§7. Вторая теорема о среднем. Формула Бонне

Теорема 1. Пусть функция $f:[a;b]\to R$ суммируема, $g:[a;b]\to R$ монотонна.

Тогда функция $f\cdot g$ суммируема и существует $\xi\in[a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = g(a)\int_a^{\xi} f(t)dt + g(b)\int_{\xi}^{b} f(t)dt. \qquad (1)$$

Доказательство теоремы опирается на лемму:

Лемма. Пусть функция $f:[a;b]\to R$ суммируема, $g:[a;b]\to[0;+\infty)$ убывает.

Тогда функция $f\cdot g$ суммируема и существует $\xi\in[a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = g(a)\int_a^{\xi} f(t)dt. \qquad (2)$$

Замечание. Переопределяя $g(b) := 0$, видим, что утверждение леммы представляет собой частный случай теоремы 1.

Доказательство. Очевидно (из неотрицательности и убывания), что g измерима и ограничена, причем

$$m = \min_{t\in[a;b]} g(t) = g(b), M = \max_{t\in[a;b]} g(t) = g(a).$$

Следовательно,

$$m \cdot f \le f \cdot g \le M \cdot f .$$

Отсюда и из измеримости $f \cdot g$ следует, что функция $f \cdot g$ суммируема на $[a;b]$, поэтому интегралы в (2) существуют и конечны.

Для $n \in \mathrm{N}$ разобьем сегмент $[a;b]$ на равные промежутки длины $\frac{b-a}{n}$ каждый:

$$J_{n1} = [a; x_{n,1}], J_{n2} = [x_{n,1}; x_{n,2}], \ldots, J_{nn} = [x_{n,n-1}; b]. \qquad (3)$$

Определим простые функции на $[a;b]$:

$$\varphi_n = \sum_{k=1}^{n} g(x_{n,k-1}) \cdot \chi_{J_{n,k}}, \quad n \in N. \tag{4}$$

Поскольку функция g убывает и неотрицательна, то, очевидно,

$$0 \le \varphi_n(t) \le g(a), \forall t \in [a;b], \forall n \in N \tag{5}$$

Если $x \in [a;b]$ и функция f в точке x непрерывна, то

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = g(x) \tag{6}$$

Действительно, пусть $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta > 0$ таково, что

$$|g(t) - g(x)| < \varepsilon \ \text{при} \ |t - x| < \delta.$$

Возьмем номер n_0 так, что $\dfrac{b-a}{n_0} < \delta$.

Пусть $n \ge n_0$. Выберем k так что $x \in J_{nk}$. По определению J_{nk} имеем

$$|x - x_{n,k-1}| \le \frac{b-a}{n} < \delta,$$

следовательно, $|g(x) - \varphi_n(x)| = |g(x) - g(x_{n,k-1})| < \varepsilon$.

Таким образом, равенство (6) доказано.

Убывающая функция имеет не более чем счетное число точек разрыва, значит, она непрерывна почти всюду. Следовательно равенство (6) справедливо почти всюду на $[a;b]$.

Из (5) следует, что последовательность функций

$$f \cdot \varphi_n : [a;b] \to R, n \in N \tag{7}$$

мажорируется на $[a;b]$ функцией $g(a) \cdot |f| : [a;b] \to R$, которая так же суммируема, как и функция f. Значит, к последовательности функций (7) применима теорема Лебега о мажорирующей сходимости. Применяя ее, получим

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t) dt = \int_a^b \lim_{n\to\infty} f(t) \cdot \varphi_n(t) dt = \lim_{n\to\infty} \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt \tag{8}$$

Введем функцию

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt, x \in [a;b].$$

Отметим, что по формуле Ньютона – Лейбница

$$\int_{J_{nk}} f(t)dt = F(x_{nk}) - F(x_{n,k-1}), \forall n,k \in N$$

Из (3) и (4) имеем

$$\int_a^b f(t)\cdot\varphi_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n}\int_{J_{nk}} f(t)\varphi_n(t)dt =$$

$$\sum_{k=1}^{n} g(x_{n,k-1})\int_{J_{nk}} f(t)dt = \sum_{k=1}^{n} g(x_{n,k-1})\cdot(F(x_{nk}) - F(x_{n,k-1})) =$$

<перегруппировав слагаемые в сумме, получим>

$$\sum_{k=1}^{n-1}\left(g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})\right)\cdot F(x_{n,k}) + g(x_{n,n-1})F(x_{n,n}) - g(x_{n,0})F(x_{n,0})$$

Учитывая, что $x_{n,n} = b, x_{n,0} = a, \quad F(a) = 0$, получим

$$\int_a^b f(t)\cdot\varphi_n(t)dt = \sum_{k=1}^{n-1}\left(g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})\right)\cdot F(x_{n,k}) + g(x_{n,n-1})F(b) \quad (9)$$

По теореме 1 §2 функция F непрерывна на $[a;b]$, следовательно, она в некоторых точках $\bar{x}, \bar{\bar{x}} \in [a;b]$ достигает минимума и максимума соответственно, то есть

$$\forall x \in [a;b] \quad F(\bar{x}) \leq F(x) \leq F(\bar{\bar{x}}),$$

в частности, для всех n, k имеем

$$F(\bar{x}) \leq F(x_{nk}) \leq F(\bar{\bar{x}}),$$

Отметим еще, что по условию функция g убывает.
Следовательно

$$g(x_{n,k-1}) - g(x_{nk}) \geq 0,\ g(x_{n,n-1}) \geq g(b) \geq 0,$$

поэтому из (9) имеем

$$\{\sum_{k=1}^{n-1}\left(g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})\right) + g(x_{n,n-1})\} \cdot F(\bar{x}) \leq \int_a^b f(t) \cdot \varphi_n(t) dt \leq$$

$$\leq \left\{\sum_{k=1}^{n-1}\left(g(x_{n,k-1}) - g(x_{n,k})\right) + g(x_{n,n-1})\right\} F(\bar{\bar{x}}) \qquad (10)$$

Легко убедиться, что выражение в фигурных скобках представляет собой g(a). Поэтому оценку (10) можно записать короче

$$g(a)F\left(\bar{x}\right) \le \int_a^b f(t)\cdot\varphi_n(t)dt \le g(a)F\left(\bar{\bar{x}}\right),\ \forall n \in N.$$

Отсюда и из (8) получим

$$g(a)F\left(\bar{x}\right) \le \int_a^b f(t)\cdot g(t)dt \le g(a)F\left(\bar{\bar{x}}\right)$$

По теореме Коши о промежуточных значениях непрерывной функции $g(a)F(x)$ существует точка $\xi \in [\bar{x};\bar{\bar{x}}]$ (или $\xi \in [\bar{\bar{x}};\bar{x}]$), такая что

$$\int_a^b f(t)\cdot g(t)dt = g(a)F(\xi) = g(a)\int_a^{\xi} f(t)dt\ .\square$$

Докажем теперь вторую теорему о среднем.

Доказательство (второй теоремы о среднем). Пусть функция f суммируема на $[a;b]$, функция g монотонна. Умножая её на (-1), если надо, считаем, что функция g убывает (равенство (1) при этом не изменится).

Применим лемму к функции $g_1(x) = g(x) - g(a), \quad x \in [a;b]$.

По лемме найдётся $\xi \in [a;b]$ такое, что

$$\int_a^b f(t) \cdot g_1(t)dt = g_1(a)\int_a^\xi f(t)dt .$$

Учитывая здесь, что $g_1(x) = g(x) - g(a)$, получим

$$\int_a^b f(t) \cdot g(t)dt - \int_a^b f(t) \cdot g(b)dt = g(a)\int_a^\xi f(t)dt - g(b)\int_a^\xi f(t)dt .$$

Перенося второе слагаемое из левой части в правую и пользуясь аддитивностью интеграла, получим утверждение теоремы. □

§8. Интегральная форма для остаточного члена в формуле Тейлора.

В предыдущем семестре мы изучали формулу Тейлора и доказали следующую теорему.

Теорема 1. Пусть $n \in N$ и функция $f:(x_0 - \sigma, x_0 + \sigma) \to R$ в точке x_0 имеет производные до порядка n включительно.

Тогда

$$f(t) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + r_n(x_0, \Delta x), \qquad (1)$$

где

$$r_n(x_0, \Delta x) = o\left((\Delta x)^n\right)$$

при $\Delta x = x - x_0 \to 0$ (формула Тейлора с остаточным членом в форме Пеано).

Докажем так называемую интегральную форму для остатка $r_n(x_0, \Delta x)$. Затем из неё выведем те формы, которые были ранее в главе «Производная и дифференциал» без доказательства.

Теорема 2 (об интегральной форме остаточного члена формулы Тейлора для функции одного вещественного переменного).

Пусть $n \in N$ и функция $f:[a;b] \to R$ имеет на $[a;b]$ непрерывные производные до порядка $n+1$ включительно.

Тогда для любого $x = x + x_0 \in [a;b]$ справедливо равенство:

$$r_n(x_0, \Delta x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} f^{(n+1)}(t)(x-t)^n\,dt. \qquad (2)$$

Доказательство основывается на формуле интегрирования по частям.