Математика

Треугольник Паскаля

							1							
						1		1						
					1		2		1					
				1		3		3		1				
			1		4		6		4		1			
		1		5		10		10		5		1		
	1		6		15		20		15		6		1	
1		7		21		35		35		21		7		1

…

В каждой строке этой схемы коэффициенты, кроме первого и последнего, получаются попарным сложением ближайших коэффициентов предыдущей строки.

Посмотрите расписание экзаменов

Дни недели	С-21-1	С-21-2	ТМ-21-1	ТМ-21-2	ТМП-21-1	БД-21-1	ВЕБ-21-2	ВЕБ-21-2	ВЕБ-21-3	ИС-21-1	ИС-21-2
Среда 22.12.2021											
Четверг 23.12.2021	**Математика** Преподаватель Сыровая И.С. время 8.30, ауд.322		**Математика** Преподаватель Дурнова Л.Г. время 8.30, ауд.324								**Математика** Преподаватель Максимова Р.П. время 8.30, ауд.313
Пятница 24.12.2021		**Математика** Преподаватель Сыровая И.С. время 8.30, ауд.322		**Математика** Преподаватель Дурнова Л.Г. время 8.30, ауд.324							
Суббота 25.12.2021					**Математика** Преподаватель Сыровая И.С. время 8.30, ауд.322				**Математика** Преподаватель Дурнова Л.Г. время 8.30, ауд.324		
Понедельник 27.12.2021							**Математика** Преподаватель Копылова К.Н. время 8.30, ауд. 326	**Математика** Преподаватель Максимова Р.П. время 8.30, ауд. 313			
Вторник 28.12.2021						**Математика** Преподаватель Копылова К.Н. время 8.30, ауд. 326				**Математика** Преподаватель Максимова Р.П. время 8.30, ауд.313	

Треугольник Паскаля.

На прошлом уроке мы с вами изучали перестановки и размещения, сегодня мы остановимся на одном из самых замечательных применением формулы перестановок.

Числа C_n^k имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение.

Такая запись называется **треугольником Паскаля**:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & C_0^0=1 & & & & & \\
 & & & & C_1^0=1 & & C_1^1=1 & & & & \\
 & & & C_2^0=1 & & C_2^1=2 & & C_2^2=1 & & & \\
 & & C_3^0=1 & & C_3^1=3 & & C_3^2=3 & & C_3^3=1 & & \\
 & C_4^0=1 & & C_4^1=4 & & C_4^2=6 & & C_4^3=4 & & C_4^4=1 & \\
 & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & & \dots & \dots \\
C_n^0 & & C_n^1 & & \dots & & \dots & & \dots & C_n^{n-1} & C_n^n
\end{array}
$$

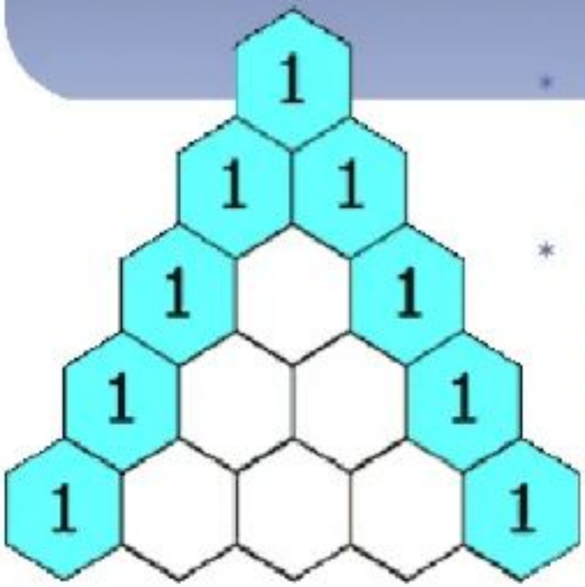
Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля

Цели:

- Познакомиться с понятием треугольника Паскаля;
- Изучить свойства треугольника Паскаля;
- Сформировать умения и навыки решать задачи на треугольник Паскаля.

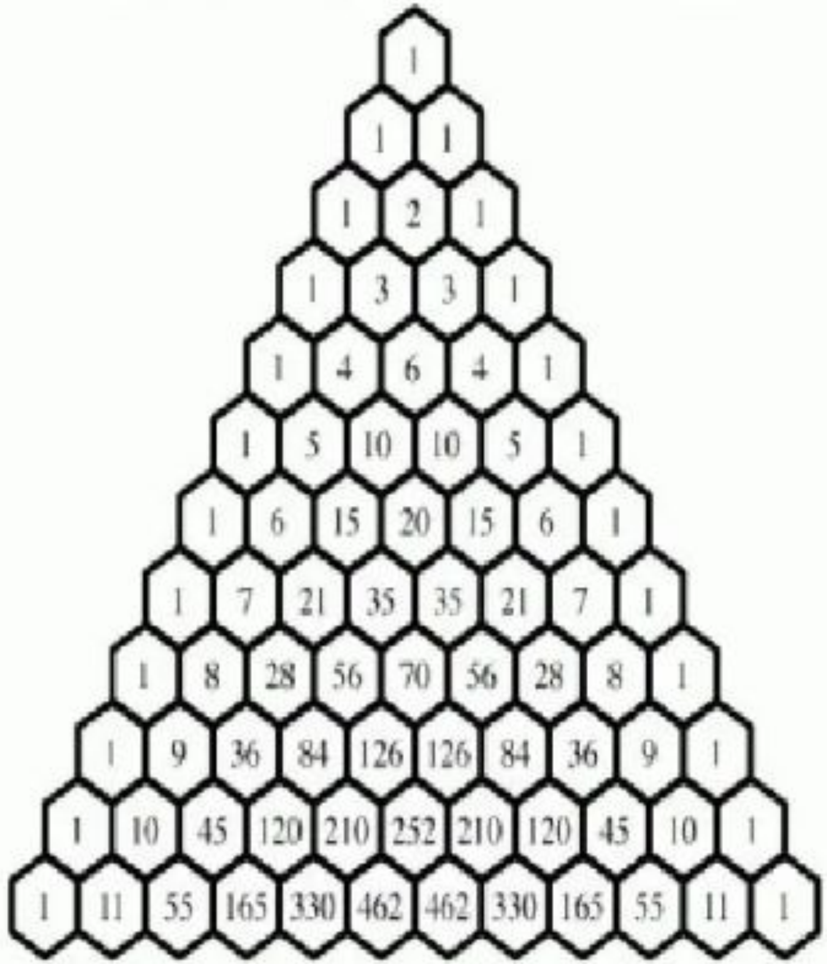
Треугольник Паскаля



* Привычная жизнь Паскаля закончилась. Ухудшается и состояние его здоровья: врачи предписывают уменьшить умственную нагрузку.
* Кавалер де Мере, большой поклонник азартных игр, предложил Паскалю в 1654 году решить некоторые задачи, возникающие при определённых игровых условиях. Первая задача де Мере — о количестве бросков двух игральных костей, после которого вероятность выигрыша превышает вероятность проигрыша, — была решена Паскалем, Ферма и Робервалем. В ходе решения второй, гораздо более сложной задачи, в переписке Паскаля с Ферма, закладываются основы теории вероятностей. Учёные, решая задачу о распределении ставок между игроками при прерванной серии, использовали каждый свой аналитический метод подсчёта вероятностей и пришли к одинаковому результату. Паскаль создаёт «Трактат об арифметическом треугольнике» (издан в 1665 году), где исследует свойства «треугольника Паскаля» и его

Что такое треугольник Паскаля?

- треугольная числовая таблиц
для составления биномиальны
коэффициентов;
- таблица чисел, являющихся биномиальными коэффициентами;
- бесконечная таблица
биномиальных коэффициенто
имеющая треугольную форму
- числовая таблица, с помощью
которой можно решать ряд вычислительных задач;



Треугольник Паскаля

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

$(a+b)^0 = 1$

$(a+b)^1 = 1a + 1b$

$(a+b)^2 = 1a^2 + 2ab + 1b^2$

$(a+b)^3 = 1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$

$(a+b)^4 = 1a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 1b^4$

$(a+b)^5$ 1 5 10 10 5 1

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ.

$(a+b)^0$	$=$	1	0							1						
$(a+b)^1$	$=$	$a+b$	1						1		1					
$(a+b)^2$	$=$	$a^2+2ab+b^2$	2					1		2		1				
$(a+b)^3$	$=$	$a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$	3				1		3		3		1			
$(a+b)^4$	$=$	$a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4$	4			1		4		6		4		1		
$(a+b)^5$	$=$	$\dots$	5		1		5		10		10		5		1	
$(a+b)^6$	$=$	$\dots$	6	1		6		15		20		15		6		1

$C_{n+1}^{k+1} = C_n^{k+1} + C_n^k.$, например $C_3^0 = 1, \quad C_5^2 = 10, \quad C_4^2 = 6.$

«В мире ОТКРЫТИЙ: Треугольник Паскаля»

$(a+в)^2 = a^2 + 2aв + в^2$

$(a-в)^2 = a^2 - 2aв + в^2$

$(a+в)^3 =$
$a^3+3a^2в+3aв^2+в^3$

$(a-в)^3 =$
$a^3-3a^2в+3aв^2-в^3$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1

$(a+в)^4 = a^4 + 4a^3в + 6a^2в^2 + 4aв^3 + в^4$

$(a-в)^5 = a^5-5a^4в+10a^3в^2-10a^2в^3+5aв^4-в^5$

Треугольник Паскаля

Треугольник Паскаля	Номер строки	Возведение в степень двучлена
1	0	$(a+b)^0 = 1$
1 1	1	$(a+b)^1 = a + b$
1 2 1	2	$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
1 3 3 1	3	$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3b^2a + b^3$
1 4 6 4 1	4	$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
1 5 10 10 5 1	5	$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$
1 6 15 20 15 6 1	6	и т. д.

Pascal's Triangle and the Binomial Theorem

$(x + y)^n, n \in \mathrm{N}$

$$(x + y)^0 = 1$$

$$(x + y)^1 = 1x + 1y$$

$$(x + y)^2 = 1x^2 + 2xy + 1y^2$$

$$(x + y)^3 = 1x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + 1y^3$$

$$(x + y)^4 = 1x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + 1y^4$$

$$(x + y)^5 = 1x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + 1y^5$$

$$(x + y)^6 = 1x^6 + 6x^5y^1 + 15x^4y^2 + 20x^3y^3 + 15x^2y^4 + 6xy^5 + 1y^6$$

What is the relationship between the value of *n* and the number of terms in the expansion?

Треугольник Паскаля

Для чисел C_n^k имеется красивый и удобный способ их записи в виде *треугольной таблицы* — ее называют *треугольником Паскаля*. Приведем эту таблицу:

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & & \\
 & & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & & \\
 & & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & & \\
 & C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 & \\
C_5^0 & & C_5^1 & & C_5^2 & & C_5^3 & & C_5^4 & & C_5^5 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\multicolumn{11}{c}{\dots\dots\dots\dots\dots\dots}
\end{array}
$$

Основная закономерность образования строк состоит в следующем: *каждое число в треугольнике Паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ним в предыдущей строке* ($5 = 1 + 4$, $10 = 4 + 6$; $6 = 3 + 3$ и т. д.). В общем виде (в виде формулы) это свойство записывается так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Цыбикова Тамара Раднажаповна,
учитель математики

Треугольник Паскаля компьютер перевёл на язык цвета.

Б. Паскаль.

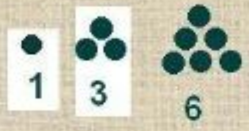
Свойства треугольника

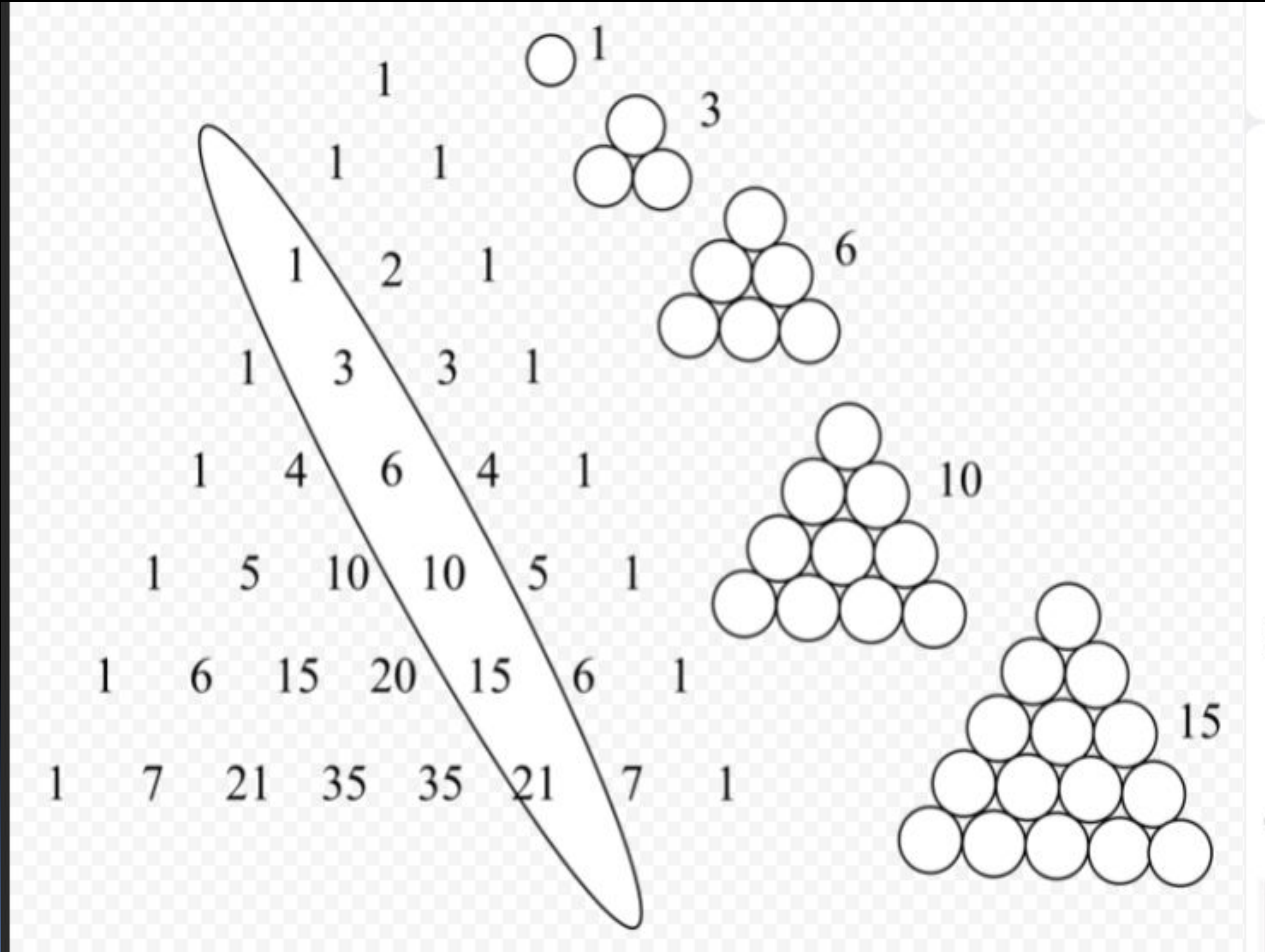
Первая диагональ треугольника Паскаля - это натуральные числа, идущие по порядку.

Вторая диагональ треугольника Паскаля - это «треугольные» числа.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1




1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1
3
6
10
15

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

1 9 36 84 126 126 84 36 9 1

1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Свойства треугольника

В каждой строке треугольника Паскаля сумма чисел на нечётных местах равна сумме чисел на чётных местах.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

1+15+15+1 = 6+20+6

Если номер строки треугольника Паскаля – простое число, то все числа этой строки, кроме 1, делятся на это число.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1

n=5 5, 10, 10, 5 делятся на 5

n=7 7, 21, 35, 35,21,7 делятся на 7

Треугольник Паскаля

n = 0,1,2…
Номер строки

m = 0,1,2…
Номер элемента в строке

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1

Треугольник Паскаля.

Числа имеют очень красивую и знаменитую запись, которая имеет большое значение.

Такая запись называется треугольником Паскаля:

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \quad C_1^1 = 1$$

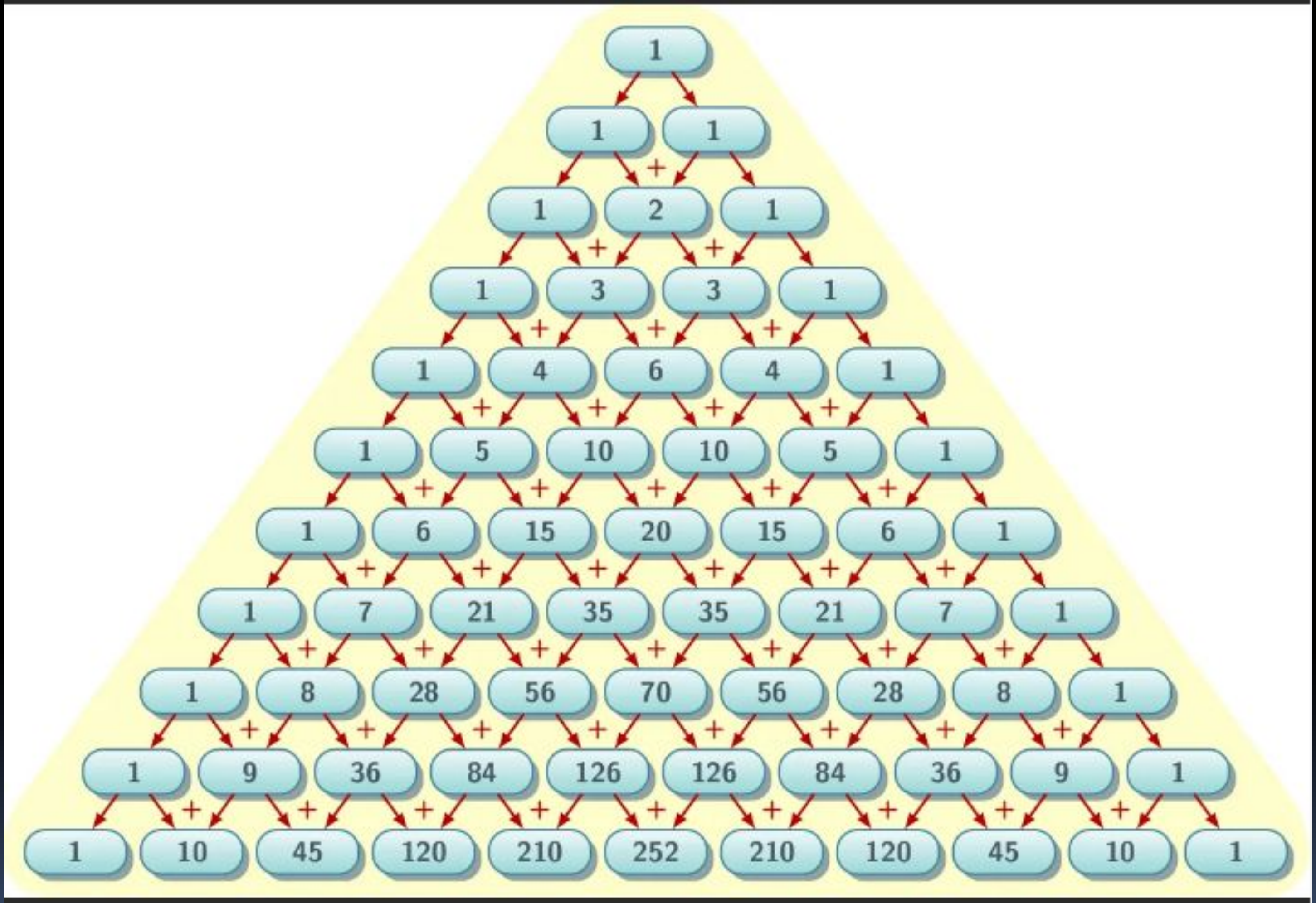
$$C_2^0 = 1 \quad C_2^1 = 2 \quad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \quad C_3^1 = 3 \quad C_3^2 = 3 \quad C_3^3 = 1$$

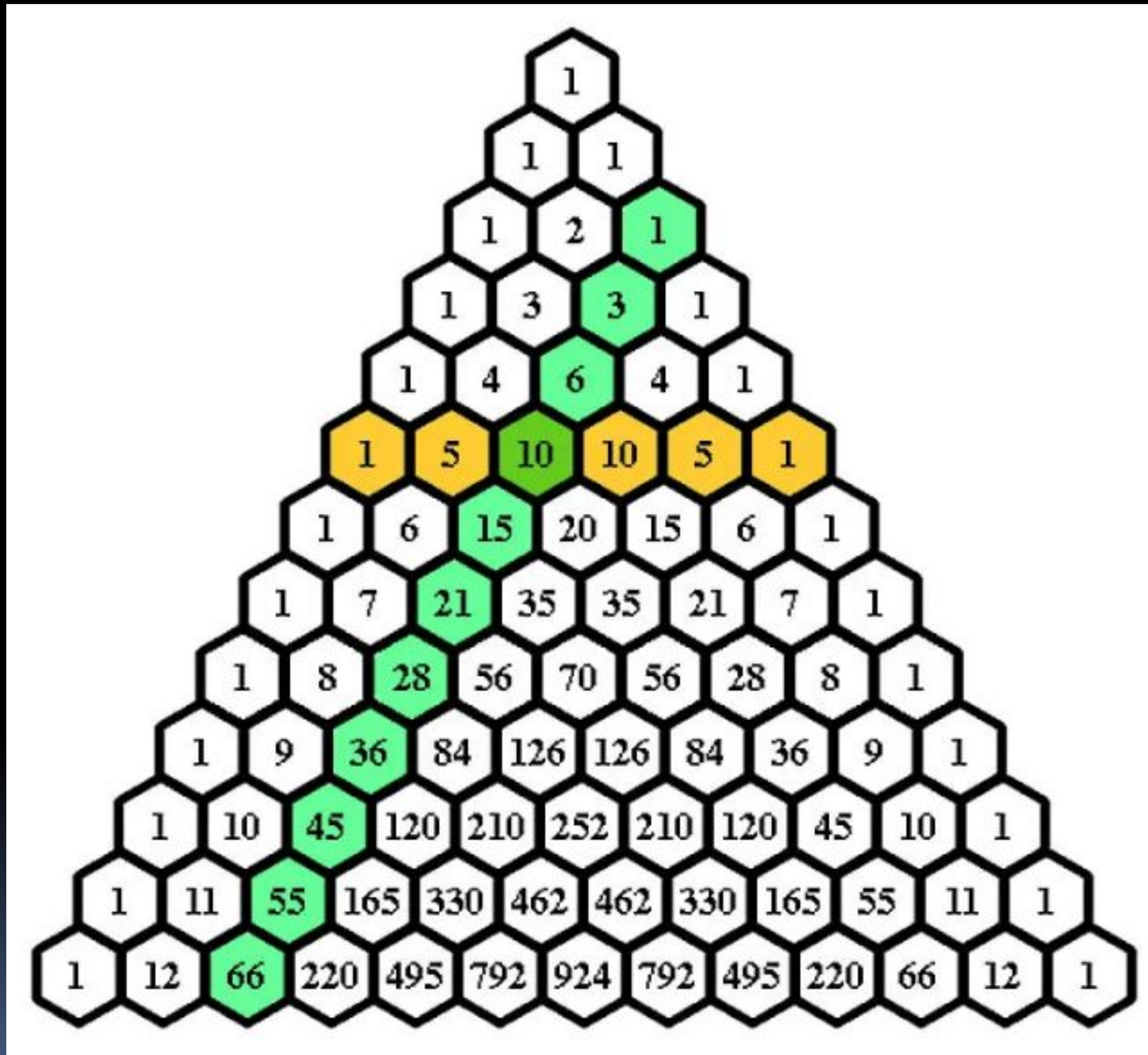
$$C_4^0 = 1 \quad C_4^1 = 4 \quad C_4^2 = 6 \quad C_4^3 = 4 \quad C_4^4 = 1$$

$$\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots$$

$$C_n^0 \quad C_n^1 \quad \dots \quad \dots \quad \dots \quad C_n^{n-1} \quad C_n^n$$



1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

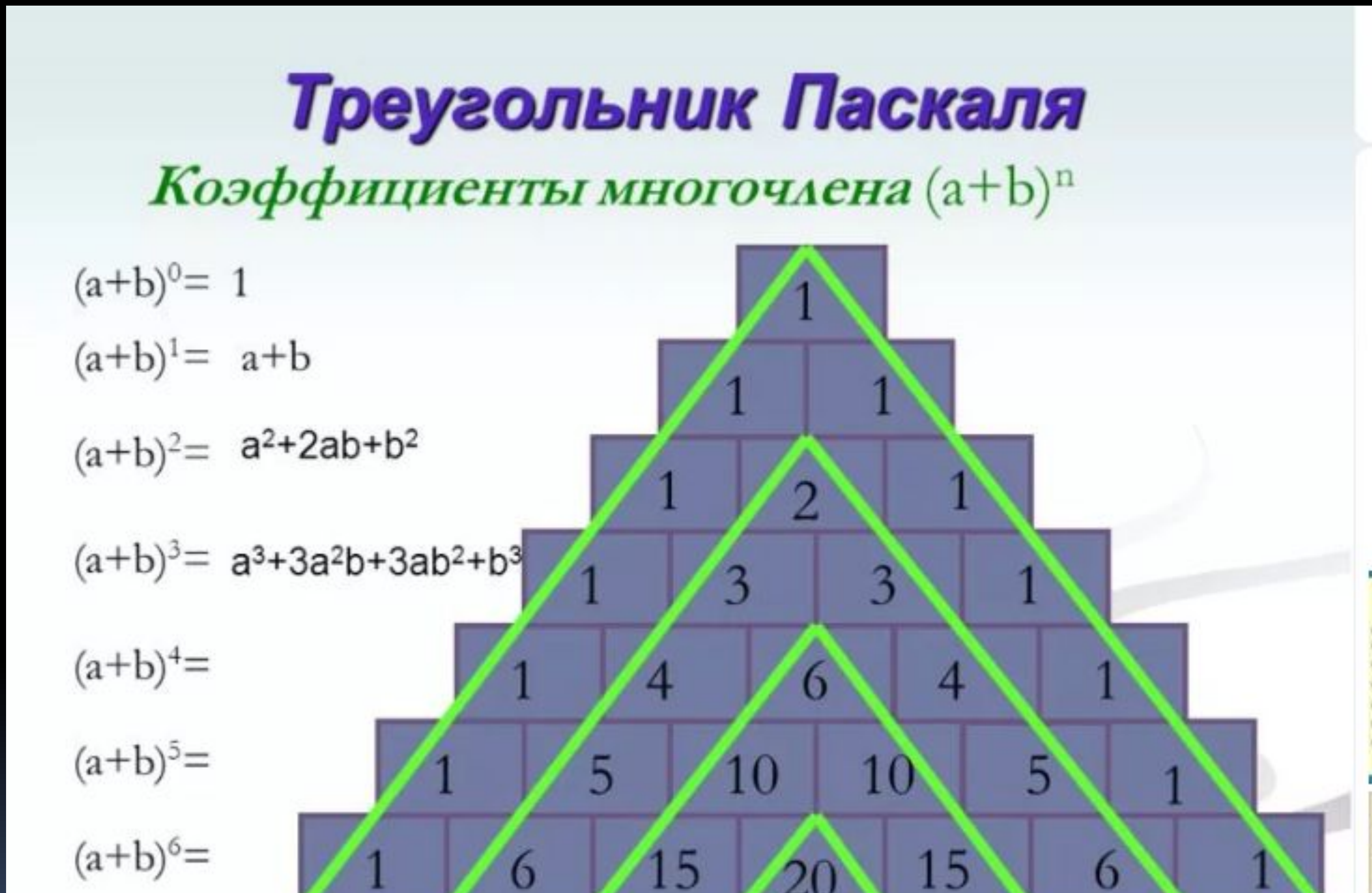
Треугольник Паскаля

								1								
							1		1							
						1		2		1						
					1		3		3		1					
				1		4		6		4		1				
			1		5		10		10		5		1			
		1		6		15		20		15		6		1		
	1		7		21		35		35		21		7		1	
1		8		28		56		70		56		28		8		1

....

$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$

$$(a+b)^7 = a^7 + 7a^6b + 21a^5b^2 + 35a^4b^3 + 35a^3b^4 + 21a^2b^5 + 7ab^6 + b^7$$


Треугольник Паскаля
Коэффициенты многочлена (a+b)^n
(a+b)^0= 1
(a+b)^1= a+b
(a+b)^2= a^2+2ab+b^2
(a+b)^3= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3
(a+b)^4=
(a+b)^5=
(a+b)^6=
1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ

$$C_0^0 = 1$$

$$C_1^0 = 1 \qquad C_1^1 = 1$$

$$C_2^0 = 1 \qquad C_2^1 = 2 \qquad C_2^2 = 1$$

$$C_3^0 = 1 \qquad C_3^1 = 3 \qquad C_3^2 = 3 \qquad C_3^3 = 1$$

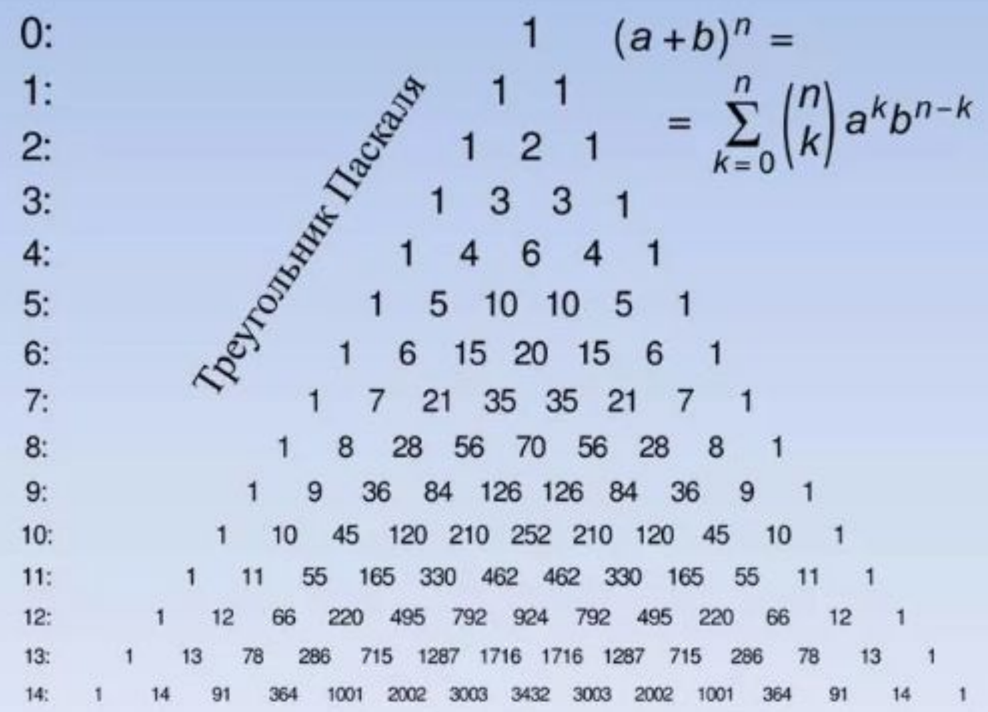
$$C_4^0 = 1 \qquad C_4^1 = 4 \qquad C_4^2 = 6 \qquad C_4^3 = 4 \qquad C_4^4 = 1$$

$$\dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots$$

$$C_n^0 \qquad C_n^1 \qquad \dots \qquad \dots \qquad \dots \qquad C_n^{n-1} \qquad C_n^n$$

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Назвали треугольник так, т.к. это был самый четко сформулированный треугольник.



Треугольник Паскаля.

1							
1	1						
1	2	1					
1	3	3	1				
1	4	6	4	1			
1	5	10	10	5	1		
1	6	15	20	15	6	1	
1	7	21	35	35	21	7	1

Правило записи треугольника легко запомнить:

Каждое число в треугольнике паскаля равно сумме двух чисел, стоящих над ними в предыдущей строке.

Давайте распишем несколько строк:

Математически свойство подсчета числа сочетаний без повторений можно записать еще вот так:

$$\boxed{C_n^k = C_{n-1}^k + C_{n-1}^{k-1}.}$$

Треугольник Паскаля

$C^2_6 = 15$

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & 1 & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & & 1 & & & & & & \\
 & & & & & 1 & & 2 & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 & & \\
n = 6 & 1 & & 6 & & \mathbf{15} & & 20 & & 15 & & 6 & & 1 & \\
1 & & 7 & & 21 & & 35 & & 35 & & 21 & & 7 & & 1
\end{array}
$$

$m = 2$

Треугольник паскаля. Бином Ньютона

					1	→	$(x+y)^0 = 1$
				1	1	→	$(x+y)^1 = x+y$
			1	2	1	→	$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
		1	3	3	1	→	$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
	1	4	6	4	1	→	$(x+y)^4 = x^4 + 4x^3y + 6x^2y^2 + 4xy^3 + y^4$
1	5	10	10	5	1	→	$(x+y)^5 = x^5 + 5x^4y + 10x^3y^2 + 10x^2y^3 + 5xy^4 + y^5$

Биноминальная формула Ньютона.

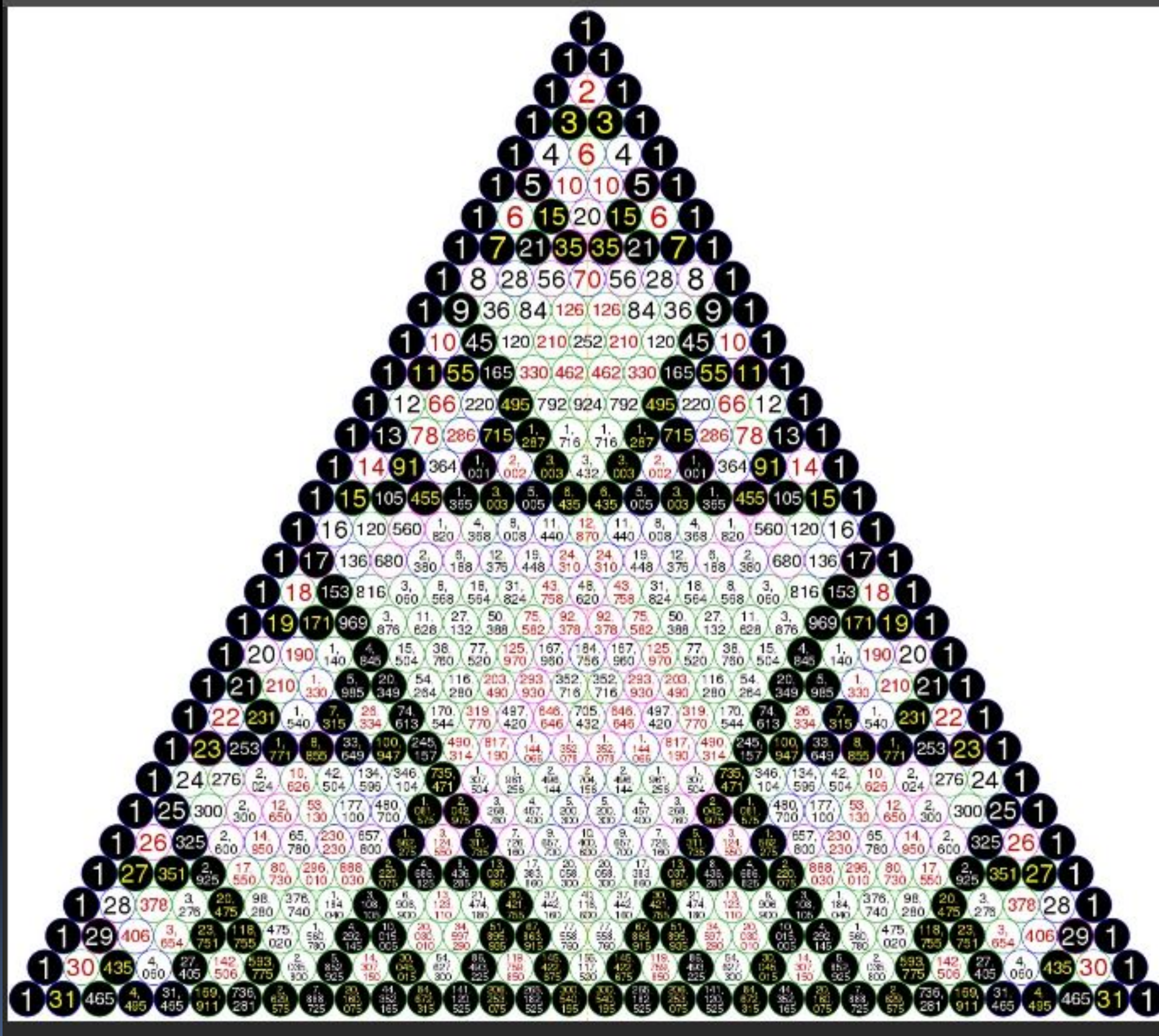
$$(a+b)^m = C_m^0 \cdot a^m + C_m^1 \cdot a^{m-1}b + C_m^2 \cdot a^{m-2}b^2 + \ldots +$$
$$+ C_m^n \cdot a^{m-n}b^n + \ldots + C_m^{m-1} \cdot ab^{m-1} + C_m^m \cdot b^m$$

Треугольник Паскаля

1) $C_n^0 = C_n^n = 1$

3) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$

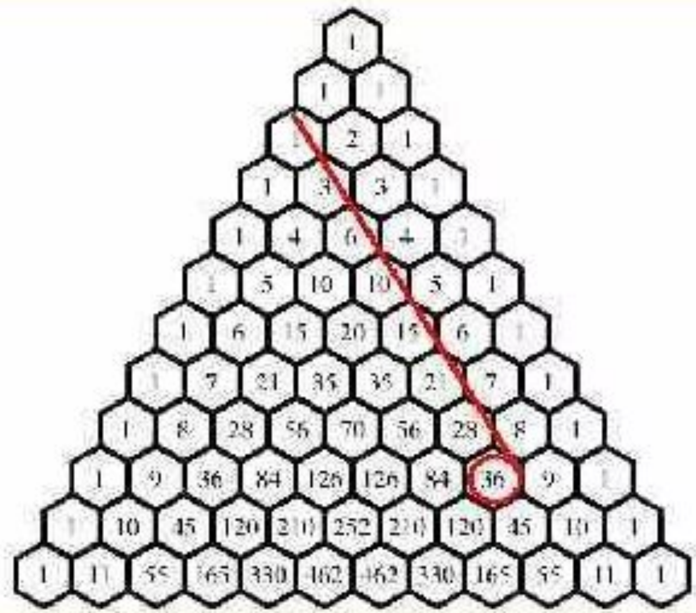
$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & & C_0^0 & & & \\
 & & C_1^0 & & C_1^1 & & \\
 & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & \\
C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 \\
 & & & \vdots\vdots\vdots & & &
\end{array}
$$


1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1
1 7 21 35 35 21 7 1
1 8 28 56 70 56 28 8 1
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1
1 11 55 165 330 462 462 330 165 55 11 1
1 12 66 220 495 792 924 792 495 220 66 12 1

Применение треугольника Паскаля

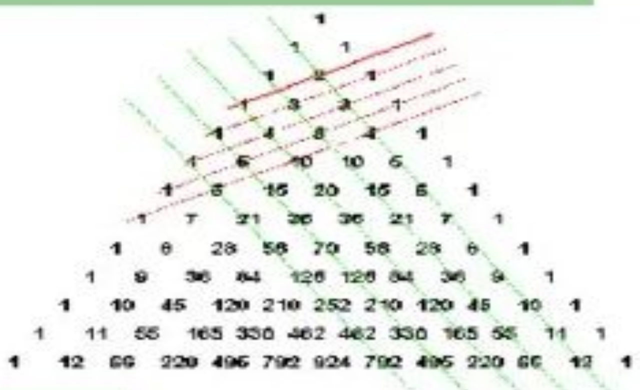
Пусть, например, мы хотим вычислить сумму чисел натурального ряда от 1 до 8. "Спустившись" по диагонали до числа 8, мы увидим слева снизу от него число 36.

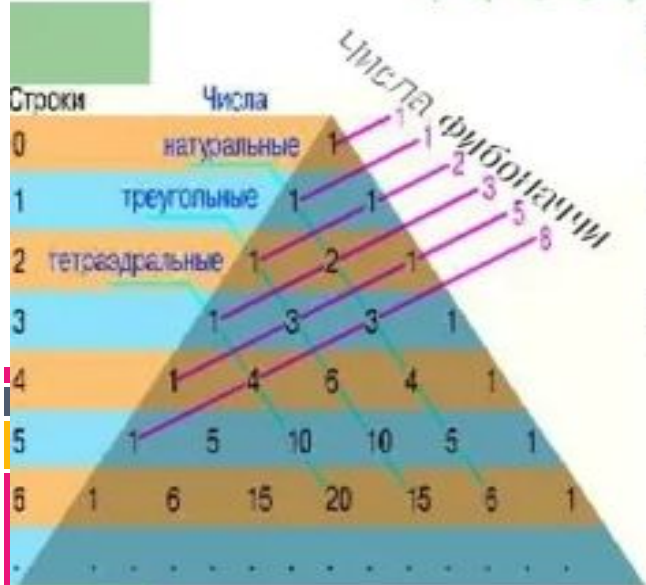
Из него мы и получим конечную сумму.



$$\sum_{n=1}^{9} n=1+2+3+4+5+6+7+8$$

ТРЕУГОЛЬНИК ПАСКАЛЯ





Третье число каждой строки является треугольным.

Треугольные числа 1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45, 55, 66... показывает нам вторая зеленая линия.

Каждый член треугольного ряда чисел равен сумме натурального ряда чисел (55=1+2+3+4+5+6+7+8+9+10).

Этот замечательный ряд, содержит также множество знакомцев, хорошо известных любителям математики:

6 и 28 - совершенные числа,

36 - квадратное число,

21 - число Фибоначчи.

Треугольник Паскаля

- Треугольник Паскаля - эта пирамида, состоящая из чисел, каждое из которых равно суме пары чисел расположенных над ним. Такой треугольник позволяет точно рассчитать вероятность выпадения в игре «орел-решка». Если мы подбрасываем монетку один раз, то результат вероятности мы видим во второй горизонтальной строке - одно выпадение «решка» и одно «Орел» (50/50). Также можно рассматривать варианты 2, 3, 4 бросков и т.д.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . .

Задачи с использованием треугольника Паскаля

Задача 1.

В магазине «Филателия» продается 8 различных наборов марок, посвященных спортивной тематике. Сколькими способами можно выбрать из них 3 набора?

1

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

1 8 28 56 70 56 28 8 1

. . . .

В классе 7 человек хорошо бегают, из них нужно выбрать 2 на соревнования. Скольким способами это можно сделать?

2-я диагональ

1 1

1 2 1

1 3 3 1

1 4 6 4 1

1 5 10 10 5 1

1 6 15 20 15 6 1

1 7 21 35 35 21 7 1

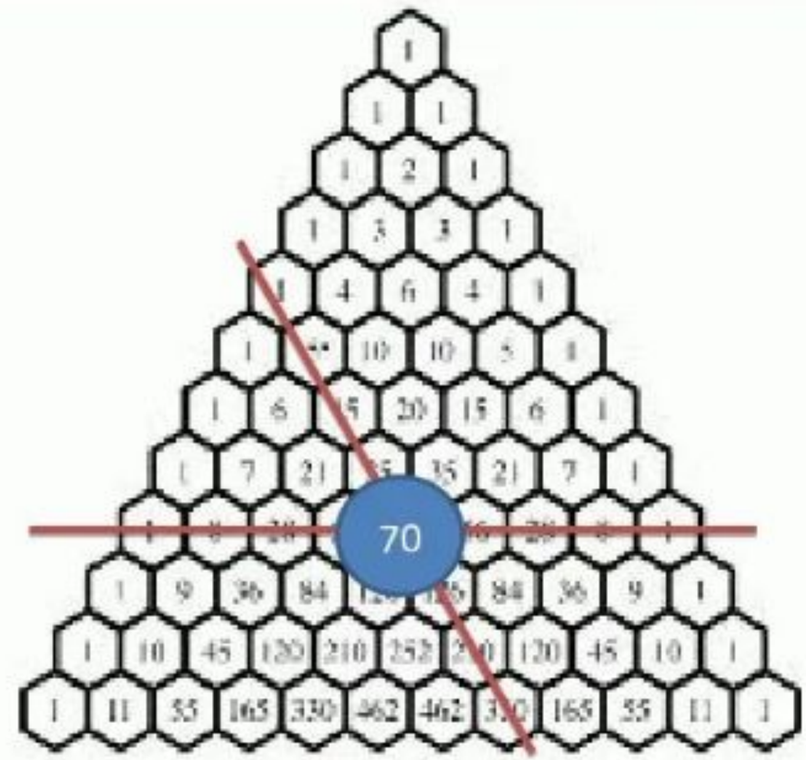
...

ответ

7-я строка

Задача № 2 (комбинаторная)

- Сколькими способами можно приготовить салат из 4 фруктов, если мы имеем 8 наименований фруктов?



- Ответ: 70 способов

ПРИМЕНЕНИЕ

Предположим , что некий шейх, следуя законам гостеприимства, решает отдать вам трех из семи своих жен. **Сколько различных выборов вы можете сделать среди прекрасных обитательниц гарема**? Для ответа на этот волнующий вопрос необходимо лишь найти число, стоящее на пересечении диагонали 3 и строки 7: оно оказывается равным 35.

Если, охваченные радостным волнением, вы перепутаете номера диагонали и строки и будете искать число, стоящее на пересечении диагонали 7 со строкой 3, то обнаружите, что они не пересекаются. То есть сам метод не дает вам ошибиться!