

«Численные методы механики
сплошных сред. Метод граничных
интегральных уравнений для задач
гидромеханики»

Лекция 5

Решение задачи обтекания тела вращения с использованием МДВ

Краевая задача обтекания тела набегающим потоком для функции тока ψ в осевой плоскости течения, может быть сформулирована следующим образом:

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} - \varepsilon \psi_y / y = 0 \quad \text{в области } \Omega \quad (1)$$

$$\psi \sim y^{1+\varepsilon} / (1+\varepsilon), \quad \text{при } x \sim \infty \quad (2)$$

$$\psi = const, \quad \text{на контуре } \partial\Omega \quad (3)$$

Здесь $\partial\Omega$ - граница обтекаемого тела, $\varepsilon = 0$ - случай плоского обтекания, $\varepsilon = 1$ - случай осесимметричного обтекания, скорость набегающего потока направлена вдоль оси x и равна 1.

Согласно методу ГИУ, решение задачи - функцию тока ψ будем искать в виде суперпозиции функции тока невозмущенного набегающего потока ψ_0 и функции тока набора кольцевых вихрей непрерывно распределенных вдоль обтекаемого тела $\partial\Omega$:

$$\psi(x, y) = \psi_0(x, y) - \frac{1-2\varepsilon}{4\pi} \int_L \gamma(\sigma) M_\varepsilon d\sigma, \quad (4)$$

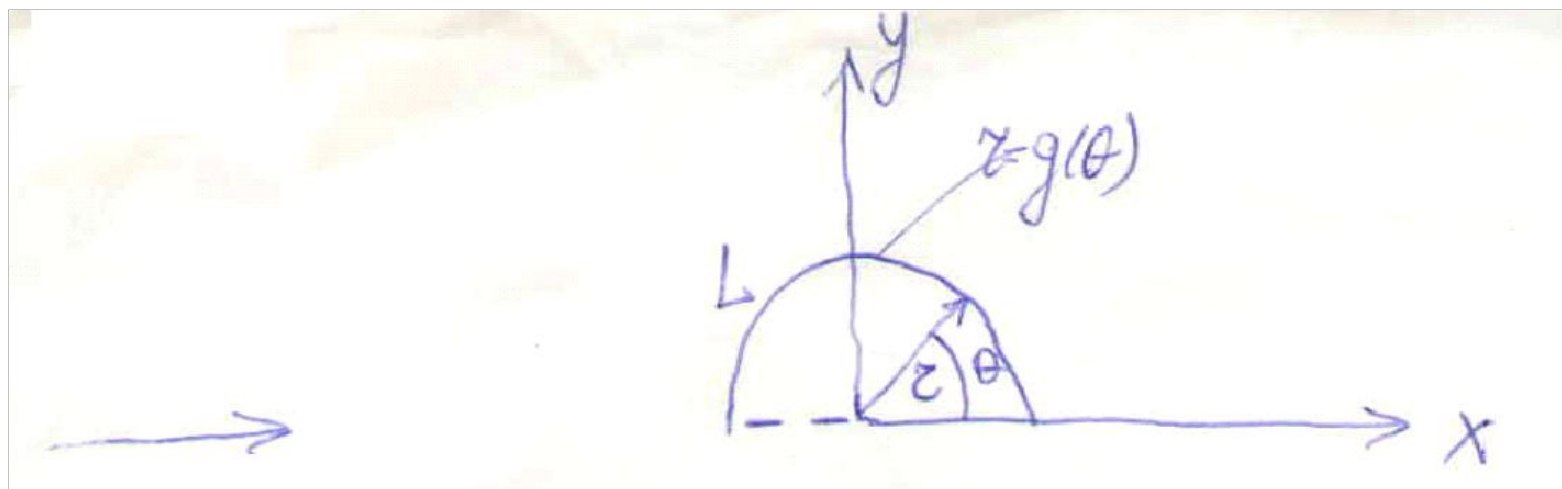
где $\psi_0(x, y) = \frac{y^{1+\varepsilon}}{1+\varepsilon},$

$$M_0 = 4 \ln RR_1^{-1}, M_1 = R_1[(2-m)K - 2E], m = 4y\eta / R_1^2$$

$$R^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2, R_1^2 = (x-\xi)^2 + (y+\eta)^2$$

K, E – полные эллиптические интегралы первого и второго рода с модулем m , точка

$(\xi, \eta) \in L, (x, y)$ – произвольная точка пространства.



Рассмотрим осесимметричный случай $\varepsilon = 1$. Подставляя (4) в (3), переходя в осевой плоскости течения к полярным координатам (r, ϑ) и полагая уравнение обтекаемого тела в этой плоскости $r = g(\vartheta)$, имеем соотношение

$$g^2(\vartheta) \sin^2 \vartheta + \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \gamma(\alpha) A[(2-m)K - 2E] L[g(\alpha)] d\alpha = 0 \quad (5)$$

где

$$L^2[g(\alpha)] = g^2(\alpha) + g^2(\vartheta), A^2 = g^2(\vartheta) + g^2(\alpha) - 2g(\alpha)g(\vartheta) \cos(\vartheta + \alpha),$$

$$m = 4g(\vartheta)g(\alpha) \sin \vartheta \sin \alpha / A^2$$

Ядро (5) имеет логарифмическую особенность. Для нахождения γ можно использовать равносильное сингулярное ИУ:

$$g(\theta)C\sin\theta - \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \gamma(\alpha) \left\{ BA^{-1}[(2-m)K - 2E] + 2 \left[\frac{E}{1-m} - K \right] [CA^{-1}g(\alpha)\sin\alpha - 2BA^{-3}g(\alpha)g(\theta)\sin\alpha\sin\theta] \right\} L(g(\alpha))d\alpha = 0$$

$$B = g'(\theta)g(\theta) - g'(\theta)g(\alpha)\cos(\theta + \alpha) + g(\theta)g(\alpha)\sin(\theta + \alpha)$$

$$C = g'(\theta)\sin\theta + g(\theta)\cos\theta$$

Полученное уравнение может быть решено численно, путём замены её разностно-суммирующим аналогом с использованием МДВ. Для отрезка $(0, \pi)$ введем сетку

$$\alpha_k = hk, \quad k = 1, 2, \dots, n,$$

$$\theta_j = \alpha_j + \frac{h}{2}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

Полученный аппроксимирующий аналог имеет вид :

$$g(\theta_j) C \sin \theta_j - \frac{1}{4\pi} \sum_{k=1}^n \gamma(\alpha_k) \left\{ BA^{-1} [(2-m)K - 2E] + 2 \left[\frac{E}{1-m} - K \right] [CA^{-1} g(\alpha_k) \sin \alpha_k - 2BA^{-3} g(\alpha_k) g(\theta_j) \sin \alpha_k \sin \theta_j] \right\} L(g(\alpha_k)) = 0$$

Некоторые результаты численного решения полученной СЛАУ, иллюстрирующие сходимость решения от сетки показаны в таблице.

θ	n=10	n=20	n=40	$\rho_{20-\rho_{10}}$	$\rho_{40-\rho_{20}}$
$\frac{\pi}{5}$	0.6667	0.790981	0.838468	0.124281	0,047487

Краевые задачи теории фильтрации со свободной границей

Основным соотношением теории фильтрации является закон фильтрации, Дарси который устанавливает связь между вектором скорости фильтрации и тем полем давления, которое вызывает фильтрационное движение

$$\vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p,$$

где p – давление; μ – гидродинамическая вязкость; k – проницаемость

Закон фильтрации вязкопластической нефти через пористую среду

$$\vec{v} = 0, \text{ если } |\nabla p| < \tau_o; \quad \vec{v} = -\frac{k}{\mu} \left(1 - \frac{\tau_o}{|\nabla p|}\right) \nabla p, \text{ если } |\nabla p| \geq \tau_o$$

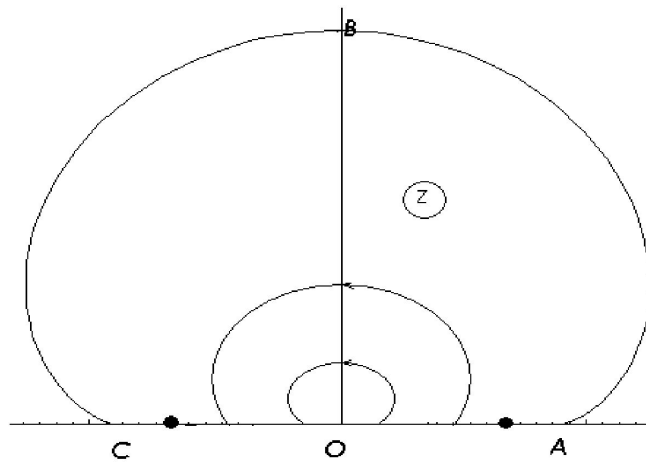
где $\tau_o = \alpha \tau_* \sqrt{m/k}$ условимся называть начальным градиентом сдвига или начальным градиентом

Альтернативная модель фильтрации :

$$\vec{v} = 0, \text{ если } |\nabla p| < \tau_o; \quad \vec{v} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \text{ если } |\nabla p| \geq \tau_o$$

Рассмотрим фильтрационный поток, образуемый диполем с моментом $-M$, помещённым в начало координат. В силу малости градиентов давления образуется застойная зона ABC с неизвестной границей, вдоль которой модуль скорости равен минимальной скорости $v_o = \frac{k}{\mu} G$. Т.о. зона течения будет иметь

вид, изображённый на рис. , если ограничиться рассмотрением течения при $\text{Im } z \geq 0$.



Параметрическое решение задачи, полученное методами ТФКП

$$x(\omega) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{1}{2} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \ln \frac{1 + \gamma^2 \omega^2}{\gamma(1 + \omega^2)} + \frac{1 - \gamma^2 \omega^4}{(1 + \omega^2)(1 + \gamma^2 \omega^2)} \right]$$

$$y(\omega) = \frac{1}{\pi\varepsilon} \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} \operatorname{arctg} \frac{(\gamma - 1)\omega}{1 + \gamma\omega^2} - \frac{\gamma\omega}{1 + \gamma^2 \omega^2} - \frac{\omega}{1 + \omega^2} \right]$$

При этом численное значение параметра γ , используемое в системе, может быть найдено из уравнения

$$2\pi\varepsilon = \frac{(\gamma + 1)^2}{(\gamma - 1)^2} \ln \frac{(\gamma + 1)^2}{4\gamma} - 1, \quad \varepsilon = \frac{av_o}{Q}, \quad \gamma > 1,$$

Соответствующая краевая задача

$$\Delta p = 0 \quad \text{в области } \Omega \quad (1)$$

$$-\frac{k}{\mu} \lim_{r_j \rightarrow 0} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial p}{\partial n} d\gamma_j = Q_j, \quad i = 1, 2 \quad (2)$$

$$\frac{\partial p^+}{\partial n} = 0, \quad \text{на контуре } \partial\Omega \quad (3)$$

$$\left| \frac{\partial p}{\partial s} \right| = G, \quad \text{на контуре } \partial\Omega \quad (4)$$

Здесь $\partial\Omega$ - граница застойной области, γ_j - контур, охватывающий j -тую скважину с дебитом Q_j , расположенную в точке (x_j, y_j) ; n, s - внутренняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega$; κ - заданная постоянная проницаемости среды. Индексом плюс отмечено предельное значение нормальной производной давления при приближении к границе $\partial\Omega$ изнутри.

Согласно методу ГИУ, решение задачи - функцию распределения давления будем искать в виде суперпозиции потенциала внешнего поля $p_o(x, y)$ и потенциала простого слоя с неизвестной плотностью ρ , сосредоточенной на контуре $\partial\Omega$:

$$p(x, y) = p_o(x, y) + \int_{\partial\Omega} \rho(\xi, \eta) \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} d\sigma,$$

где
$$p_o(x, y) = -\sum_{i=1}^2 \frac{Q_i \mu}{2\pi k} \ln \sqrt{(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2},$$

Здесь (ξ, η) – точка, принадлежащая контуру $\partial\Omega$; (x, y) – произвольная точка в пространстве R^2 .

Пусть контур границы застойной области $\partial\Omega = \{r = g(\theta), \text{ где } 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$ задан в полярных координатах. Подставляя выражение для функции давления $p(x, y)$ в граничные условия и учитывая, что нормальная производная потенциала простого слоя терпит разрыв первого рода в точках контура $\partial\Omega$ со скачком $2\pi\rho$, получим систему двух интегральных уравнений

$$\frac{\partial p_o(x, y)}{\partial n} + \int_{\partial\Omega} \rho(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial n} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \partial\sigma - \pi\rho(x, y) = 0 \quad (5)$$

$$\left| \frac{\partial p_o(x, y)}{\partial s} + \int_{\partial\Omega} \rho(\xi, \eta) \frac{\partial}{\partial s} \ln \frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \partial\sigma \right| = G \quad (6)$$

Переходя в полученных уравнениях к полярным координатам и используя затем формулы для нахождения частных производных по направлению нормали и касательной, будем иметь систему двух интегродифференциальных уравнений для отыскания двух неизвестных функций: плотности $\rho(\theta)$, сосредоточенной на контуре $\partial\Omega$ и формы самого контура $g(\theta)$, где $0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned}
 & -\pi\rho(\theta) + \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\alpha)N[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)]}{\sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}} \cdot \sqrt{g^2(\alpha) + g'^2(\alpha)} d\alpha + \frac{Q\mu}{2\pi k} \times \\
 & \times (N[0, \theta, a, g(\theta)] - N[\pi, \theta, a, g(\theta)]) \cdot \frac{1}{\sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}} = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{Q\mu}{2\pi k} \cdot (K[0, \theta, a, g(\theta)] - K[\pi, \theta, a, g(\theta)]) \cdot \frac{1}{\sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}} + \int_0^{2\pi} \frac{\rho(\alpha)K[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)]}{\sqrt{g^2(\theta) + g'^2(\theta)}} \times \right. \\
 & \left. \times \sqrt{g^2(\alpha) + g'^2(\alpha)} = G \right.
 \end{aligned} \tag{8}$$

$$\text{Здесь } N[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] = \frac{g^2(\theta) - g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta - \alpha) - g'(\theta)g(\alpha)\sin(\theta - \alpha)}{g^2(\theta) - 2g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta - \alpha) + g^2(\alpha)}$$

и

$$K[\alpha, \theta, g(\alpha), g(\theta)] = \frac{(g(\alpha)\cos(\theta - \alpha) - g(\theta))g'(\theta) - g(\alpha)g(\theta)\sin(\theta - \alpha)}{g^2(\theta) - 2g(\theta)g(\alpha)\cos(\theta - \alpha) + g^2(\alpha)}$$

Перейдем теперь в уравнениях (7) и (8) к безразмерным величинам, полагая

$$\bar{\rho}(\theta) = \frac{\rho(\theta)}{G}, \quad \bar{g}(\theta) = \sqrt{\frac{G}{Da}} g(\theta), \quad \varepsilon = \frac{aG}{D}, \quad D = \frac{Q\mu}{\pi k}$$

В результате преобразований получим интегральные уравнения такого же вида с заменой $\rho(\theta)$ на $\bar{\rho}(\theta)$, $g(\theta)$ на $\bar{g}(\theta)$, a^2 на ε , G и aD , равными единице. Одновременно введя замену для плотностей

$$\tilde{\rho}(\theta) = \bar{\rho}(\theta) \cdot \sqrt{\bar{g}^2(\theta) + \bar{g}'^2(\theta)},$$

будем иметь систему уравнений (7) и (8) в окончательном виде:

$$\begin{aligned} & -\pi\tilde{\rho}(\theta) + \int_0^{2\pi} \tilde{\rho}(\alpha) N(\alpha, \theta, \bar{g}(\alpha), \bar{g}(\theta)) d\alpha + \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left\{ N(0, \theta, \sqrt{\varepsilon}, \bar{g}(\theta)) - \right. \\ & \left. - N(\pi, \theta, \sqrt{\varepsilon}, \bar{g}(\theta)) \right\} = 0 \end{aligned} \quad (9)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left(K(0, \theta, \sqrt{\varepsilon}, \bar{g}(\theta)) - K(\pi, \theta, \sqrt{\varepsilon}, \bar{g}(\theta)) \right) + \int_0^{2\pi} \tilde{\rho}(\alpha) K(\alpha, \theta, \bar{g}(\alpha), \bar{g}(\theta)) d\alpha \right| = \\ & = \sqrt{\bar{g}^2(\theta) + \bar{g}'^2(\theta)} \end{aligned} \quad (10)$$

Пусть точки $t_1 = 0, t_2, \dots, t_n, t_{n+1} = 2\pi$ разбивают отрезок $[0, 2\pi]$ на n равных частей длины $h=2\pi/n$, а точка t_{oj} является серединой отрезка $[t_{oj}, t_{oj+1}]$, $j=1, \dots, n$. Будем говорить, что точки множества $E_o = \{t_{oj}, j = 1, 2, \dots, n\}$ образуют каноническое разбиение отрезка $[0, 2\pi]$ с шагом h . Тогда вместо системы (9)-(10) будем исследовать следующий аппроксимирующий аналог

$$-\pi\tilde{\rho}(\theta_j) + h \cdot \sum_{k=1}^n \tilde{\rho}(\alpha_k) N(g(\alpha_k), g(\theta_j)) = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \cdot \left\{ N(\pi, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) - N(0, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) \right\} \quad (11)$$

$$\left| \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \left\{ K(0, \theta, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) - K(\pi, \theta, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) \right\} + h \cdot \sum_{k=1}^n \tilde{\rho}(\alpha_k) K(g(\alpha_k), g(\theta_j)) \right| = \sqrt{g^2(\theta_j) + g'^2(\theta_j)}, \quad (12)$$

где точки α_j и θ_j принадлежат множеству E_o , n – нечётное число.

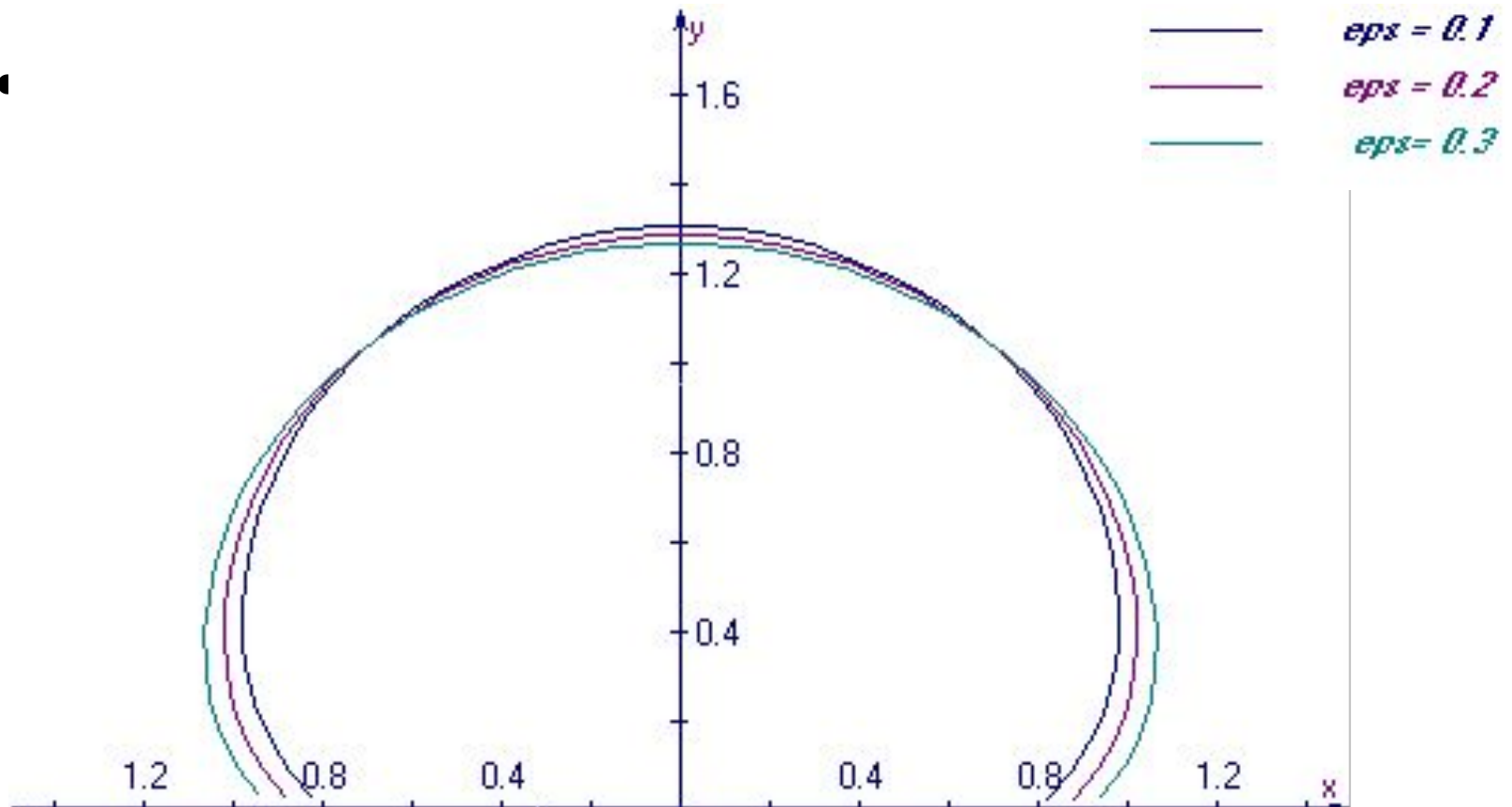
Пользуясь симметрией контура и плотностей, сосредоточенных на этом контуре, систему нелинейных уравнений, справедливую для отрезка интегрирования $[0, 2\pi]$, можно переписать для отрезка $[0, \pi]$. Действительно, т.к. $\rho(\alpha)=\rho(-\alpha)$ и $g(\alpha)=g(-\alpha)$, $0 \leq \alpha \leq \pi$, то система (11) - (12) на отрезке $[0, \pi]$ примет следующий вид

$$\begin{aligned}
 & -\pi\tilde{\rho}(\theta_j) + h \sum_{k=1}^m \tilde{\rho}(\alpha_k) \{N(\alpha_k, \theta_j, g(\alpha_k), g(\theta_j)) + N(-\alpha_k, \theta_j, g(\alpha_k), g(\theta_j))\} = \\
 & = \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \{N(\pi, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) + N(0, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j))\} \quad j=1, 2, \dots, m, \quad (13)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \left| \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}} \{K(0, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j)) + K(\pi, \theta_j, \sqrt{\varepsilon}, g(\theta_j))\} + h \sum_{k=1}^m \tilde{\rho}(\alpha_k) \{K(\alpha_k, \theta_j, g(\alpha_k), g(\theta_j)) + \right. \\
 & \left. + K(-\alpha_k, \theta_j, g(\alpha_k), g(\theta_j))\} = \sqrt{g^2(\theta_j) + g'^2(\theta_j)}, \quad j=1, 2, \dots, m \quad (14)
 \end{aligned}$$

где $m = n/2$, n -нечётное число.

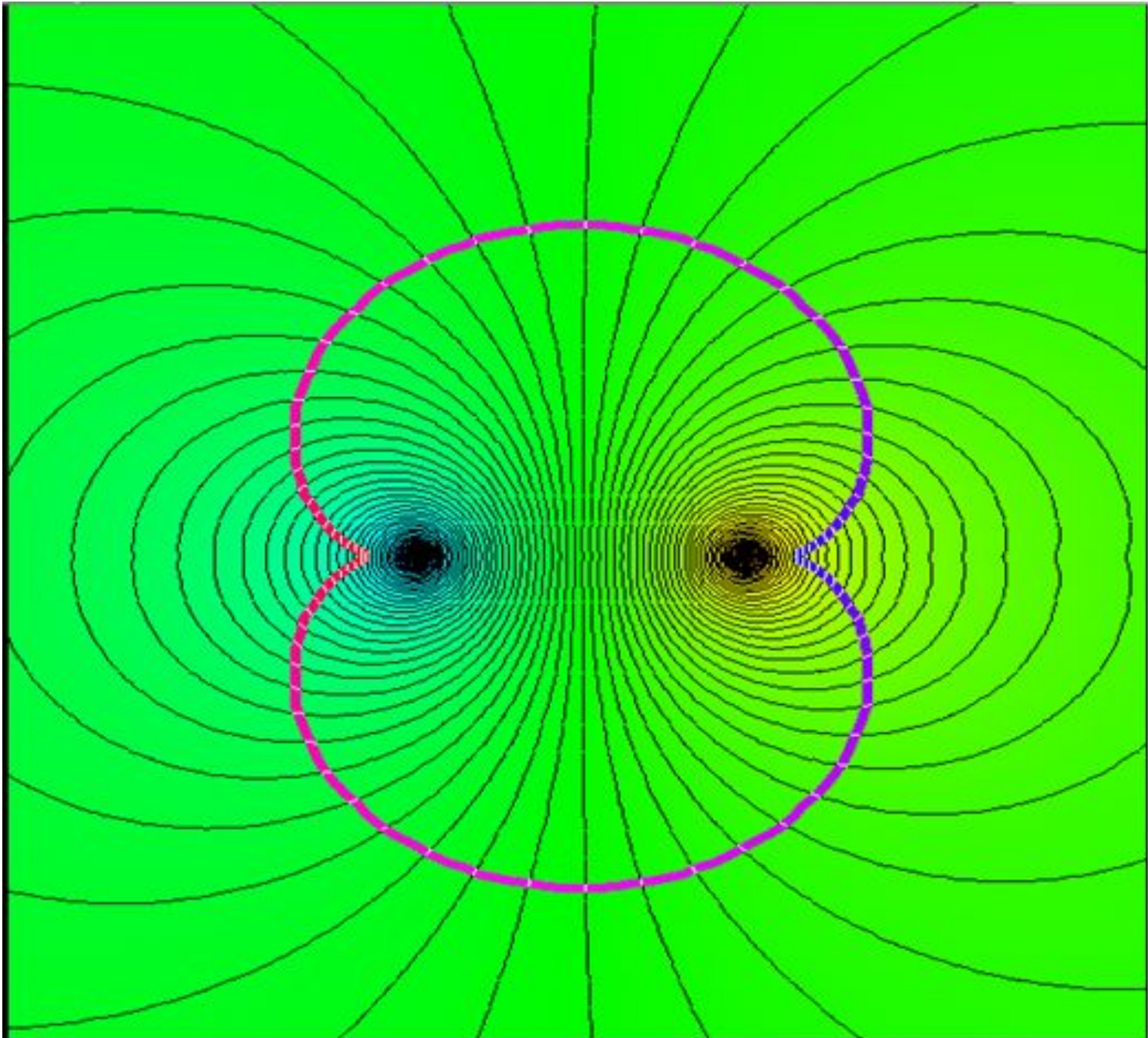
Полученные численные решения



В таблице показана зависимость функции $\bar{g} = \sqrt{\frac{G}{Da}}g$, описывающей форму контура застойной области от полярного угла θ , полученная для $\varepsilon = 0.1$ на 20, 60, 100 узлах разностной сетки для $0 \leq \theta \leq \pi$.

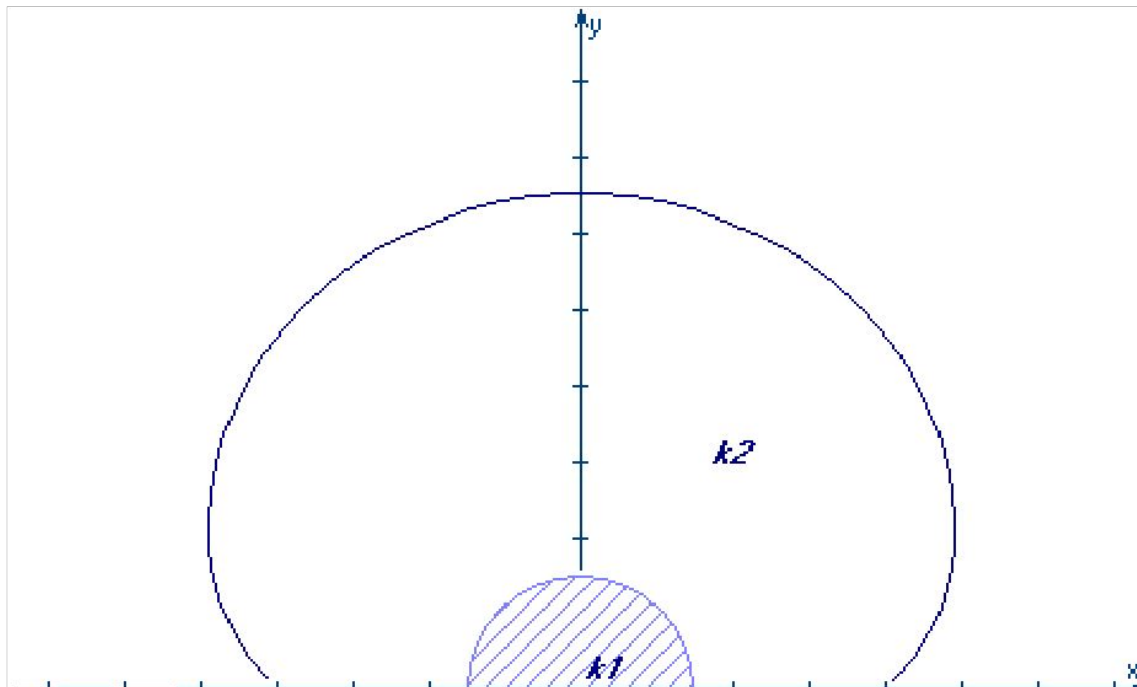
В качестве начального приближения использовано аналитическое решение, соответствующее $\varepsilon = 0.11$.

Угол θ	n = 20	n = 60	n = 100	аналитич.
0.157	0.921735	0.921707	0.921707	0.921707
0.471	1.10434	1.10432	1.10432	1.10432
0.785	1.2158	1.21579	1.21579	1.21579
1.099	1.28207	1.28206	1.28206	1.28206
1.414	1.31305	1.31304	1.31304	1.31304
1.728	1.31305	1.31304	1.31304	1.31304
2.042	1.28207	1.28206	1.28206	1.28206
2.356	1.2158	1.21579	1.21579	1.21579
2.67	1.10434	1.10432	1.10432	1.10432
2.985	0.921735	0.921707	0.921707	0.921707



Случай кусочно-однородного пласта

Рассмотрим плоскую задачу изотермического вытеснения вязкопластической жидкости водой в кусочно-однородном недеформируемом пористом пласте. Пусть в области фильтрации Ω_2 имеется две скважины интенсивности Q_j , ($j = 1, 2$), отстоящие друг от друга на расстоянии $2a$ и неоднородное включение Ω_1 с проницаемостью k_1 (см. рис.).



$$\Delta p = 0 \text{ в области } \Omega_2 \quad (15)$$

$$-\frac{k}{\mu} \lim_{\gamma_j \rightarrow 0} \oint_{\gamma_j} \frac{\partial p}{\partial n_j} d\gamma_j = Q_j, \quad j = 1, 2 \quad (16)$$

$$\frac{\partial p^+}{\partial n_2} = 0, \quad \left| \frac{\partial p}{\partial s} \right| = G \quad \text{на контуре } \partial\Omega_2 \quad (17)$$

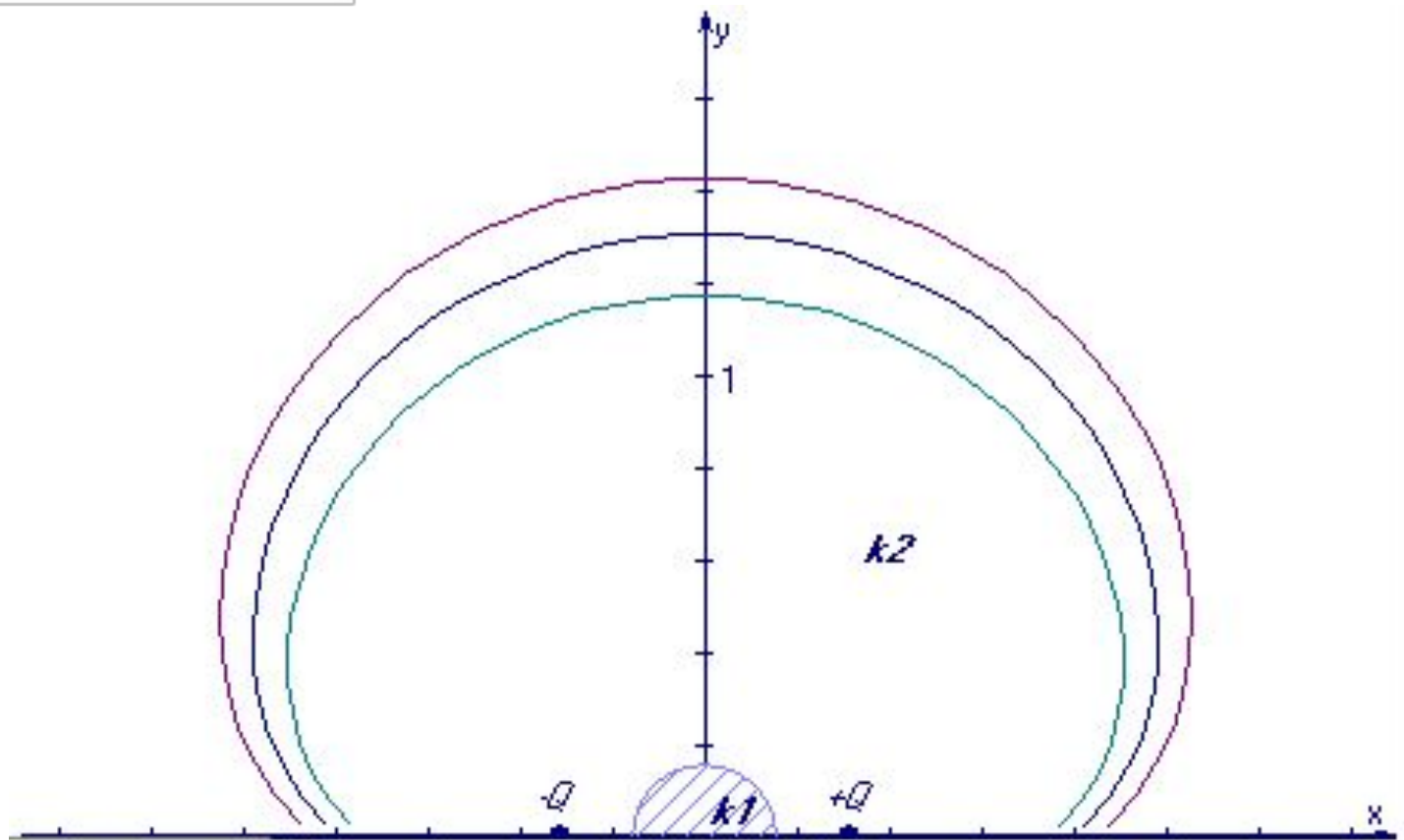
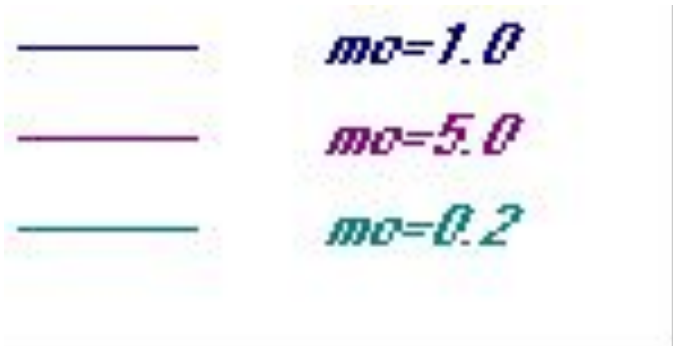
$$p^+ = p^-, \quad \left[k_1 \frac{\partial p(x, y)}{\partial n_1} \right]^+ = \left[k_2 \frac{\partial p(x, y)}{\partial n_1} \right]^- \quad \text{на контуре } \partial\Omega_1 \quad (18)$$

Здесь $\partial\Omega_1$ - замкнутый контур скачка проницаемости, γ_j - контур, охватывающий j -тую скважину с дебитом Q_j , расположенную в точке (x_j, y_j) ($j = 1, 2$), n_i (n_j), s_i - внутренняя нормаль и касательная к контуру $\partial\Omega_i$ (γ_j), k_1, k_2 - заданные постоянные проницаемости областей $\Omega_2 \setminus \Omega_1$ и Ω_2 соответственно.

$$\begin{aligned}
& -\pi\rho_2(\theta) + \int_0^{2\pi} \rho_1(\alpha) N(g_1(\alpha), g_2(\theta)) \frac{\sqrt{g_1^2(\alpha) + g_1'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} d\alpha + \int_0^{2\pi} \rho_2(\alpha) N(g_2(\alpha), g_2(\theta)) \times \\
& \times \frac{\sqrt{g_2^2(\alpha) + g_2'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} d\alpha + \frac{Q\mu}{2\pi k} \{N(0, \theta, a, g_2(\theta)) - N(\pi, \theta, a, g_2(\theta))\} \frac{1}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} = (
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{Q\mu}{2\pi k_i} \{K(0, \theta, a, g_2(\theta)) - K(\pi, \theta, a, g_2(\theta))\} \frac{1}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} + \int_0^{2\pi} \rho_1(\alpha) K(g_1(\alpha), g_2(\theta)) \times \right. \\
& \left. \times \frac{\sqrt{g_1^2(\alpha) + g_1'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} d\alpha + \int_0^{2\pi} \rho_2(\alpha) K(g_2(\alpha), g_2(\theta)) \frac{\sqrt{g_2^2(\alpha) + g_2'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_2^2(\theta) + g_2'^2(\theta)}} d\alpha \right| = G
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& (k_1 + k_2)\pi\rho_1(\theta) + (k_2 - k_1) \left(\frac{Q\mu}{2\pi k_i} \frac{1}{\sqrt{g_1^2(\theta) + g_1'^2(\theta)}} \{N(0, \theta, a, g_1(\theta)) - N(\pi, \theta, a, g_1(\theta))\} + \right. \\
& + \int_0^{2\pi} \rho_1(\alpha) N(g_1(\alpha), g_2(\theta)) \frac{\sqrt{g_1^2(\alpha) + g_1'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_1^2(\theta) + g_1'^2(\theta)}} d\alpha + \int_0^{2\pi} \rho_2(\alpha) N(g_2(\alpha), g_2(\theta)) \times \\
& \left. \times \frac{\sqrt{g_2^2(\alpha) + g_2'^2(\alpha)}}{\sqrt{g_1^2(\theta) + g_1'^2(\theta)}} d\alpha \right) = 0
\end{aligned}$$



- $mc=1.0$
- $mc=2.0$
- $mc=0.6$

