Тема: Исследование функции на монотонность и экстремум. Построение графиков.

Исследовать функцию на монотонность и экстремумы:

15. 1) $f(x)=x^2-x$; 2) $f(x)=x^2+3x$.

16. 1) $f(x)=-x^2+2x$; 2) $f(x)=-x^2-x$.

17. 1) $f(x)=x^2-8x+12$; 2) $f(x)=x^2-4x+3$; 3) $f(x)=x^2-10x+9$.

18. 1) $f(x)=-x^2+2x+3$; 2) $f(x)=-x^2-x+6$. 3) $f(x)=$
$=-2x^2+x+1$.

19. 1) $f(x)=2x^4-x$; 2) $f(x)=-\frac{1}{4}x^4+8x$.

20. 1) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-4x$; 2) $f(x)=\frac{1}{3}x^3-x^2$.

21. 1) $f(x)=2x^3-9x^2+12x-8$; 2) $f(x)=2x^3-3x^2-12x+8$;
3) $f(x)=2x^3+9x^2+12x-2$.

22. 1) $f(x)=5-2\sqrt[3]{x^2}$; 2) $f(x)=3\sqrt[3]{x^2}-x$.

Решать, отмеченные кружком.

295. Исследуйте функцию на возрастание, убывание и экстремумы. Постройте график функции:

а) $f(x)=\frac{1}{2}x^4-8x^2$;

б) $f(x)=\frac{3x}{1+x^2}$;

в) $f(x)=2x-\frac{1}{6}x^3$;

г) $f(x)=\frac{x^2-2x+2}{x-1}$.

Кривая $y=f(x)$ иазывается *выпуклой вниз* в промежутке $a<x<b$, если она лежит выше касательной в любой точке этого промежутка (рис. 33, *а*).

Кривая $y=f(x)$ иазывается *выпуклой вверх* в промежутке $a<x<b$, если оиа лежит ииже касательиой в любой точке этого промежутка (рис. 33, *б*).

Промежутки, в которых график фуикции обращеи выпуклостью вверх или вииз, иазываются *промежутками выпуклости графика функции*.

Выпуклость вииз или вверх кривой, являющейся графиком фуикции $y=f(x)$, характеризуется знаком ее второй производиой: *если в некотором промежутке $f''(x)>0$, то кривая выпукла вниз в этом промежутке; если же $f''(x)<0$, то кривая выпукла вверх в этом промежутке.*

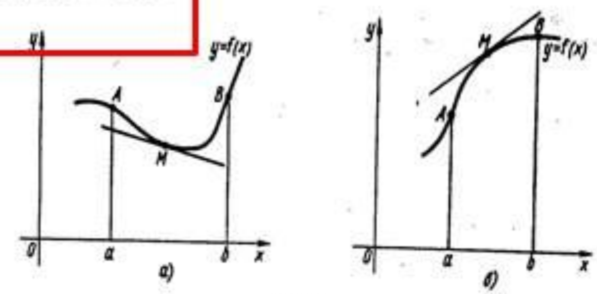

Рис. 33

Точка графика функции $y=f(x)$, разделяющая промежутки выпуклости противоположных направлений этого графика, называется *точкой перегиба*.

Точками перегиба могут служить только *критические точки*, принадлежащие области определения функции $y=f(x)$, в которых вторая производная $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

Если при переходе через критическую точку x_0 вторая производная $f''(x)$ меняет знак, то график функции имеет точку перегиба $(x_0; f(x_0))$.

Правило нахождения точек перегиба графика функции $y=f(x)$

I. Найти вторую производную $f''(x)$.

II. Найти критические точки функции $y=f(x)$, в которых $f''(x)$ обращается в нуль или терпит разрыв.

III. Исследовать знак второй производной $f''(x)$ в промежутках, на которые найденные критические точки делят область определения функции $f(x)$. Если при этом критическая точка x_0 разделяет промежутки выпуклости противоположных направлений, то x_0 является абсциссой точки перегиба функции.

IV. Вычислить значения функции в точках перегиба.

Найдите точки перегиба следующих кривых:

58. 1) $f(x)=x^3-x$; 2) $y=\frac{1}{3}x^3-3x^2+8x-4$.

59. 1) $f(x)=x^4-10x^3+36x^2-100$;

Схема исследования функции с помощью производной:

1. Найти область определения функции.
2. Выяснить является ли функция четной или нечетной.
3. Найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это не вызывает затруднений).
4. Найти промежутки возрастания и убывания функции.
5. Найти экстремумы функции.
6. Найти точки перегиба (по требованию)
7. Построить график функции.

3) Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график

$y = x^3 - 3x^2 + 6.$

4) Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график

$y = -x^4 + 8x^2 - 9.$

5) Исследуйте функцию с помощью производной и постройте её график

) $y = 3x^2 - 4x + 5;$

Упражнения

Исследуйте функцию и постройте ее график (296—297)

296. а) $f(x) = x^2 - 2x + 8$; б) $f(x) = -\frac{2x^2}{3} + x + \frac{2}{3}$;

в) $f(x) = -x^2 + 5x + 4$; г) $f(x) = \frac{x^2}{4} + \frac{x}{16} + \frac{1}{4}$.

297. а) $f(x) = -x^3 + 3x - 2$; б) $f(x) = x^4 - 2x^2 - 3$;

в) $f(x) = x^3 + 3x + 2$; г) $f(x) = 3x^2 - x^3$.