Секрет обучения заключается в уважении к ученику (Ральф Эмерсон).

Линейная алгебра

Лекция 5

Агаев Рафиг Пашаевич

(доктор физико-математических наук)

Система лин. однор. уравнений. Фундаментальная система решений

Общее решение неоднородной системы

Псевдообратные матрицы

Решение СЛУ с помощью обобщенно обратных матрицы – псевдорешение.

Продолжение. О решении однородной СЛУ

- Рассматриваем однородную систему

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = 0. \end{cases} \quad (1)$$

Вспомним теорему с предыдущей лекции:

Теорема 1. Система однородных уравнений $A\mathbf{x}=\mathbf{0}$ имеет единственное нулевое решение $(0,\dots,0)$, если $\operatorname{rank} A = n$, и бесконечно много решений, если $\operatorname{rank} A < n$.

В частности система n линейных однородных уравнений с n неизвестными тогда и только тогда обладает решениями, отличными от нуля, когда определитель этой системы равен нулю.

Решение СЛОУ

Всякая система n-мерных векторов, состоящая более чем из n векторов, будет линейно зависимы.

Вывод: из числа решений однородной системы (1), являющихся n-мерными векторами, можно выбрать конечную максимальную линейно независимую систему векторов. (Максимально в том смысле, что всякое другое решение системы (1) будет линейной комбинацией решений, входящих в эту выбранную систему).

Определение. Всякая максимальная линейно независимая система решений однородной системы (1) называется **фундаментальной системой решений.**

Если ранг r матрицы из коэффициентов системы линейных однородных уравнений (1) меньше числа неизвестных n, то всякая фундаментальная система решений системы (1) состоит из n-r решений.

Число свободных неизвестных равно n-r

Пример. Фундаментальная система решений СЛОУ

- $$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 8x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 2x_1 - 2x_2 - 3x_3 - 7x_4 + 2x_5 = 0 \\ x_1 + 11x_2 - 12x_3 + 34x_4 - 5x_5 = 0 \\ x_1 - 5x_2 + 2x_3 - 16x_4 + 3x_5 = 0. \end{cases}$$

Ранг матрицы системы равен 2. Поскольку первые два уравнения линейно независимы, ограничимся только первыми двум уравнениями. Общее решение системы получим в виде:

$$x_1 = \frac{19}{8} x_3 + \frac{3}{8} x_4 - \frac{1}{2} x_5,$$

$$x_2 = \frac{7}{8} x_3 - \frac{25}{8} x_4 + \frac{1}{2} x_5.$$

Рассмотрим вектор свободных неизвестных (x_3, x_4, x_5). Для нахождения фундаментальную систему решений рассматриваем три лин. независимых вектора (x_3, x_4, x_5): (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1).

Вычисляя значения x_1 и x_2 получим след. фундам. систему решений

$$\alpha_1 = \left(\frac{19}{8}, \frac{7}{8}, 1, 0, 0\right), \quad \alpha_2 = \left(\frac{3}{8}, -\frac{25}{8}, 0, 1, 0\right),$$

$$\alpha_3 = \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0, 0, 1\right).$$

О множестве решений СЛНОУ

- Рассмотрим систему неоднородных уравнений:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s. \end{cases} \qquad (2)$$

Приведенной системой для (2) – это система однородных уравнений, полученная из (2) «обнулением» правой части – свободных членов.

Теорема 1. Сумма любого решения (2) с любым решением приведенной системы (1) снова будет решением (2).

Следствие из теоремы 1. Пусть $\mathbf{x}_{\text{част}}$ - одно из решений системы (2), а $(\mathbf{x_1}, \dots, \mathbf{x}_r)$ – фундаментальная система решений приведенной системы. Тогда любое решение (2) можно представить как

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{част}} + \mathrm{c}_1\mathbf{x_1} + \cdots + \mathrm{c}_{\mathrm{n-r}}\mathbf{x_r} \qquad (3)$$

и наоборот, каждый вектор (3) есть решение системы (2).

Пример (3.236. Демидович)

- Найти общее решение неоднор. системы, используя фундаментальную систему решений для однородной системы

$$\begin{aligned}
2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + x_5 &= 1,\\
x_1 - x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 &= 0,\\
3x_1 + 3x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 4x_5 &= 2,\\
4x_1 + 5x_2 - 5x_3 - 5x_4 + 7x_5 &= 3.
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & -3 & -3 & 4 & 2\\ 4 & 5 & -5 & -5 & 7 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 3 & -3 & -3 & 5 & 1\\ 0 & 6 & -6 & -6 & 10 & 2\\ 0 & 9 & -9 & -9 & 15 & 3 \end{array}\right).$$

Очевидно, что ранг матрицы системы равен 2. Фундаментальная система решений системы состоит из 5-2=3 решений.

$\mathbf{x} = \mathbf{x}_{\text{част}} + c_1\mathbf{x_1} + c_2\mathbf{x_2} + c_3\mathbf{x}_3$. $\mathbf{x}_{\text{част}} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, 0,0,0\right)$.

Находим фундаментальную систему решений Однородной системы исходя из линейно независимых векторов (x_3, x_4, x_5): (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1):

$x_2 = \frac{1}{3}(3x_3 + 3x_4 - 5x_5)$, $x_1 = (x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5)$.

$\mathbf{x_1} = (0,1,1,0,0)$, $\mathbf{x_2} = (0,1,0,1,0)$, $\mathbf{x_3} = \left(\frac{1}{3}, -\frac{5}{3}, 0,0,1\right)$.

Псевдообратная матрица

- Рассмотрим систему лин. уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}.$$

Если A невырожденная матрица, то $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$.

Но, если матрица A вырожденная, т.е. не имеет обратной матрицы или же – не квадратная, то возникают два вопроса.

Первый вопрос: если система совместная, как

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 3 \\ 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 4, \end{cases}$$

то возникает необходимость в выборе единственного решения системы. А желательно, что решение было получено аналитически (типа $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$).

Вторя проблема возникает, когда система вовсе не совместная, но тоже «нужно хоть какое-то, приближенное решение».

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 3 \\ x_1 + 2x_2 = 5. \end{cases}$$

Псевдообратная матрица

- В 20-м веке американским математиком Э. Мур (1920) и английским математиком Р. Пенроуз (1955) были отвечены на эти вопросы.

Определение 1. Пусть $A_{m\times n}$ - произвольная действительная матрица. Матрицу A^{+} называют псевдообратной или обобщенно обратной матрицей по Мура-Пенроузу, если для нее выполняются следующие 4 условия:

1) $AA^{+}A = A$,
2) $A^{+}AA^{+} = A^{+}$,
3) $(AA^{+})^{T} = AA^{+}$,
4) $(A^{+}A)^{T} = A^{+}A$.

Для любой матрицы $A_{m\times n}$ существует псевдообратная матрица $A^{+}_{n\times m}$.

Псевдообратная матрица

- Теорема 1. Для любой матрицы $A_{m\times n}$ всегда существует, причем единственная псевдообратная матрица A^+.

Доказательство. Пусть B и C - псевдооратные матрицы и поэтому же удовлетворяют условиям 1)-4).

Тогда

$$B = BAB = B(AB)^T = BB^TA^T = BB^T(ACA)^T = B(AB)^T(AC)^T =$$
$$= BABAC = BAC = (BA)^TCAC = (BA)^T(CA)^TC = A^TB^TA^TC^TC =$$
$$= A^TC^TC = CAC = C.$$

Задача 1. Если A – невырожденная матрица, то $A^+ = A^{-1}$.

Доказательство. $AA^{-1}A = AI = A$ и $A^{-1}AA^{-1} = A^{-1}I = A^{-1}$.

Задача 2. Пусть , $A = \begin{bmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$, тогда $A^+ = \lambda A^T$, где $\lambda = \frac{1}{a_1^2+\cdots+a_n^2}$.

Выполнение условий 1)-4) легко проверяется.

Основные свойства псевдообратной матрицы

1. $(A^+)^+ = A$,
2. $(A^{\mathrm{T}})^+ = (A^+)^T$.
3. $\operatorname{rank} A^+ = \operatorname{rank} A$.

Замечание. Если ранг матрицы A равен 1, то все строки (столбцы) матрицы A пропорциональны.

Задача 4. Доказать, что если ранг матрицы A равен 1, то

$$A^+ = \frac{1}{\operatorname{Tr}(AA^T)} A^T.$$

Определение 2. $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового (строчного) ранга, если rank $A=n$ (rank $A=m$).

Заметим, что матрица AA^+ - идемпотентная.

Свойства «обратимости»

$$A\,A^{-1} = A^{-1}A = I,$$

$$\begin{aligned}(A^{-1})^{-1} &= A,\\ (A^{T})^{-1} &= (A^{-1})^{T},\\ (A^{*})^{-1} &= (A^{-1})^{*},\\ (AB)^{-1} &= B^{-1}A^{-1},\end{aligned}$$

Разложение по матрицам полного ранга

Теорема 2. 1) Пусть $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового ранга и rank $A=n$. Тогда

$$A^{+}=(A^{T}A)^{-1}A^{T}.$$

2) Пусть $A_{m\times n}$ – матрица полного строчного ранга и rank $A=m$. Тогда

$$A^{+}=A^{T}(AA^{T})^{-1}.$$

Заметка. Если матрица $A_{m\times n}$ – матрица полного столбцового ранга и rank $A=n$, то матрица $A^{T}A$ обратима.

Пример 1. Вычислить обратную матрицу

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 1 & 2\\ -1 & 3\end{bmatrix}.$$

Очевидно, что

$$A^{T}A=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 13\end{bmatrix},$$

$$A^{+}=(A^{T}A)^{-1}A^{T}=\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 13\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}=\frac{1}{38}\begin{bmatrix}13 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}=$$

$$\frac{1}{38}\begin{bmatrix}13 & 15 & -10\\ 1 & 7 & 8\end{bmatrix}.$$

Разложение по матрицам полного ранга

- Теорема 3. (скелетное разложение). Пусть A - матрица порядка $m \times n$. Тогда существуют $m \times r$ матрица F полного столбцового ранга и $r \times n$ матрица G полного строчного ранга, такие, что

$$A = FG.$$

Доказательство приведено в [AleskPiont].

Пример 5. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$

Мы должны найти разложение $A = FG$.

Ранг матрицы A равен 2. Первые два столбца матрицы A линейно независимы. Положим $F = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}.$

Ищем G в виде $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \end{bmatrix}$. **Почему?**

Выражаем третий столбец через первые 2 столбца

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix}. \qquad (1)$$

Разложение по матрицам полного ранга

Из (1) получаем систему уравнений и решаем ее.

$$\begin{cases} a+2b=3 \\ 4a+5b=6 \\ 7a+8b=9. \end{cases} \to \begin{cases} a+2b=3 \\ -3b=-6. \end{cases} \to \begin{cases} a=-1 \\ b=2. \end{cases}$$

Итак, $A = FG \to \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}.$

Теорема 3. (основная формула для вычисления псевдообратной матрицы). Для любой матрицы A порядка $m \times n$ существует псевдообратная матрица A^+ и ее можно вычислить по формуле

$$A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T.$$

Вычислим псевдообратную матрицу из примера 5.

$$GG^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$$

$$F^TF = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

- $$A^+ = G^T(GG^T)^{-1}(F^TF)^{-1}F^T.$$

$$A^+ = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 66 & 78 \\ 78 & 93 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5/6 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 31/18 & -13/9 \\ -13/9 & 11/9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{36} \begin{bmatrix} -23 & -6 & 11 \\ -2 & 0 & 2 \\ 19 & 6 & -7 \end{bmatrix}.$$

1

Псевдообратная матрица и аппроксимация

- Рассмотрим систему лин. уравнений

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}. \qquad (2)$$

Пусть эта система не совместная.

Вектор $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$ минимальной длины называют нормальным псевдорешением системы (2) (или, решением наименьших квадратов), если

$$|A\mathbf{u} - \mathbf{b}| \leq |A\mathbf{x} - \mathbf{b}| \text{ для всех } \mathbf{x} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}.$$

Теорема 4. Нормальное псевдорешение – решение наименьших квадратов системы (2) – единственное и определяется формулой

$$\mathbf{x} = A^{+}\mathbf{b}.$$

Нормальное псевдорешение СЛУ

- Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 0. \end{cases}$$

Данная система – несовместная.

Строим матрицу: $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & -3 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

Ранг этой матрицы равен 2. Значит, A можно представить следующим скелетным разложением (full rank factorization)

$$A = FG = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

- Вычисляем F^TF и GG^T

$$F^TF = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6 \end{bmatrix}; \qquad (F^TF)^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2/3 \end{bmatrix};$$

$$GG^T = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}; \qquad (CG)^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 \\ 0 & 1/3 \end{bmatrix};$$

Далее, A^+ вычисляем по формуле $A^+ = G^T(GG^T)^{-1}\,(F^TF)^{-1}F^T$.

$$A^+ = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Итак, находим наилучшее решение

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Слайд 1

- Найти наилучшее решение системы линейных уравнений.

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 2x_3 = 3, \\ -x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 6, \\ x_2 - x_3 + x_4 = 9. \end{cases}$$

Данная система совместная. Хотя она отличается от предыдущей системы только последним уравнением, где правая часть равна 0.

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 3 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 4 & 1 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \\ 7 \end{bmatrix}.$$

Заключение. О применении СЛУ

- Пример 1. Рассмотрим производство трех товаров. Предположим, что все эти товары используются в производстве других товаров (для внутренних потребностей).

x_{ij} – количество i-го товара, использованного для производства j-го;

x_i – общее количество товара;

a_{ij} - количество i-го товара, использованного для производства единицы j-го товара:

$$a_{ij} = \frac{x_{ij}}{x_j}.$$

Пусть $y_1 = 20, y_2 = 30, y_3 = 40,$ – потребности в 1-м, 2-м и 3-м товарах для конечного пользования (помимо внутренних потребностей),

Заключение. О применении СЛУ

$$\begin{cases} x_1 = 0{,}3x_1 + 0{,}2x_2 + 0{,}3x_3 + 20 \\ x_2 = 0{,}2x_1 + 0{,}3x_2 + 0{,}2x_3 + 30 \\ x_3 = 0{,}4x_1 + 0{,}6x_2 + 0{,}4x_3 + 40 \end{cases} \rightarrow \begin{aligned} 0{,}7x_1 - 0{,}2x_2 - 0{,}3x_3 = 20 \\ -0{,}2x_1 + 0{,}7x_2 - 0{,}2x_3 = 30 \\ -0{,}4x_1 - 0{,}6x_2 + 0{,}6x_3 = 40. \end{aligned}$$

Система имеет следующее матричное представление:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$

где

$$A = \begin{bmatrix} 0{,}7 & -0{,}2 & -0{,}3 \\ -0{,}2 & 0{,}7 & -0{,}2 \\ -0{,}4 & -0{,}6 & 0{,}6 \end{bmatrix}, \mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix}.$$

Решив систему получим

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 6 & 6 & 5 \\ 4 & 6 & 4 \\ 8 & 10 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 30 \\ 40 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 500 \\ 420 \\ 820 \end{bmatrix}.$$

Домашняя задача

[Демидович]

3.233*. Выяснить, образуют ли строки каждой из матриц

$$A=\begin{pmatrix} 30 & -24 & 43 & 50 & -5 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \\ 4 & 2 & 9 & -20 & -30 \end{pmatrix}, \quad B=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 9 & -20 & -3 \\ 1 & -11 & 2 & 13 & 4 \\ 9 & -15 & 8 & 5 & 2 \end{pmatrix}$$

фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{aligned} 3x_1+4x_2+2x_3+x_4+6x_5&=0,\\ 5x_1+9x_2+7x_3+4x_4+7x_5&=0,\\ 4x_1+3x_2-x_3-x_4+11x_5&=0,\\ x_1+6x_2+8x_3+5x_4-4x_5&=0. \end{aligned}$$

Решить неоднородную систему используя фунд. сист. реш. однородной системы. (Подсказка. Найти частное решение здесь положив, например, x_3=x_4=x_5=0, или еще как-то).

3.239.
$$\begin{aligned} x_1+2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=0,\\ x_1-2x_2-3x_3-4x_4-5x_5&=2,\\ 2x_2+3x_3+4x_4+5x_5&=-1. \end{aligned}$$

Домашняя задача

Задачи из книги Aleskerov_Piontkovski. Книгу Вам отправлял!

Вычислить псевдообратные матрицы.

1. Calculate $[1, 0]^+$.
2. Calculate
$$\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}^+.$$
3. Calculate $[3, 2, 1, 0]^+$.
4. Calculate
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}^+.$$
5. Calculate
$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{bmatrix}^+.$$

Домашняя задача

В задаче 7 нужно найти скелетное разложение матрицы A, т.е. $A=FG$.

Задача 8 решается так: сперва находится разложение FG указанной матрицы, а потом применяется теорема 3.

7. Find a full rank factorization of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 3 & 3 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

8. Calculate

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}^{+}.$$

Домашняя задача

- Найти нормальное псевдорешение системы

$$\begin{cases} 3x_1 - 2x_2 - x_3 = 4 \\ -x_1 + 2x_2 - x_3 = 1 \\ -x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 2. \end{cases}$$