Множественный регрессионный анализ

Обозначения: y - отклик $\quad y=\varphi(x_1,x_2,...,x_k)$

$x_1,x_2,...,x_k$ - факторы $\qquad$ - модель

$$y_{набл}=\varphi(x_1,x_2,...,x_k)+\varepsilon$$

МНК – метод наименьших квадратов

$$\boxed{\sum(y_{набл}-y_{мод})^2\to\min}$$

Требования:

1) $M(\varepsilon_i)=0$ $\qquad$ 3) $M(\varepsilon_i\varepsilon_j)=0$ $\qquad$ $i\neq j$

2) $D(\varepsilon_i)=\sigma_\varepsilon{}^2$ $\qquad$ 4) $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma_\varepsilon)$ $\qquad$ $i=\overline{1,n}$

Множественная линейная регрессия

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

- линейная модель

y_i - i-ое наблюдаемое значение отклика

$x_{i1}, x_{i2}, \ldots, x_{ik}$ - i-ые наблюдаемые значения факторов

$$i = \overline{1, n}$$

$$y_i = b_0 + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_k x_{ik} + \varepsilon_i$$

МНК: $\sum \varepsilon_i^2 \to \min$

Множественная линейная регрессия

Модель: $y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$

$x_0 \equiv 1 \Rightarrow \quad y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$

Наблюдения:

$$y_i = b_0 x_{i0} + b_1 x_{i1} + b_2 x_{i2} + \ldots + b_k x_{ik} + \varepsilon_i \qquad i = \overline{1, n}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_{10} & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ x_{20} & x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{n0} & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix} \quad \varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \ldots \\ \varepsilon_n \end{pmatrix}$$

$$(n \times 1) \qquad (n \times (k+1)) \qquad ((k+1) \times 1) \qquad (n \times 1)$$

Множественная линейная регрессия

$$y = Xb + \varepsilon$$

МНК: $\sum \varepsilon_i^2 \to \min$

$$Q(b) = \sum \varepsilon_i^2 = \varepsilon^T \cdot \varepsilon =$$

$$\varepsilon^T = (\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \dots \quad \varepsilon_n)^T$$

$$\varepsilon = y - Xb$$

$$= (y - Xb)^T (y - Xb) =$$

$$= \left(y^T - b^T X^T \right)(y - Xb) =$$

$$= y^T y - b^T X^T y - y^T Xb + b^T X^T Xb$$

Множественная линейная регрессия

$$y = Xb + \varepsilon$$

МНК: $\sum \varepsilon_i^2 \to \min$

$$Q(b) = \sum \varepsilon_i^2 = \quad y^T y - b^T X^T y - y^T Xb + b^T X^T Xb$$

$$\nabla_b Q(b) = -X^T y - X^T y + X^T Xb + X^T Xb = 0$$

$$X^T Xb = X^T y \qquad \boxed{\hat{b} = \left(X^T X\right)^{-1} X^T y}$$

$$\nabla_b c = \left(\frac{\partial c}{\partial b_0}, \frac{\partial c}{\partial b_1}, \ldots, \frac{\partial c}{\partial b_k}\right)^T$$

$$\nabla_b \left(b^T A\right) = A \qquad \nabla_b (Ab) = A^T$$

$$\nabla_b \left(b^T Ab\right) = Ab + A^T b$$

Множественная линейная регрессия

$$X^T X b = X^T y$$ - система нормальных уравнений

$$X^T X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1k} & x_{2k} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & x_{11} & \ldots & x_{1k} \\ 1 & x_{21} & \ldots & x_{2k} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_{n1} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix}$$

$$X^T X = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \ldots & \sum x_{ik} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \ldots & \sum x_{i1} x_{ik} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum x_{ik} & \sum x_{i1} x_{ik} & \ldots & \sum x_{ik}^2 \end{pmatrix}$$

Множественная линейная регрессия

$$X^T X b = X^T y \qquad \hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y$$

$$X^T X b = \begin{pmatrix} n & \sum x_{i1} & \ldots & \sum x_{ik} \\ \sum x_{i1} & \sum x_{i1}^2 & \ldots & \sum x_{i1} x_{ik} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \sum x_{ik} & \sum x_{i1} x_{ik} & \ldots & \sum x_{ik}^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \ldots \\ b_k \end{pmatrix}$$

$$X^T Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ x_{11} & x_{21} & \ldots & x_{n1} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ x_{1k} & x_{2k} & \ldots & x_{nk} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \ldots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum y_i \\ \sum x_{i1} y_i \\ \ldots \\ \sum x_{ik} y_i \end{pmatrix}$$

Множественная линейная регрессия

$$X^T X b = X^T y \qquad \hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$\begin{cases} n b_0 + b_1 \sum x_{i1} + b_2 \sum x_{i2} = \sum y_i \\ b_0 \sum x_{i1} + b_1 \sum x_{i1}^2 + b_2 \sum x_{i1} x_{i2} = \sum x_{i1} y_i \\ b_0 \sum x_{i2} + b_1 \sum x_{i1} x_{i2} + b_2 \sum x_{i2}^2 = \sum x_{i2} y_i \end{cases}$$

Интервальные оценки

$$y = Xb + \varepsilon$$

$$\hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y$$

Оценка остаточной дисперсии

$$S_\varepsilon^2 = \frac{Q\left(\hat{b}\right)}{n - (k+1)}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n - (k+1)} \sum_{i=1}^{n} \left(y_i - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{b}_k x_{ik}) \right)^2$$

$$b_i = \hat{b}_i \pm t_{табл} \cdot s_{\hat{b}_i} \qquad s_{\hat{b}_i} = s_\varepsilon \cdot \sqrt{c_{ii}} \qquad i = \overline{1, n}$$

$$t_{табл} = t_{\left(\frac{\alpha}{2};\ n-(k+1) \right)} \qquad C = \left(X^T X \right)^{-1}$$

Множественная линейная регрессия

Адекватность модели

$$\boxed{y = Xb + \varepsilon}$$

Оценка остаточной дисперсии

$$S_\varepsilon^2 = \frac{Q(\hat{b})}{n-(k+1)}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{1}{n-(k+1)}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i - (\hat{b}_0 + \hat{b}_1 x_{i1} + \ldots + \hat{b}_k x_{ik})\right)^2$$

Оценка общей дисперсии

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$\boxed{\begin{array}{l} H_0:\ D_y = D_\varepsilon \\ H_1:\ D_y > D_\varepsilon \end{array}}$$

$$\frac{S_y^2}{S_\varepsilon^2} \sim F_{(n-1;\,n-(k+1))}$$

Полиномиальная регрессия

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3 + \ldots + b_k x^k$$

Замена: $x \to x_1 \quad x^2 \to x_2 \quad \ldots \quad x^k \to x_k$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$$

$x_0 \equiv 1 \qquad y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2 + \ldots + b_k x_k$

В матричной форме $\quad y_{мод} = Xb \qquad y_{набл} = Xb + \varepsilon$

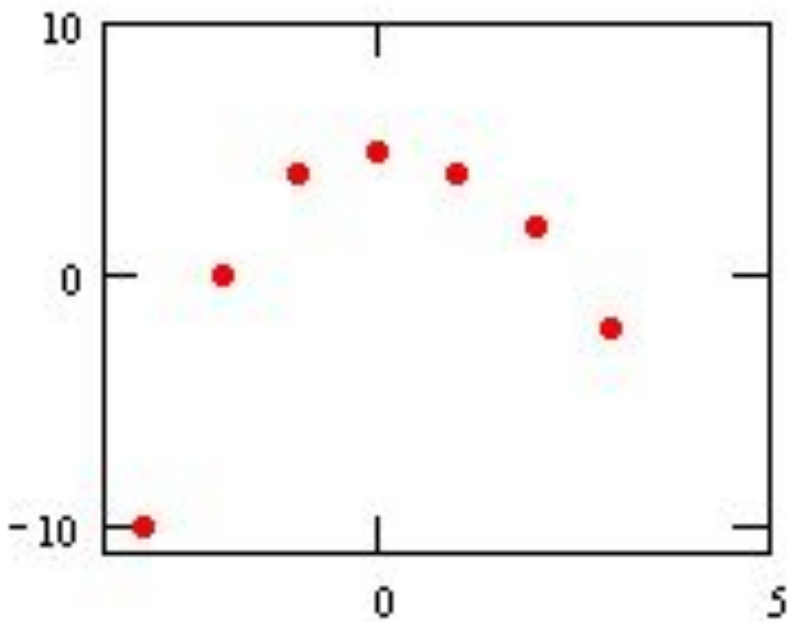
МНК: $\sum \varepsilon_i^2 \to \min$

$$\hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y$$

Полиномиальная регрессия

Пример. Найти оценки параметров модели, проверить ее адекватность $y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	0	4	5	4	2	-2



$$x \to x_1 \qquad x^2 \to x_2$$

$$y = b_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$(x_0 \equiv 1)$$

<u>Пример</u> (продолжение).

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-10	0	4	5	4	2	-2

Перейдем к матричной форме

$$y = b_0 x_0 + b_1 x_1 + b_2 x_2$$

$$\boxed{y = Xb + \varepsilon}$$

$$\boxed{\hat{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y}$$

$$y = \begin{pmatrix} -10 \\ 0 \\ 4 \\ 5 \\ 4 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad X = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 9 \\ 1 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \end{pmatrix}$$

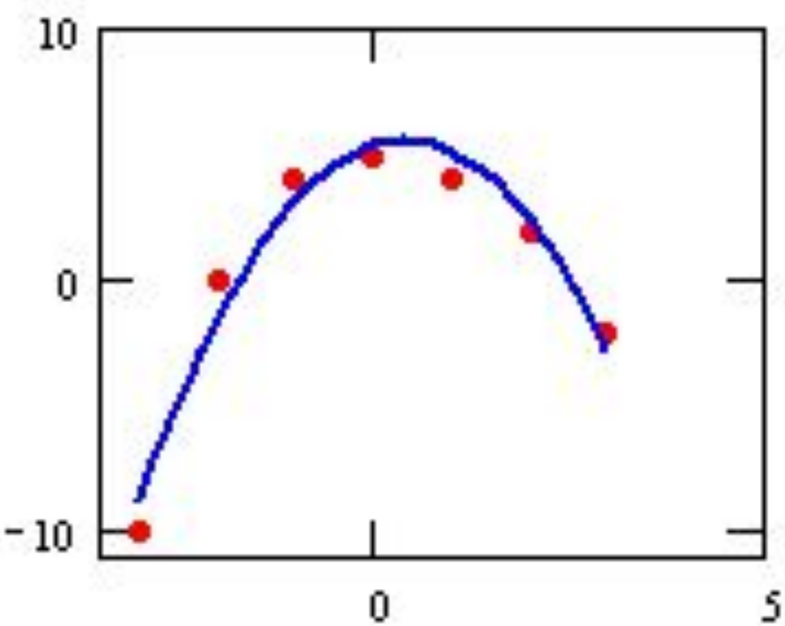
$$X^T X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{pmatrix}$$

Пример
(продолжение).

$$X^T X = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 28 \\ 0 & 28 & 0 \\ 28 & 0 & 196 \end{pmatrix} \qquad C = \left(X^T X \right)^{-1}$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\vec{b} = \left(X^T X \right)^{-1} X^T y}$$



$$\vec{b} = \begin{pmatrix} 5.38 \\ 1 \\ -1.24 \end{pmatrix}$$

$$y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2$$

$$\boxed{y = 5.38 + x - 1.24x^2}$$

Пример
(продолжение)

Интервальные оценки

$$y = 5.38 + x - 1.24x^2$$

$$b_i = \hat{b}_i \pm t_{табл} \cdot s_{\hat{b}_i}$$

$$s_{b_0} = 2.78 \cdot 1.3 \cdot \sqrt{0.33}$$

$$\boxed{b_0 \in (3.29; 7.47)}$$

$$s_{b_1} = 2.78 \cdot 1.3 \cdot \sqrt{0.04}$$

$$\boxed{b_1 \in (0.31; 1.69)}$$

$$s_{b_2} = 2.78 \cdot 1.3 \cdot \sqrt{0.01}$$

$$\boxed{b_2 \in (-1.64; -0.84)}$$

$$\hat{b} = \begin{pmatrix} 5.38 & 1 & -1.24 \end{pmatrix}^T$$

$$C = \begin{pmatrix} 0.33 & 0 & 0.05 \\ 0 & 0.04 & 0 \\ 0.05 & 0 & 0.01 \end{pmatrix}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{Q(\hat{b})}{n - (k+1)}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{6,78}{7 - (3)}$$

$$S_\varepsilon^2 = 1.695$$

$$S_\varepsilon = 1.3$$

$$t_{табл} = 2.78$$

$$\alpha = 0.05 \quad \nu = 4$$

Пример
(продолжение)

Адекватность модели

$$y = 5.38 + x - 1.24x^2$$

$$\boxed{\begin{aligned} H_0: \ D_y = D_\varepsilon \\ H_1: \ D_y > D_\varepsilon \end{aligned}}$$

$$S_y^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \bar{y})^2$$

$$\frac{S_y^2}{S_\varepsilon^2} \sim F_{(n-1;n-(k+1))}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{Q(\hat{b})}{n-(k+1)}$$

$$S_\varepsilon^2 = \frac{6{,}78}{7-(3)}$$

$$S_\varepsilon^2 = 1.695$$

$$S_y^2 = \frac{163.71}{7-1} = 27.285$$

$$F_{набл} = 16.09$$

$$F_{табл} = 6.16$$

Вывод: модель адекватна