

Рассмотренные нами случайные величины являлись одномерными: каждому элементарному исходу опыта или наблюдения ставилось в соответствие одно вещественное число. На практике результат эксперимента (наблюдения) часто характеризуется не одной, а несколькими случайными величинами. Например, точка падения снаряда относительно поражаемой цели характеризуется двумя случайными величинами – абсциссой X и ординатой Y ; успеваемость студента характеризуется совокупностью (системой) n случайных величин (X_1, X_2, \dots, X_n) – оценками в зачетной книжке.

Определение. Упорядоченный набор (X_1, X_2, \dots, X_n) случайных величин X_i ($i = \overline{1, n}$), заданных на одном и том же пространстве элементарных исходов Ω , называется *n -мерной случайной величиной* или *системой n случайных величин*.

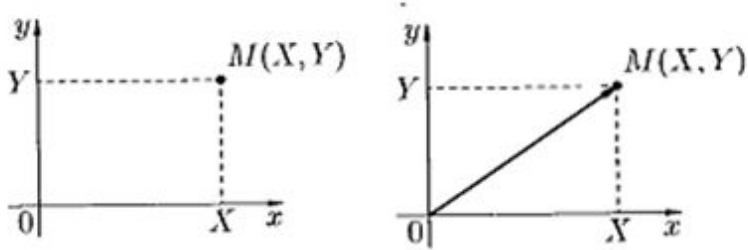
Одномерные СВ X_1, X_2, \dots, X_n называются *компонентами* или *составляющими* n -мерной СВ (X_1, X_2, \dots, X_n) .

Многомерные случайные величины называют также случайными векторами.

На многомерные СВ распространяются почти без изменений основные понятия и определения, относящиеся к одномерным СВ. В дальнейшем будем подробно рассматривать системы двух СВ, или двумерные СВ.

Определение. Упорядоченная пара (X, Y) двух случайных величин X и Y называется *двумерной случайной величиной* или *системой двух одномерных случайных величин X и Y* .

Двумерную СВ (X, Y) можно изобразить *случайной точкой $M(X, Y)$* или *случайным вектором OM* .



Двумерная СВ (X, Y) есть функция элементарного события: $(X, Y) = \varphi(\omega)$.

Каждому элементарному событию ω ставится в

соответствие два вещественных числа x и y – значения X и Y в данном опыте.

При этом вектор с координатами (x, y) называется реализацией вектора OM .
Пример: бросание двух кубиков, СВ X и Y – число очков на 1-ом и 2-ом. ПЭС состоит из 36 элементов. Элементарному событию, например, $(6, 5) = \omega_{65}$ соответствует пара чисел $x=6$ и $y=5$. Совокупность этих значений – функция элементарного события ω .

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ СИСТЕМЫ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Системы СВ могут быть дискретными, непрерывными и смешанными в зависимости от типа одномерных СВ, образующих систему, т.е. в зависимости от типа компонент многомерной СВ. Полной характеристикой системы СВ является её закон распределения, указывающий область её возможных значений и вероятности этих значений.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВ

Закон распределения двумерной ДСВ (X, Y) можно задать формулой

$$p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m}$$

или в форме таблицы, называемой матрицей распределения двумерной ДСВ (X, Y) :

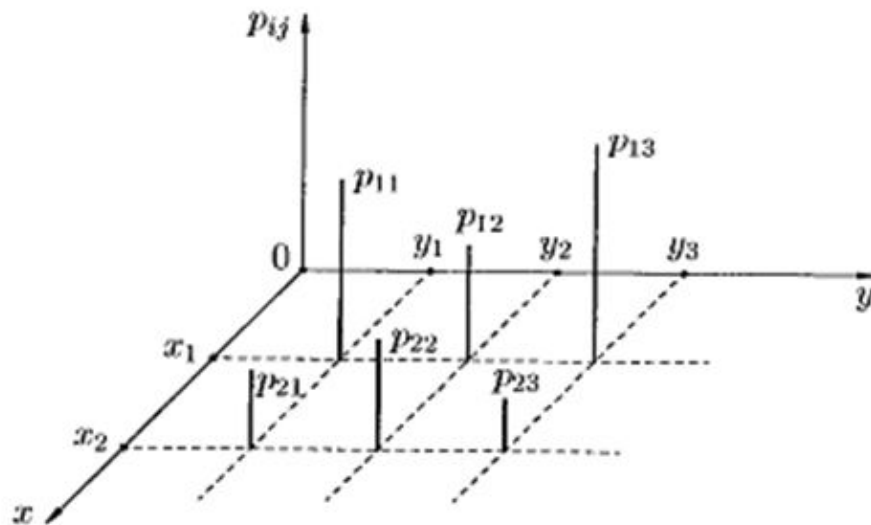
| $X \setminus Y$ | y_1 | y_2 | ... | y_j | ... | y_m |
|-----------------|----------|----------|-----|----------|-----|----------|
| x_1 | p_{11} | p_{12} | ... | p_{1j} | ... | p_{1m} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | ... | p_{2j} | ... | p_{2m} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_i | p_{i1} | p_{i2} | ... | p_{ij} | ... | p_{im} |
| ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | ... | p_{nj} | ... | p_{nm} |

Сумма всех вероятностей p_{ij} , как сумма вероятностей полной группы несовместных

событий $\{X = x_i, Y = y_j\}$, равна единице: $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m p_{ij} = 1$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВ

На рисунке приведен примерный график распределения двумерной ДСВ (X, Y) .



Зная матрицу распределения системы случайных величин, можно найти ряды распределения каждой из случайных величин, входящих в систему (обратное неверно).

Действительно, событие $\{X = x_i\}$ (i фиксировано) можно представить в виде суммы несовместных событий

$$\{X = x_i, Y = y_1\}, \{X = x_i, Y = y_2\}, \dots, \{X = x_i, Y = y_m\}.$$

Так как вероятность суммы несовместных событий равна сумме их вероятностей, то для вероятности p_{xi} того, что СВ X примет значение x_i получаем:

$$\begin{aligned} p_{xi} &= P\{X = x_i\} = P[\{X = x_i, Y = y_1\} + \{X = x_i, Y = y_2\} + \dots + \{X = x_i, Y = y_m\}] = \\ &= p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{im} = \sum_{j=1}^m p_{ij}, \end{aligned}$$

т.е. вероятность p_{xi} равна сумме элементов i -той строки матрицы распределения.

Аналогично для вероятности того, что СВ Y примет значение y_j , имеем $p_{yj} = \sum_{i=1}^n p_{ij}$.

ЗАКОН РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ ДИСКРЕТНОЙ СВ

Таким образом, чтобы по матрице распределения двумерной ДСВ найти вероятность того, что компонента двумерной ДСВ примет определенное значение, надо просуммировать вероятности p_{ij} из соответствующей этому значению строки (столбца) данной матрицы.

Ниже приведена матрица распределения двумерной ДСВ (X, Y) , дополненная столбцом справа и строкой снизу.

| | | | | | | | |
|-----------------------|----------|----------|---------|----------|---------|----------|-----------------------|
| $X \setminus Y$ | y_1 | y_2 | \dots | y_j | \dots | y_m | $\sum_{j=1}^m p_{ij}$ |
| x_1 | p_{11} | p_{12} | \dots | p_{1j} | \dots | p_{1m} | p_{x1} |
| x_2 | p_{21} | p_{22} | \dots | p_{2j} | \dots | p_{2m} | p_{x2} |
| \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots |
| x_i | p_{i1} | p_{i2} | \dots | p_{ij} | \dots | p_{im} | p_{xi} |
| \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots | \dots |
| x_n | p_{n1} | p_{n2} | \dots | p_{nj} | \dots | p_{nm} | p_{xn} |
| $\sum_{i=1}^n p_{ij}$ | p_{y1} | p_{y2} | \dots | p_{yj} | \dots | p_{ym} | 1 |

Правый крайний столбец представляет собой ряд распределения составляющей X , а последняя строка – ряд распределения составляющей Y .

ФУНКЦИЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ДВУМЕРНОЙ СВ И ЕЁ СВОЙСТВА

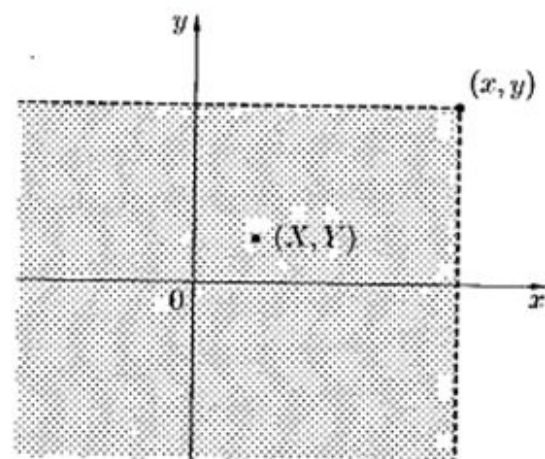
Универсальной формой задания распределения двумерной СВ является функция распределения, пригодная как для дискретной, так и для непрерывной СВ.

Определение. Функцией распределения двумерной системы СВ (X, Y) называется функция $F(x, y)$, выражающая вероятность совместного выполнения двух событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$, т.е.

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\}.$$

Событие $\{X < x, Y < y\}$ означает произведение событий $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$.

Геометрически функция распределения $F(x, y)$ интерпретируется как вероятность попадания случайной точки (X, Y) в бесконечный квадрант с вершиной в точке (x, y) , лежащий левее и ниже её.



В случае дискретной двумерной случайной величины ее функция распределения определяется по формуле:

$$F(x, y) = \sum_i \sum_j P_{ij},$$

где суммирование вероятностей распространяется на все i , для которых $x_i < x$, и на все j , для которых $y_j < y$.

1. Значения функции распределения положительны и заключены между нулем и единицей. Утверждение следует из того, что ФР есть вероятность.

2. Функция распределения $F(x, y)$ является неубывающей по каждому из своих аргументов.

Доказательство. Так как при увеличении какого-либо из аргументов (x, y) заштрихованная область на рисунке увеличивается, то вероятность попадания в неё случайной точки (X, Y) уменьшиться не может.

3. Если хотя бы один из аргументов ФР обращается в $-\infty$, то функция распределения равна нулю, т.е.

$$F(x, -\infty) = F(-\infty, y) = F(-\infty, -\infty) = 0.$$

Доказательство. Функция распределения в отмеченных случаях равна нулю, так как события $\{X < -\infty\}$, $\{Y < -\infty\}$ и их произведение являются невозможными.

4. Если оба аргумента обращаются в $+\infty$, то ФР равна единице, т.е.

$$F(+\infty, +\infty) = 1.$$

Доказательство. Это следует из того, что совместное осуществление достоверных событий $\{X < +\infty\}$ и $\{Y < +\infty\}$ есть событие достоверное.

5. Если один из аргументов ФР равен $+\infty$, то функция распределения становится равной функции распределения случайной величины, соответствующей другому аргументу:

$$F(x, +\infty) = F_1(x), \quad F(+\infty, y) = F_2(y),$$

где $F_1(x)$ и $F_2(y)$ - функции распределения СВ X и Y , т.е.

$$F_1(x) = P(X < x), \quad F_2(y) = P(Y < y).$$

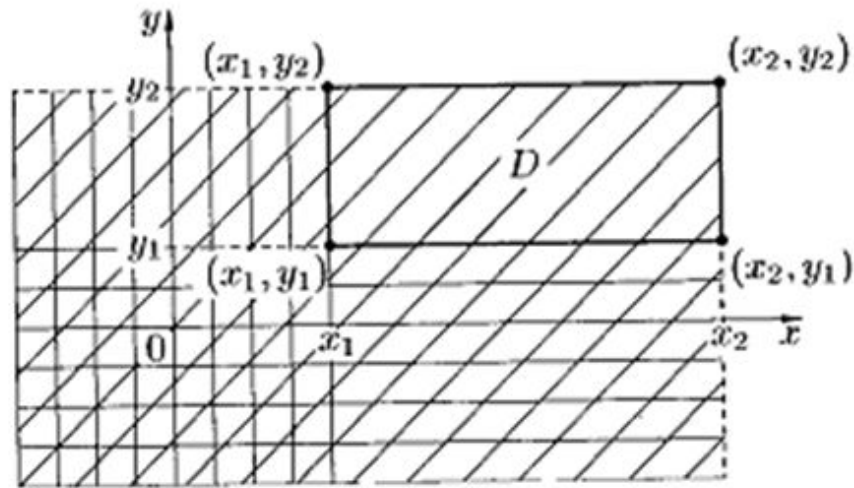
Доказательство. Произведение события $\{X < x\}$ и достоверного события $\{Y < +\infty\}$ есть само событие $\{X < x\}$. Следовательно, $F(x, +\infty) = P\{X < x\} = F_1(x)$. Аналогично $F(+\infty, x) = P\{Y < y\} = F_2(y)$.

Важно: Зная совместное распределение двух СВ, можно найти одномерные распределения этих СВ, но обратное в общем случае неверно.

Геометрически функция распределения есть некоторая поверхность, обладающая указанными свойствами. Для дискретной случайной двумерной величины (X, Y) ее функция распределения представляет собой некоторую ступенчатую поверхность, ступени которой соответствуют скачкам функции $F(x, y)$.

ВЕРОЯТНОСТЬ ПОПАДАНИЯ ДВУМЕРНОЙ СВ В ПРЯМОУГОЛЬНУЮ ОБЛАСТЬ

Пусть требуется определить вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник D со сторонами, параллельными координатным осям, т.е. вероятность $P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\}$.



Как можно видеть, вероятность попадания в указанную область равна вероятности попадания в бесконечный квадрант с вершиной (x_2, y_2) , минус вероятности попадания в квадранты с вершинами соответственно в точках (x_1, y_2) и (x_2, y_1) плюс вероятность попадания в квадрант с вершиной в точке (x_1, y_1) (ибо эта вероятность вычиталась дважды).

Таким образом, вероятность попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольную область равна

$$P\{x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2\} = F(x_2, y_2) - F(x_1, y_2) - F(x_2, y_1) + F(x_1, y_1).$$

Определение. Двумерная случайная величина (X, Y) называется непрерывной, если её функция распределения $F(x, y)$ есть непрерывная функция, дифференцируемая по каждому из аргументов, у которой существует вторая смешанная производная $F''(x, y)$.

Определение. Плотностью распределения вероятностей (или совместной плотностью) непрерывной двумерной случайной величины (X, Y) называется вторая смешанная производная её функции распределения.

Обозначается совместная плотность системы двух непрерывных СВ (X, Y) через $f(x, y)$.

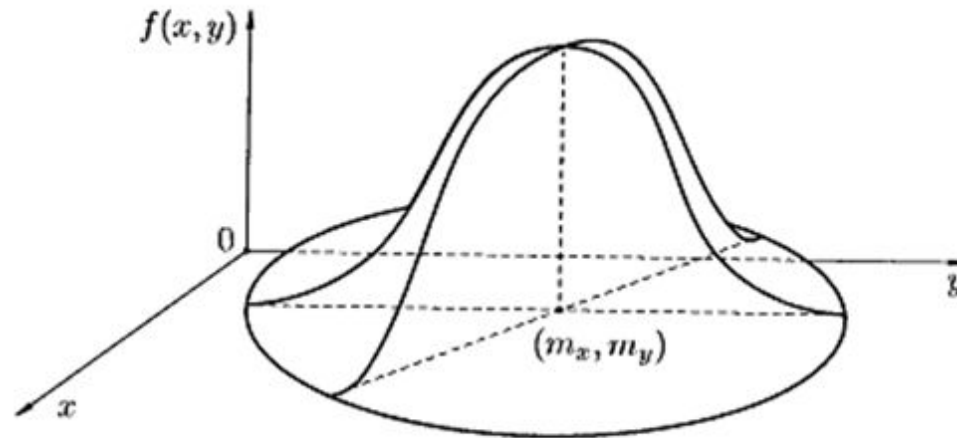
Таким образом, по определению

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y} = F''(x, y).$$

Плотность распределения двумерной СВ (X, Y) есть предел отношения вероятности попадания случайной точки (X, Y) в элементарный прямоугольник со сторонами Δx и Δy , примыкающий к точке (x, y) , к площади этого прямоугольника, когда его размеры Δx и Δy стремятся к нулю.

ПЛОТНОСТЬ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ДВУМЕРНОЙ СВ И ЕЁ СВОЙСТВА

Геометрически плотность вероятности двумерной СВ представляет собой некоторую поверхность, называемую поверхностью распределения.



Выражение $f(x, y)dxdy$ называется *элементом вероятности* двумерной СВ. Он представляет собой вероятность попадания в бесконечный малый прямоугольник и равен объему прямоугольного параллелепипеда, опирающегося своим основанием на прямоугольник $dxdy$.

Плотность распределения $f(x, y)$ обладает следующими свойствами.

1. Плотность распределения двумерной СВ $f(x, y)$ неотрицательна, т.е.

Это свойство следует из того, что $F(x, y)$ есть неубывающая функция по каждому из аргументов.

2. Вероятность попадания случайной точки (X, Y) в область D равна двойному интегралу от плотности по области D , т.е.

$$P\{(X, Y) \in D\} = \iint_D f(x, y) dx dy. \quad (*)$$

Доказательство. Элемент вероятности $f(x, y) dx dy$ представляет собой вероятность попадания в прямоугольник со сторонами dx и dy . Разбив область D на прямоугольники, и применив к каждому из них равенство

$$P\{x \leq X < x + dx, y \leq Y < y + dy\} \approx f(x, y) dx dy,$$

придем при стремлении к нулю площадей прямоугольников, т.е. $dx \rightarrow 0$ и $dy \rightarrow 0$, к формуле (*).

3. Функция распределения двумерной СВ выражается через её плотность распределения по формуле

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

Доказательство. Используя формулу для вычисления вероятности попадания случайной точки (X, Y) в прямоугольник, получим:

$$F(x, y) = P\{X < x, Y < y\} = P\{-\infty < X < x, -\infty < Y < y\} = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv.$$

4. Условие нормировки: двойной несобственный интеграл в бесконечных пределах от плотности вероятности двумерной СВ равен единице, т.е.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) du dv = 1.$$

Доказательство. Это равенство получим, положив в выражении для функции распределения $F(x, y)$ через плотность распределения $f(x, y)$ $x = y = +\infty$, и учитывая, что $F(+\infty, +\infty) = 1$.

5. Плотности распределения одномерных составляющих X и Y двумерной СВ (X, Y) находятся по формулам:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx.$$

Доказательство. По определению для функций распределения составляющих:

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv, \quad F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv. \text{ Т.е.}$$

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^x \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(u, y) dy \right) du, \quad F_2(y) = \int_{-\infty}^y \left(\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, v) dx \right) dv.$$

Дифференцируя первое равенство по x , а второе по y , получим плотности распределения случайных величин:

$$f_1(x) = F_1'(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy, \quad f_2(y) = F_2'(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx.$$

Зная законы распределения случайных величин X и Y , входящих в систему (X, Y) , можно найти закон распределения системы *только в том случае, когда случайные величины X и Y независимы.*

Определение. Две случайные величины называются *независимыми*, если закон распределения каждой из них не зависит от того, какие значения принимает другая. В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Определение. Случайные величины X и Y называются *независимыми*, если независимыми являются события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ для любых вещественных x и y . В противном случае случайные величины называются *зависимыми*.

Условие независимости случайных величин:

Теорема. Для того, чтобы случайные величины X и Y были *независимыми*, необходимо и достаточно, чтобы функция распределения системы (X, Y) была равна произведению функций распределения составляющих:

$$F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y). \quad (**)$$

Доказательство. Если СВ X и Y независимы, то события $\{X < x\}$ и $\{Y < y\}$ независимы. Следовательно,

$$P\{X < x, Y < y\} = P\{X < x\} \cdot P\{Y < y\}, \text{ т.е. } F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y).$$

ЗАВИСИМОСТЬ И НЕЗАВИСИМОСТЬ ДВУХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

Нетрудно заметить, что условие (**) есть иначе записанное условие независимости двух событий $P(AB) = P(A)P(B)$ для случая событий $A = \{X < x\}$ и $B = \{Y < y\}$.

Теорема. Необходимым и достаточным условием независимости двух непрерывных случайных величин X и Y , образующих систему (X, Y) , является выполнение равенства

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

Доказательство. Если СВ X и Y независимы, то $F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$. Дифференцируя это равенство по x , а затем по y , получим

$$f(x, y) = \frac{d}{dx} F_1(x) \cdot \frac{d}{dy} F_2(y) \quad \text{или} \quad f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y).$$

И обратно. Интегрируя равенство $f(x, y) = f_1(x) \cdot f_2(y)$ по x и по y , получим

$$\int_{-\infty}^x \int_{-\infty}^y f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x f_1(u) du \cdot \int_{-\infty}^y f_2(v) dv, \quad \text{т.е.} \quad F(x, y) = F_1(x) \cdot F_2(y)$$

Теорема. Необходимым и достаточным условием независимости двух дискретных СВ X и Y , образующих систему (X, Y) , является выполнение равенства

$$P\{X = x_i, Y = y_j\} = P\{X = x_i\} \cdot P\{Y = y_j\} \quad \text{для любых } i = \overline{1, n} \text{ и } j = \overline{1, m}.$$

Если СВ X и Y , образующих систему (X, Y) , зависимы между собой, то для характеристики их зависимости вводится понятие условных законов распределения случайных величин.

Определение. Условным законом распределения одной из случайных величин, входящей в систему (X, Y) , называется её закон распределения, найденный при условии, что другая случайная величина приняла определенное значение не равное нулю (попала в какой-то интервал).

Пусть (X, Y) – дискретная двумерная СВ и $p_{ij} = P\{X = x_i, Y = y_j\}$, $i = \overline{1, n}$, $j = \overline{1, m}$.

В соответствии с определением условных вероятностей событий

$\left(P(B/A) = \frac{P(AB)}{P(A)} \right)$, условная вероятность того, что СВ Y примет значение y_j при

условии, что СВ X приняла значение $X = x_i$, определяется равенством

$$P\{(Y = y_j)/(X = x_i)\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{X = x_i\}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

или коротко: $p(y_j/x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{xi}}$.

Совокупность вероятностей $p(y_1/x_i)$, $p(y_2/x_i)$, ..., $p(y_m/x_i)$ представляет собой условный закон распределения СВ Y при условии $X = x_i$.

Сумма условных вероятностей $p(y_j/x_i)$ равна единице:

$$\sum_{j=1}^m p(y_j/x_i) = \sum_{j=1}^m \frac{P_{ij}}{P_{xi}} = \frac{1}{P_{xi}} \sum_{j=1}^m P_{ij} = \frac{P_{xi}}{P_{xi}} = 1, \text{ так как } \sum_{j=1}^m P_{ij} = P_{xi}.$$

Аналогично определяются условная вероятность, условный закон распределения СВ X при условии $Y = y_j$:

$$P\{(X = x_i)/(Y = y_j)\} = \frac{P\{X = x_i, Y = y_j\}}{P\{Y = y_j\}}, \quad i = \overline{1, n}, \quad j = \overline{1, m},$$

или коротко: $p(x_i/y_j) = \frac{P_{ij}}{P_{yj}}$.

Пусть теперь (X, Y) – непрерывная *двумерная СВ* с плотностью распределения $f(x, y)$, а $f_1(x)$ и $f_2(y)$ – плотности распределения соответственно СВ X и СВ Y .

Определение. Плотность вероятности условного распределения (или условная плотность) случайной величины Y при условии, что СВ X приняла значение $X = x$, определяется равенством

$$f(y/x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dy}, \quad f_1(x) \neq 0.$$

Условная плотность обладает свойствами плотности распределения, так что

$$f(y/x) \geq 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(y/x) dy = 1.$$

Аналогично определяется условная плотность распределения случайной величины X при условии, что СВ Y приняла значение $Y = y$:

$$f(x/y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)} = \frac{f(x, y)}{\int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) dx}, \quad f_2(y) \neq 0.$$

Используя приведенные соотношения для условных плотностей распределения, можно записать

$$f(x, y) = f_1(x) \cdot f(y/x) = f_2(y) \cdot f(x/y), \quad (***)$$

т.е. совместная плотность распределения системы случайных величин равна произведению плотности одной составляющей на условную плотность другой составляющей при заданном значении первой.

Равенство (*) называют теоремой (правилом) умножения плотностей распределений** (аналог теоремы умножения вероятностей для случайных событий).