vec{b}) = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

Косинусы углов α, β, γ между вектором $\vec{a} = (x_a;\ y_a; z_a)$ и осями координат (ортами $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$) называются **направляющими косинусами** вектора $\vec{a}$.
Направляющие косинусы являются координатами единичного вектора

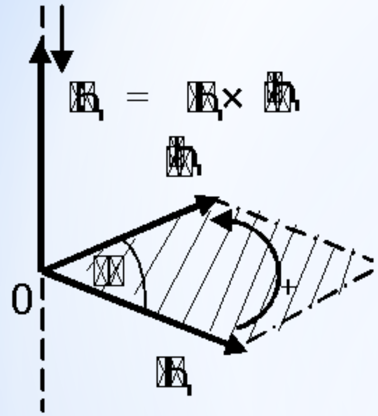
$$\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma), \qquad \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1.$$

Угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ определяется из соотношения

$$\cos\varphi = \frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b.}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2}\,\sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Векторное и смешанное произведения векторов

Векторным произведением двух неколлинеарных векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$ называется такой вектор $\bar{c} = [\bar{a}, \bar{b}] = \bar{a} \times \bar{b}$, что если начала векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ поместить в одну точку O, то



1) вектор $\bar{c}$ ортогонален векторам $\bar{a}$ и $\bar{b}$ ($\bar{c}$ лежит на перпендикуляре к плоскости векторов $\bar{a}$ и $\bar{b}$);

2) векторы $\bar{a}, \bar{b}, \bar{c}$ образуют *правую тройку векторов* (вектор $\bar{c}$ ориентирован так, что со стороны его конца кратчайший поворот от вектора $\bar{a}$ к вектору $\bar{b}$ наблюдается против часовой стрелки);

3) длина вектора $\bar{c}$ численно равна площади S параллелограмма, построенного на векторах $\bar{a}$ и $\bar{b}$.

$S = |\bar{a} \times \bar{b}|$

=> $|\bar{c}| = |\bar{a}| \cdot |\bar{b}| \cdot \sin\varphi$,

где φ – угол между векторами $\bar{a}$ и $\bar{b}$. Понятие векторного произведения имеет смысл только в пространстве R^3.

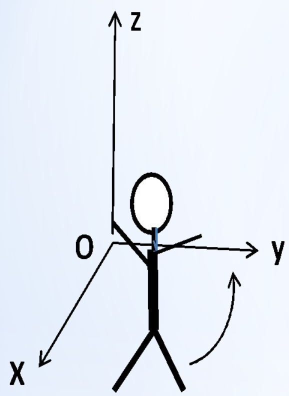
Правая тройка векторов

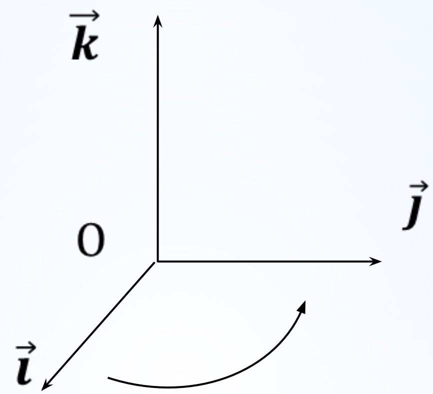
Направление обхода - против часовой стрелки

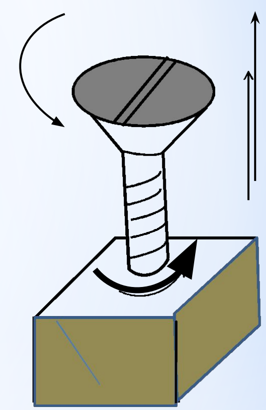
Базисные орты

$$|\vec{i}| = |\vec{j}| = |\vec{k}| = 1$$

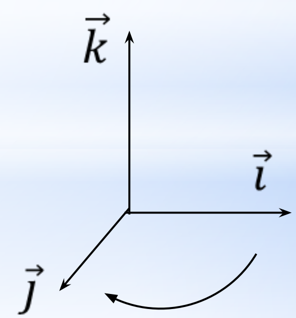
Правило буравчика (правило правого винта)



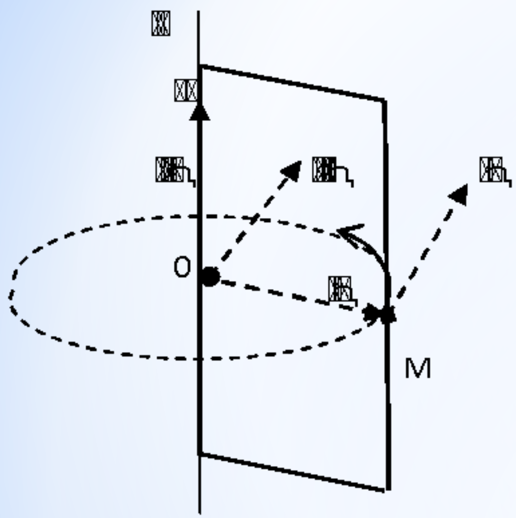




* *Левая тройка векторов* = >



ПРИМЕР . Пусть твёрдое тело в форме прямоугольника вращается с угловой скоростью [illegible] вокруг неподвижной оси [illegible] проходящей через одну из его сторон.



Линейная скорость вращения [illegible] точки [illegible] на поверхности тела определяется как векторное произведение угловой скорости [illegible] = [illegible] на радиус-вектор [illegible] = [illegible] точки M:

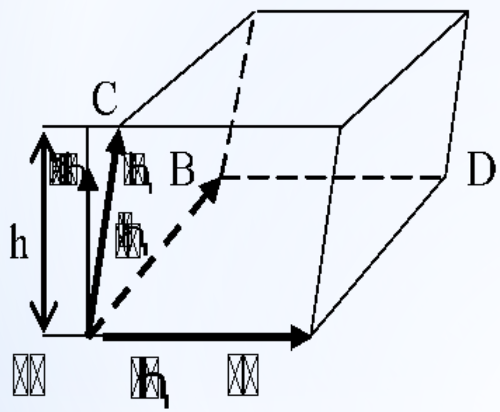
[illegible] = [illegible] × [illegible]

Свойства векторного произведения

1. При перестановке сомножителей векторное произведение меняет знак: [illegible] = − [illegible];
2. Два ненулевых вектора $\bar{a}$ и $\bar{b}$ коллинеарны тогда и только тогда, когда их векторное *произведение равно нулевому вектору:* [illegible] = [illegible] < = > [illegible] || [illegible].
3. [illegible] = [illegible] × [illegible] = [illegible]
4. [illegible] + [illegible] × [illegible] = [illegible] × [illegible] + [illegible] × [illegible]
5. [illegible] = [illegible] = [illegible], [illegible] − число,

Смешанным произведением трех векторов $\bar{a}$, $\bar{b}$ и $\bar{c}$ называется число [illegible] равное скалярному произведению вектора [illegible] на вектор [illegible] $\times$ [illegible] т. е. [illegible] = [illegible]

Объём параллелепипеда, построенного на трёх некомпланарных векторах [illegible], [illegible], [illegible] равен абсолютной величине - модулю смешанного произведения [illegible]



[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible]

[illegible] = [illegible]

Свойства смешанного произведения

1. [illegible] = [illegible] = [illegible]

2. При перестановке двух рядом стоящих сомножителей смешанное произведение меняет знак:

$$[illegible] = - [illegible] = [illegible] = - [illegible] = [illegible] = - [illegible]$$