СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Рассмотренные нами случайные величины являлись одномерными: каждому элементарному исходу опыта или наблюдения ставилось в соответствие одно вещественное число. На практике результат эксперимента (наблюдения) часто характеризуется не одной, а несколькими случайными величинами. Например, точка падения снаряда относительно поражаемой цели характеризуется двумя случайными величинами – абсциссой X и ординатой Y; успеваемость студента характеризуется совокупностью (системой) n случайных величин $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ – оценками в зачетной книжке.

<u>Определение.</u> Упорядоченный набор $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$ случайных величин X_i $\left(i=\overline{1,n}\right)$, заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов Ω, называется *n-мерной случайной величиной* или *системой n случайных величин*.

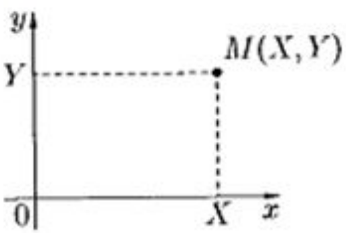
Одномерные СВ $X_1, X_2, ..., X_n$ называются *компонентами* или *составляющими* n-мерной СВ $\left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$.

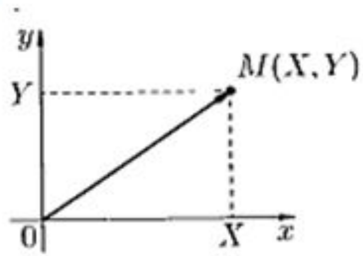
Многомерные случайные величины называют также случайными векторами.

На многомерные СВ распространяются почти без изменений основные понятия и определения, относящиеся к одномерным СВ. В дальнейшем будем подробно рассматривать системы двух СВ, или двумерные СВ.

Определение. Упорядоченная пара (X,Y) двух случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной* или *системой двух одномерных случайных величин* X и Y.

Двумерную СВ (X,Y) можно изобразить *случайной точкой* $M(X, Y)$ или *случайным вектором* OM.





Двумерная СВ (X, Y) есть функция элементарного события: $(X,Y)=\varphi(\omega)$. Каждому элементарному событию ω ставится в соответствие два вещественных числа x и y – значения X и Y в данном опыте.

При этом вектор с координатами (x, y) называется реализацией вектора OM.

Пример: бросание двух кубиков, СВ X и Y – число очков на 1-ом и 2-ом. ПЭС состоит из 36 элементов. Элементарному событию, например, $(6, 5)=\omega_{65}$ соответствует пара чисел $x=6$ и $y=5$. Совокупность этих значений – функция элементарного события ω.

Системы СВ могут быть дискретными, непрерывными и смешанными в зависимости от типа одномерных СВ, образующих систему, т.е. в зависимости от типа компонент многомерной СВ. Полной характеристикой системы СВ является её закон распределения, указывающий область её возможных значений и вероятности этих значений.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВ

Закон распределения двумерной ДСВ (X, Y) можно задать формулой

$$p_{ij} = P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m}$$

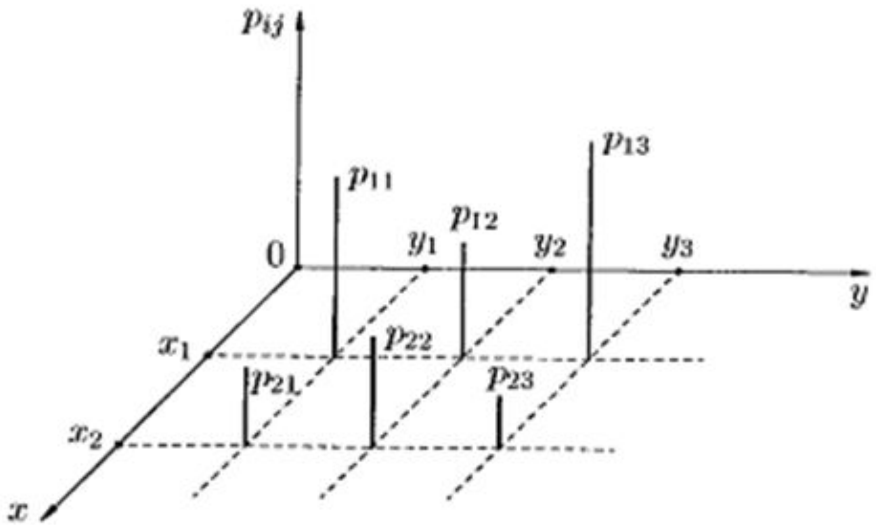
или в форме таблицы, называемой матрицей распределения двумерной ДСВ (X, Y):

$X \setminus Y$	y_1	y_2	$\ldots$	y_j	$\ldots$	y_m
x_1	p_{11}	p_{12}	$\ldots$	p_{1j}	$\ldots$	p_{1m}
x_2	p_{21}	p_{22}	$\ldots$	p_{2j}	$\ldots$	p_{2m}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_i	p_{i1}	p_{i2}	$\ldots$	p_{ij}	$\ldots$	p_{im}
$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
x_n	p_{n1}	p_{n2}	$\ldots$	p_{nj}	$\ldots$	p_{nm}

Сумма всех вероятностей p_{ij}, как сумма вероятностей полной группы несовместных событий $\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$, равна единице: $\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{m} p_{ij} = 1$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВ

На рисунке приведен примерный график распределения двумерной ДСВ (X, Y).



Зная матрицу распределения системы случайных величин, можно **найти ряды распределения каждой из случайных величин**, входящих в систему (обратное неверно).

Действительно, событие $\{X = x_i\}$ (i фиксировано) можно представить в виде суммы несовместных событий

$$\{X = x_i, Y = y_1\},\ \{X = x_i, Y = y_2\},\ \ldots,\{X = x_i, Y = y_m\}.$$

Так как вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, то для вероятности p_{xi} того, что СВ X примет значение x_i получаем:

$$p_{xi} = P\{X = x_i\} = P\left[\{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \ldots + \{X = x_i, Y = y_m\}\right] =$$

$$= p_{i1} + p_{i2} + \ldots + p_{im} = \sum_{j=1}^{m} p_{ij},$$

т.е. вероятность p_{xi} равна сумме элементов i-той строки матрицы распределения.

Аналогично для вероятности того, что СВ Y примет значение y_j, имеем $p_{yj} = \sum_{i=1}^{n} p_{ij}$.

Таким образом, чтобы по матрице распределения двумерной ДСВ найти вероятность того, что компонента двумерной ДСВ примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij} из соответствующей этому значению строки (столбца) данной матрицы.

Ниже приведена матрица распределения двумерной ДСВ (X, Y), дополненная столбцом справа и строкой снизу.

$X \setminus Y$	y_1	y_2	…	y_j	…	y_m	$\sum_{j=1}^{m} p_{ij}$
x_1	p_{11}	p_{12}	…	p_{1j}	…	p_{1m}	p_{x1}
x_2	p_{21}	p_{22}	…	p_{2j}	…	p_{2m}	p_{x2}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_i	p_{i1}	p_{i2}	…	p_{ij}	…	p_{im}	p_{xi}
…	…	…	…	…	…	…	…
x_n	p_{n1}	p_{n2}	…	p_{nj}	…	p_{nm}	p_{xn}
$\sum_{i=1}^{n} p_{ij}$	p_{y1}	p_{y2}	…	p_{yj}	…	p_{ym}	1

Правый крайний столбец представляет собой ряд распределения составляющей X, а последняя строка – ряд распределения составляющей Y.

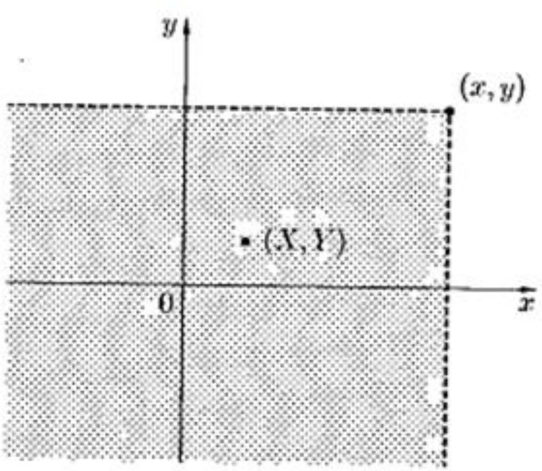
Универсальной формой задания распределения двумерной СВ является функция распределения, пригодная как для дискретной, так и для непрерывной СВ.

__Определение.__ Функцией распределения двумерной системы СВ (X, Y) называется функция $F(x,y)$, выражающая вероятность совместного выполнения двух событий $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$, т.е.

$$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}.$$

Событие $\{X<x,Y<y\}$ означает произведение событий $\{X<x\}$ и $\{Y<y\}$.

Геометрически функция распределения $F(x,y)$ интепретируется как вероятность попадания случайной точки (X,Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y), лежащий левее и ниже её.



В случае дискретной двумерной случайной величины ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x,y)=\sum_i \sum_j p_{ij} ,$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i , для которых $x_i<x$, и на все j, для которых $y_j<y$.

СВОЙСТВА ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СВ

1. Значения функции распределения положительны и заключены между нулем и единицей. Утверждение следует из того, что ФР есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x, y)$ является неубывающей по каждому из своих аргументов.

Доказательство. Так как при увеличении какого-либо из аргументов (x, y) заштрихованная область на рисунке увеличивается, то вероятность попадания в неё случайной точки (X,Y) уменьшиться не может.

3. Если хотя бы один из аргументов ФР обращается в $-\infty$, то функция распределения равна нулю, т.е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

Доказательство. Функция распределения в отмеченных случаях равна нулю, так как события $\{X < -\infty\}$, $\{Y < -\infty\}$ и их произведение являются невозможными.

4. Если оба аргумента обращаются в $+\infty$, то ФР равна единице, т.е.

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Доказательство. Это следует из того, что совместное осуществление достоверных событий $\{X < +\infty\}$ и $\{Y < +\infty\}$ есть событие достоверное.

5. Если один из аргументов ФР равен $+\infty$, то функция распределения становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x,+\infty)=F_1(x), \quad F(+\infty,y)=F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ - функции распределения СВ X и Y, т.е.

$$F_1(x)=P(X<x),\ F_2(y)=P(Y<y).$$

<u>*Доказательство.*</u> Произведение события $\{X<x\}$ и достоверного события $\{Y<+\infty\}$ есть само событие $\{X<x\}$. Следовательно, $F(x,+\infty)=P\{X<x\}=F_1(x)$

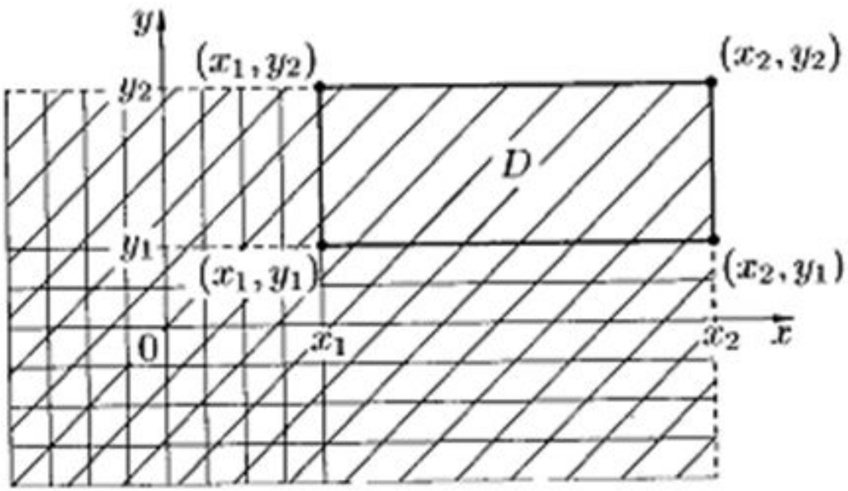
Аналогично $F(+\infty,x)=P\{Y<y\}=F_2(y)$.

Важно: Зная совместное распределение двух СВ, можно найти одномерные распределения этих СВ, но обратное в общем случае неверно.

Геометрически функция распределения есть некоторая **поверхность**, обладающая указанными свойствами. Для дискретной случайной двумерной величины $(X,\ Y)$ ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x,\ y)$.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ ДВУМЕРНОЙ СВ В ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ

Пусть требуется определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. вероятность $P\{x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2\}$.



Как можно видеть, вероятность попадания в указанную область равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной (x_2, y_2), минус вероятности попадания в квадранты с вершинами соответственно в точках (x_1, y_2) и (x_2, y_1) плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (x_1, y_1) (ибо эта вероятность вычиталась дважды).

Таким образом, вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольную область равна

$$P\{x_1 \le X \le x_2, y_1 \le Y \le y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Определение. Двумерная случайная величина (X, Y) называется непрерывной, если её функция распределения $F(x,y)$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $F''(x,y)$.

Определение. Плотностью распределения вероятностей (или совместной плотностью) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная её функции распределения.

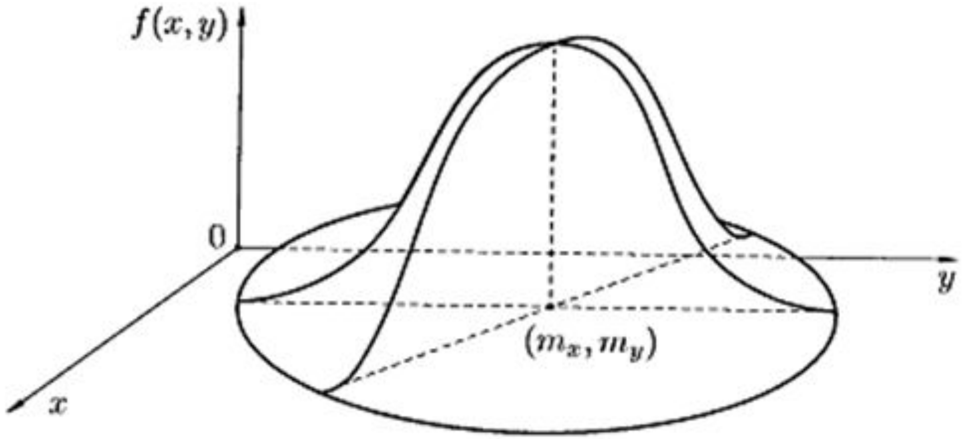
Обозначается совместная плотность системы двух непрерывных СВ (X, Y) через $f(x,y)$.

Таким образом, по определению

$$f(x,y)=\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x\,\partial y}=F''(x,y).$$

Плотность распределения двумерной СВ (X, Y) есть предел отношения вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy, примыкающий к точке (x, y), к площади этого прямоугольника, когда его размеры Δx и Δy стремятся к нулю.

Геометрически плотность вероятности двумерной СВ представляет собой некоторую поверхность, называемую поверхностью распределения.



Выражение $f(x,y)dxdy$ называется *элементом вероятности* двумерной СВ. Он представляет собой вероятность попадания в бесконечный малый прямоугольник и равен объему прямоугольного параллелепипеда, опирающегося своим основанием на прямоугольник $dxdy$.

Плотность распределения $f(x,y)$ обладает следующими свойствами.

1. Плотность распределения двумерной СВ $f(x,y)$ неотрицательна, т.е.

Это свойство следует из того, что $F(x,y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов.

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D, т.е.

$$P\{(X,Y)\in D\}=\iint\limits_{D} f(x,y)\,dxdy. \qquad (*)$$

Доказательство. Элемент вероятности $f(x,y)dxdy$ представляет собой вероятность попадания в прямоугольник со сторонами dx и dy. Разбив область D на прямоугольники, и применив к каждому из них равенство

$$P\{x\le X<x+dx,\ y\le Y<y+dy\}\approx f(x,y)dxdy,$$

придем при стремлении к нулю площадей прямоугольников, т.е. $dx\to 0$ и $dy\to 0$, к формуле (*).

3. Функция распределения двумерной СВ выражается через её плотность распределения по формуле

$$F(x,y)=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv.$$

Доказательство. Используя формулу для вычисления вероятности попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, получим:

$$F(x,y)=P\{X<x,Y<y\}=P\{-\infty<X<x,-\infty<Y<y\}=\int\limits_{-\infty}^{x}\int\limits_{-\infty}^{y} f(u,v)\,dudv.$$

4. Условие нормировки: двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной СВ равен единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} f(u,v)\,du\,dv = 1.$$

Доказательство. Это равенство получим, положив в выражении для функции распределения $F(x,y)$ через плотность распределения $f(x,y)$ $x = y = +\infty$, и учитывая, что $F(+\infty,+\infty) = 1$.

5. Плотности распределения одномерных составляющих X и Y двумерной СВ (X, Y) находятся по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\,dx.$$

Доказательство. По определению для функций распределения составляющих:

$$F_1(x) = F(x,+\infty) = \int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,v)\,du\,dv, \quad F_2(y) = F(+\infty,y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv.$$ Т.е.

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{x}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u,y)\,dy\right)du, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^{y}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x,v)\,dx\right)dv.$$

Дифференцируя первое равенство по x, а второе по y, получим плотности распределения случайных величин:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dy, \qquad f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,dx.$$

ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Зная законы распределения случайных величин X и Y, входящих в систему (X, Y), можно найти закон распределения системы *только в том случае, когда случайные величины* X и Y независимы.

Определение. Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимает другая. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ для любых вещественных x и y. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Условие независимости случайных величин:

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были *независимыми*, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y). \qquad (**)$$

Доказательство. Если СВ X и Y независимы, то события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы. Следовательно,

$$P\{X < x, Y < y\}=P\{X < x\}\cdot P\{Y < y\}, \text{ т.е. } F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y).$$

Нетрудно заметить, что условие (**) есть иначе записанное условие независимости двух событий $P(AB)=P(A)P(B)$ для случая событий $A=\{X<x\}$ и $B=\{Y<y\}$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием независимости двух непрерывных случайных величин *X* и *Y*, образующих систему (*X*, *Y*), является выполнение равенства

$$f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

Доказательство. Если СВ *X* и *Y* независимы, то $F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$. Дифференцируя это равенство по *x*, а затем по *y*, получим

$$f(x,y)=\frac{d}{dx}F_1(x)\cdot\frac{d}{dy}F_1(y) \quad \text{или} \quad f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y).$$

И обратно. Интегрируя равенство $f(x,y)=f_1(x)\cdot f_2(y)$ по *x* и по *y*, получим

$$\int_{-\infty}^{x}\int_{-\infty}^{y} f(u,v)\,du\,dv=\int_{-\infty}^{x} f_1(u)\,du\cdot\int_{-\infty}^{y} f_2(v)\,dv, \text{ т.е. } F(x,y)=F_1(x)\cdot F_2(y)$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием независимости двух дискретных СВ *X* и *Y*, образующих систему (*X*, *Y*), является выполнение равенства

$$P\{X=x_i,Y=y_j\}=P\{X=x_i\}\cdot P\{Y=y_j\} \text{ для любых } i=\overline{1,n} \text{ и } j=\overline{1,m}.$$

УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВУМЕРНОЙ СВ

Если СВ X и Y, образующих систему (X, Y), зависимы между собой, то *для характеристики их зависимости* вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Определение. *Условным законом распределения одной из случайных величин*, входящей в систему (X, Y), называется её закон распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение не равное нулю (попала в какой-то интервал).

Пусть (X, Y) – *дискретная двумерная СВ* и $p_{ij} = P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}$, $i = \overline{1,n}$, $j = \overline{1,m}$. В соответствии с определением условных вероятностей событий $\left(P(B/A) = \dfrac{P(AB)}{P(A)}\right)$, *условная вероятность того, что СВ Y примет значение* y_i *при условии, что СВ X приняла значение* $X = x_i$, определяется равенством

$$P\left\{(Y = y_j)/(X = x_i)\right\} = \frac{P\left\{X = x_i, Y = y_j\right\}}{P\left\{X = x_i\right\}}, \quad i = \overline{1,n}, \ j = \overline{1,m},$$

или коротко: $p(y_j/x_i) = \dfrac{p_{ij}}{p_{xi}}$.

Совокупность вероятностей $p(y_1/x_i)$, $p(y_2/x_i)$, …, $p(y_m/x_i)$ представляет собой *условный закон распределения СВ Y при условии* $X = x_i$.

УСЛОВНЫЕ ЗАКОНЫ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СОСТАВЛЯЮЩИХ ДВУМЕРНОЙ СВ

Сумма условных вероятностей $p\left(y_j/x_i\right)$ равна единице:

$$\sum_{j=1}^{m} p\left(y_j/x_i\right)=\sum_{j=1}^{m}\frac{p_{ij}}{p_{xi}}=\frac{1}{p_{xi}}\sum_{j=1}^{m}p_{ij}=\frac{p_{xi}}{p_{xi}}=1,\ \text{так как}\ \sum_{j=1}^{m}p_{ij}=p_{xi}.$$

Аналогично определяются условная вероятность, условный закон распределения СВ X при условии $Y=y_j$:

$$P\left\{\left(X=x_i\right)/\left(Y=y_j\right)\right\}=\frac{P\left\{X=x_i,Y=y_j\right\}}{P\left\{Y=y_j\right\}},\quad i=\overline{1,n},\ j=\overline{1,m},$$

или коротко: $p\left(x_i/y_j\right)=\dfrac{p_{ij}}{p_{yj}}$.

Пусть теперь (X, Y) – непрерывная *двумерная СВ* с плотностью распределения $f\left(x,y\right)$, а $f_1\left(x\right)$ и $f_2\left(y\right)$ – плотности распределения соответственно СВ X и СВ Y.

Определение. Плотность вероятности условного распределения (или условная плотность) случайной величины Y при условии, что *СВ X приняла значение* $X=x$, определяется равенством

$$f\left(y/x\right)=\frac{f\left(x,y\right)}{f_1\left(x\right)}=\frac{f\left(x,y\right)}{\int\limits_{-\infty}^{\infty}f\left(x,y\right)dy},\quad f_1\left(x\right)\neq 0.$$

Условная плотность обладает свойствами плотности распределения, так что

$$f(y/x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x)dy = 1.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения случайной величины X при условии, что *СВ Y приняла значение* $Y = y$:

$$f(x/y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{f(x,y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)dx}, \quad f_2(y) \neq 0.$$

Используя приведенные соотношения для условных плотностей распределения, можно записать

$$f(x,y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y), \quad (***)$$

т.е. совместная плотность распределения системы случайных величин равна произведению плотности одной составляющей на условную плотность другой составляющей при заданном значении первой.

Равенство (***) называют теоремой (правилом) умножения плотностей распределений (аналог теоремы умножения вероятностей для случайных событий).