Модель Бьянкони-Барабаши

МОДЕЛЬ СЕТЕЙ С ИЗМЕНЯЮЩЕЙСЯ ТОПОЛОГИЕЙ

Модель Б-А – минимальная модель.

Простейшие предположения:

- линейный рост
- линейное предпочтительное соединение

$$\langle k \rangle = 2m$$

$$\Pi(k_i) \propto k_i$$

Не учитывает

вариации распределения степеней
вариации показателя распределения
коэффициент кластеризации, не зависящий от размера

Гипотеза:
Модель Б-А может быть адаптирована к описанию различных свойств реальных сетей.

Известные механизмы в реальных сетях: добавление новых связей без новых узлов, перестройка связей, удаление связей, удаление узлов.

Модель Бьянкони-Барабаши

Могут более поздние узлы иметь большую степень?

Модель Б-А: $k(t) \sim t^{1/2}$ **(преимущество 1-го хода)**

Модель Б-Б: **скр. параметр** (η) $\Pi(k_i) = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}$ $k(\eta,t) \sim t^{\beta(\eta)}$

$\beta(\eta) = \eta / C$

Bianconi & Barabási, *Physical Review Letters* 2001; *Europhys. Lett.* 2001.

Модель Бьянкони-Барабаши

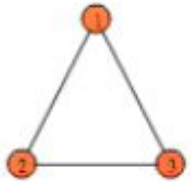
Рост

На каждом шаге добавляется новый узел j с m связями и параметром η_j где η_j – случайное число, выбранное из распределения $\rho(\eta)$. С течением времени у каждого узла значение η_j остается неизменным.

Предпочтительное соединение

Вероятность того, что новый узел соединиться с узлом i, пропорциональна произведению степени k_j узла i и параметра η_j.

$$\Pi_i = \frac{\eta_i k_i}{\sum_j \eta_j k_j}$$

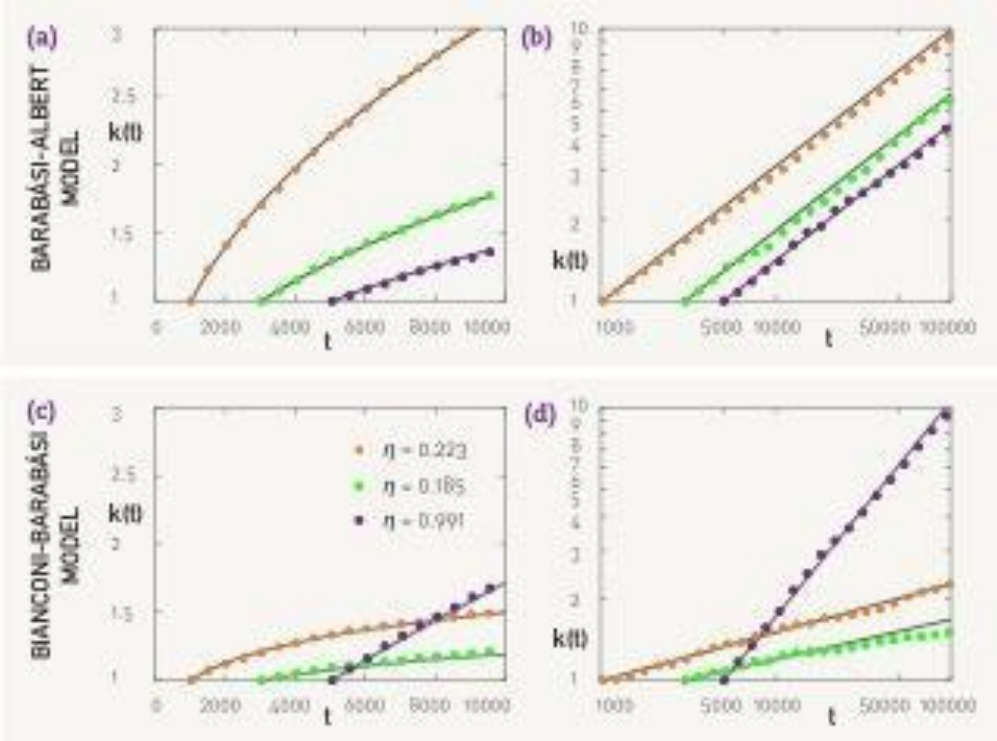

1
2
3

Модель Бьянкони-Барабаши

Модель Б-А: $k(t) \sim t^{1/2}$

Модель Б-Б: $k(\eta,t) \sim t^{\beta(\eta)}$

$\beta(\eta) = \eta / C$



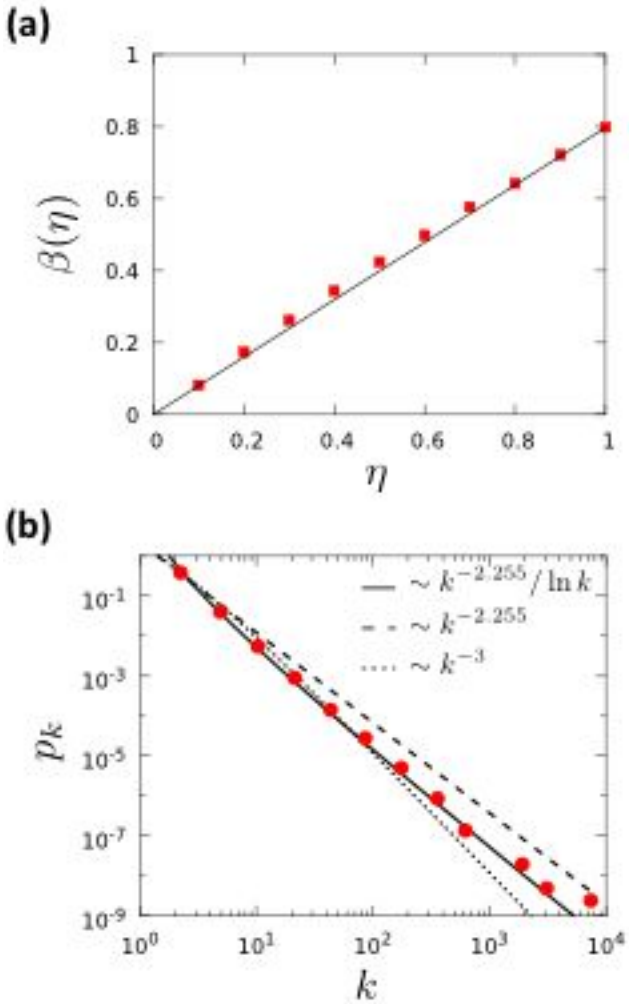
Равномерное распределение скрытого параметра

$$p_k \sim C \int dy \, \frac{\rho(\eta)}{\eta} \left(\frac{m}{k} \right)^{\frac{C}{\eta}+1} .$$

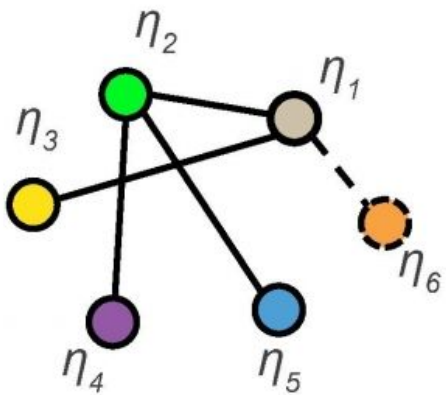
Равномерное распределение:
в интервале [0,1].

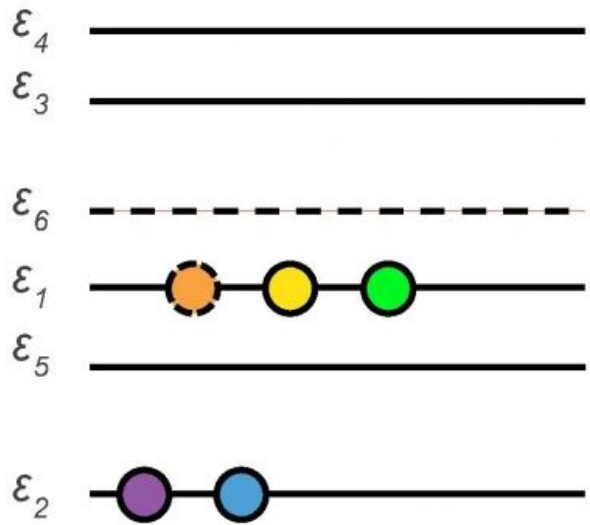
$$p_k \sim \int_1^0 d\eta \frac{C^*}{\eta} \frac{1}{k^{1+C^*/\eta}} \sim \frac{k^{-(1+C^*)}}{\ln k},$$

C = 1.255* $\gamma = 2.255$



Конденсация Бозе-Эйнштейна





Узел с η □ Энергетический уровень ε

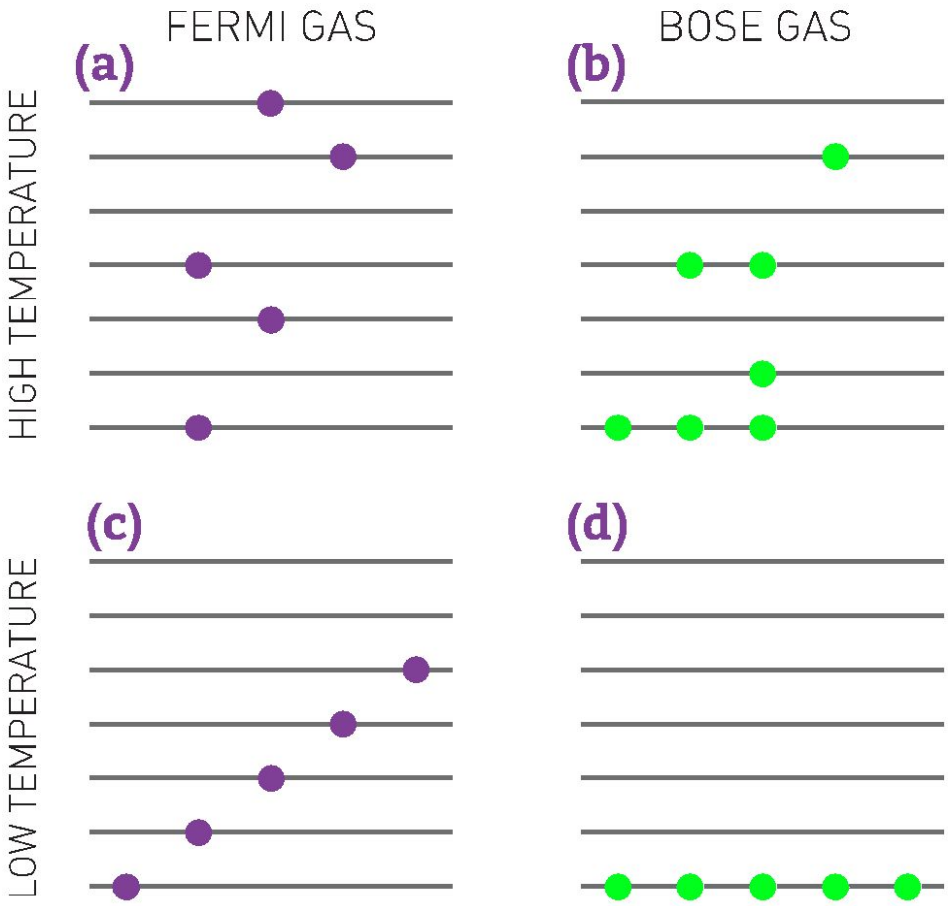
Новый узел с η □ новый энерг. уровень ε

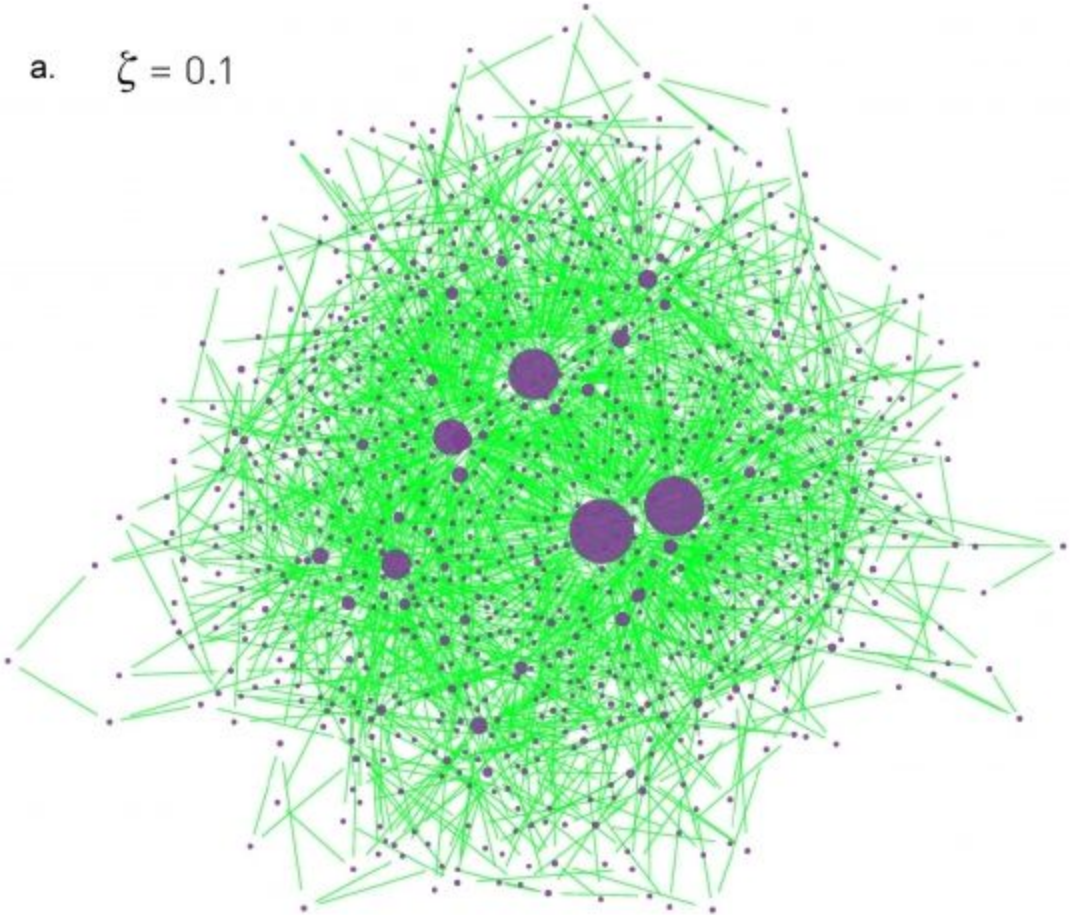
Связь к узлу с η □ частица на уровне ε

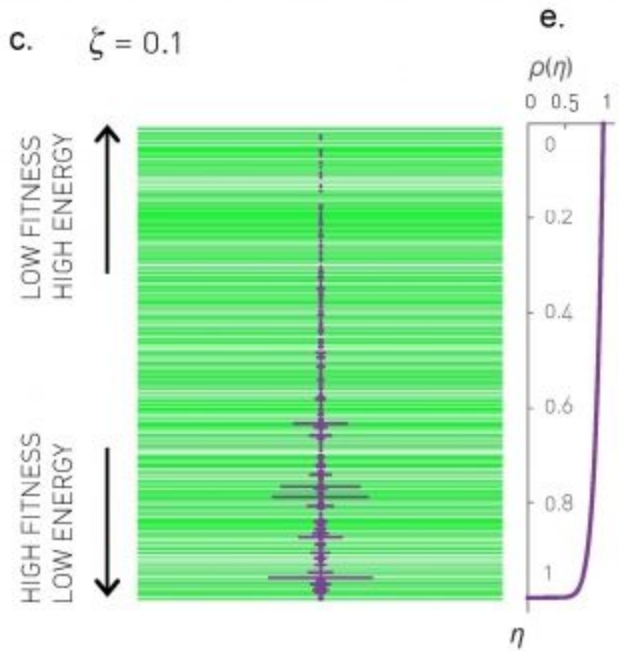
Сеть □ квантовый газ

G. Bianconi and A.-L. Barabási, Physical Review Letters 2001; cond-mat/0011029

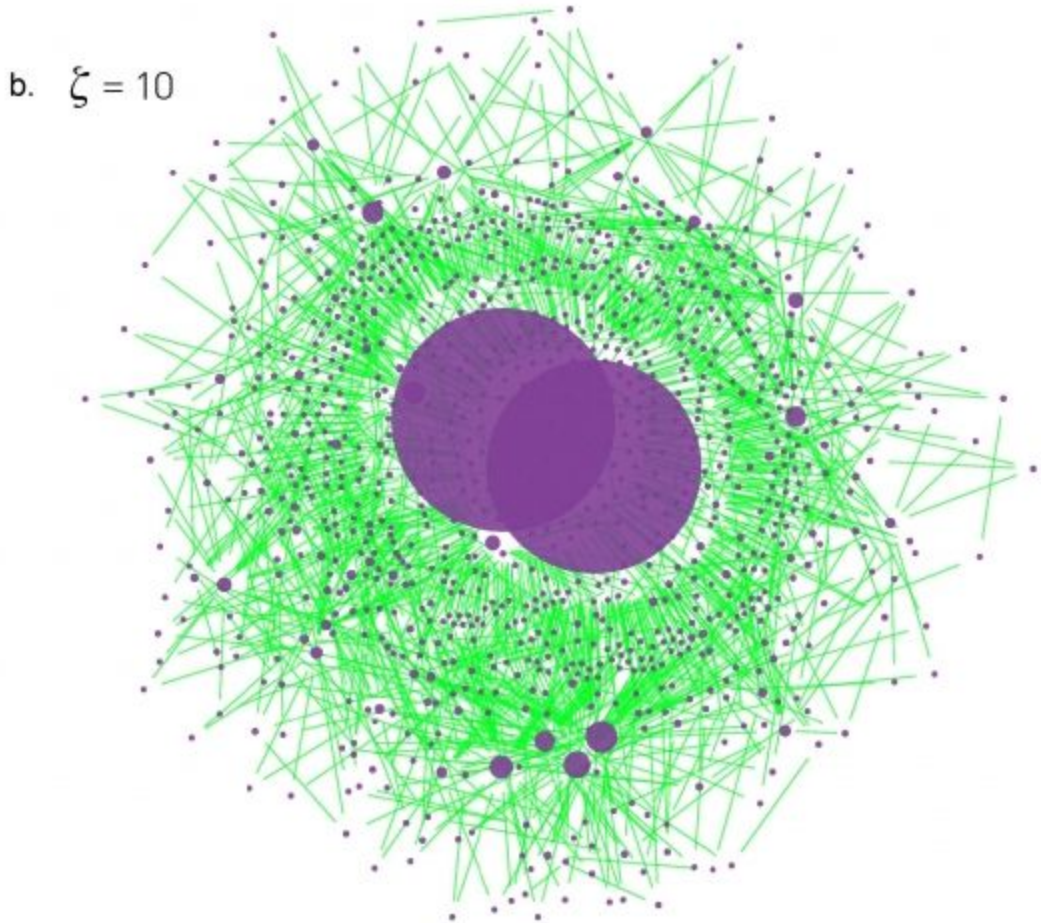
Бозе-эйнштейновская конденсация

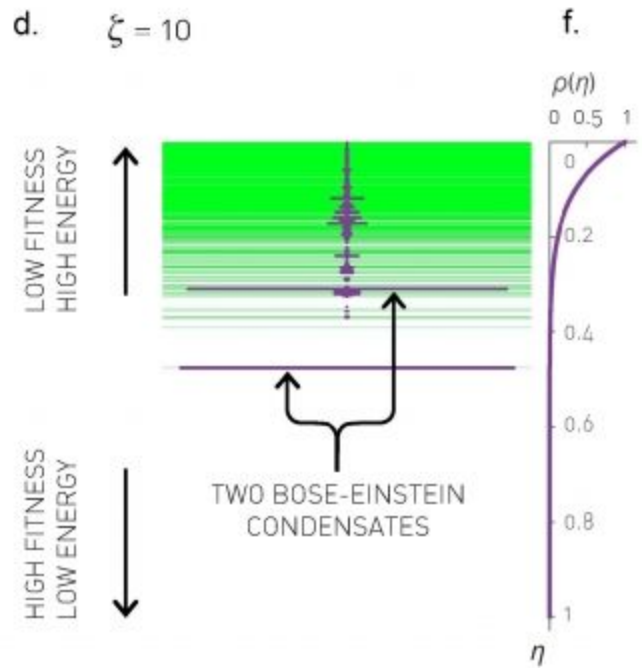






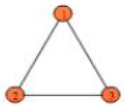
$$\rho(\eta) = (1-\zeta)(1-\eta)^{\zeta}$$

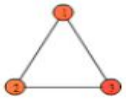




$$\rho(\eta) = (1-\zeta)(1-\eta)^{\zeta}$$

Бозе-эйнштейновская конденсация





Bianconi & Barabási, *Physical Review Letters* 2001; *Europhys. Lett.* 2001.

Поправки к модели Б-А

Ограничения модели Б-А

1. Модель дает значение показателя γ=3, тогда как в реальных сетях он варьируется от 2 до 5.

2. Модель дает степенной закон распределения степеней, тогда как в реальных системах наблюдаются систематические отклонения от степенной функции, такие как насыщение при малых значениях или отсечка при больших.

3. Модель не учитывает различные элементарные процессы, которые присутствуют во многих реальных сетях, такие как появление связей между существующими узлами, исчезновение узлов или связей.

Начальная привлекательность

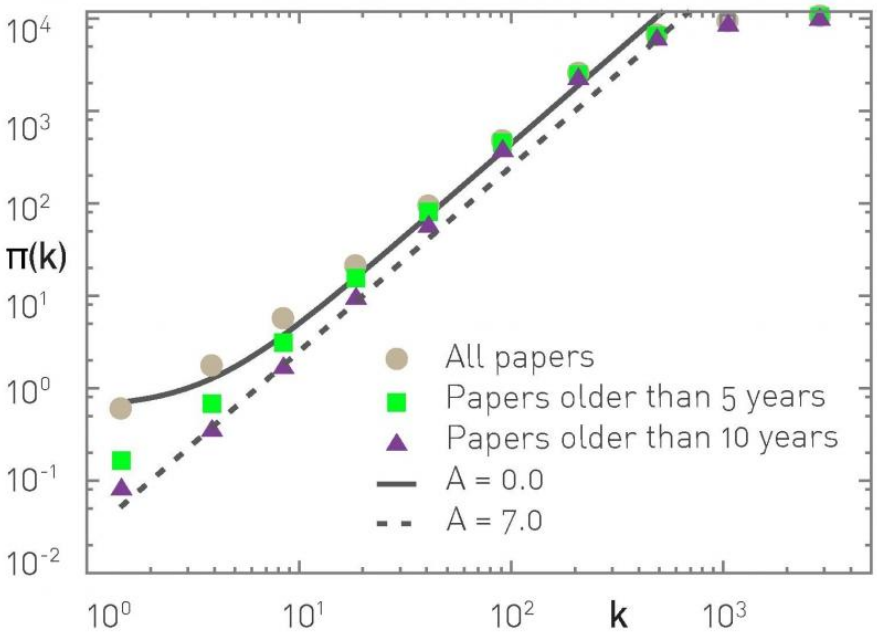
$$\Pi(k) \sim A + k$$

Увеличивается показатель

$$\gamma = 3 + \frac{A}{m}$$

Насыщение при малых степенях

$$p_k = C(k + A)^{-\gamma}$$



Внутренние связи

$$\Pi(k,k') \sim (A+Bk)(A'+B'k').$$

Двойное предпочтительное соединение (A=A'=0).

$$\gamma = 2 + \frac{m}{m+2n}$$

Случайное соединение (B=B'=0).

$$\gamma = 3 + \frac{2n}{m}$$

Исчезновение узлов

- Модель Барабаши-Альберт.
- На каждом шаге:
  - добавляется новый узел с *m* связями
  - с вероятностью *r* узел удаляется.

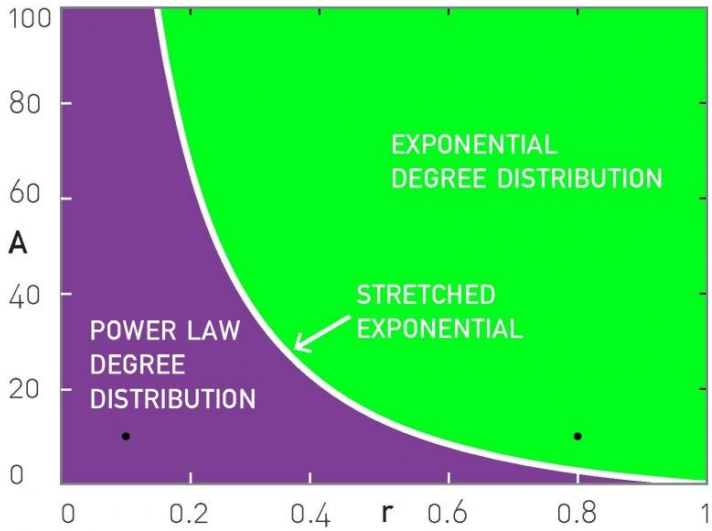
***r<1**: масштабно-инв. фаза*

$$\gamma = 3 + \frac{2}{1-r}$$

***r=1**: экспоненциальная фаза*

***r>1:** исчезающая сеть*

Исчезновение узлов + другие процессы



***r<r*(A)**: субкрит. исчезновение*

***r=r*(A)**: крит. исчезновение*

***r>r*(A)**: экспоненц. сети*

- Модель с нач. привлекательностью:

  $$\Pi(k) \sim A + k$$

- На каждом шаге:
  - добавляется новый узел с *m* связями
  - с вероятностью *r* узел удаляется.

Ускоренный рост

Мы полагали, что *L = <k>N, где <k> не зависит от времени и от N.*

- Средняя степень сети Интернет выросла с 3.42 (ноябрь 1997) до 3.96 (декабрь 1998);
- Средняя степень сети WWW выросла с 7.22 до 7.86 за пять месяцев;
- В метаболических сетях средняя степень растет почти линейно с числом метаболитов.

Число связей с новым узлом

$$m(t) = m_0 t^{\theta}$$

Показатель распределения

$$\gamma = 3 + \frac{2\theta}{1-\theta}$$

Старение

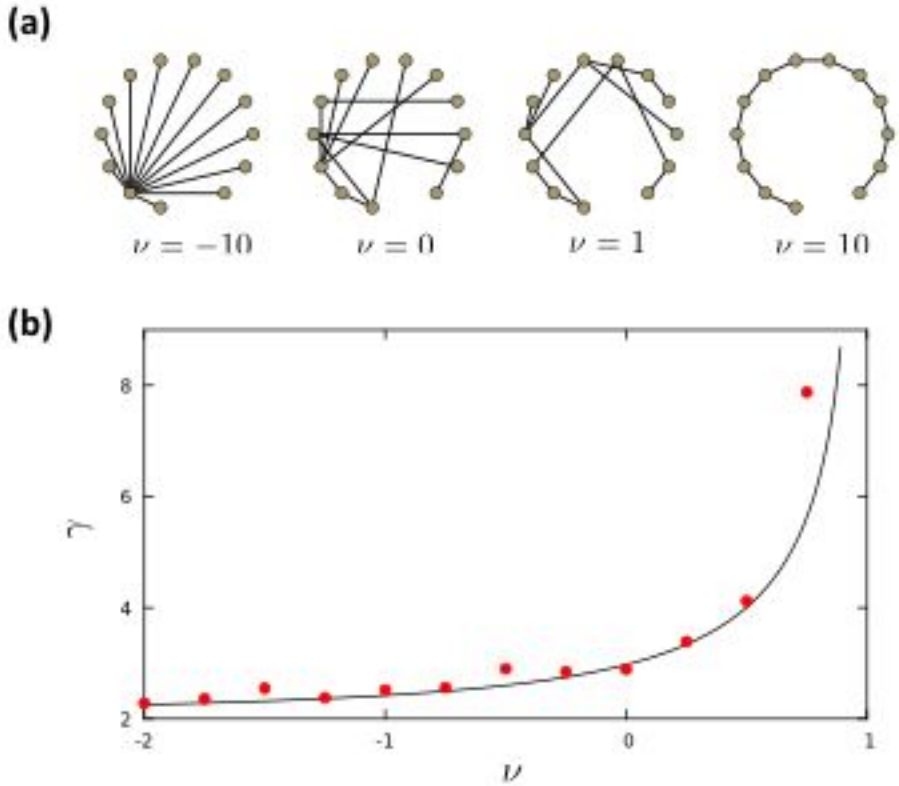
$$\Pi(k, t - t_i) \sim k(t - t_i)^{-\nu}$$

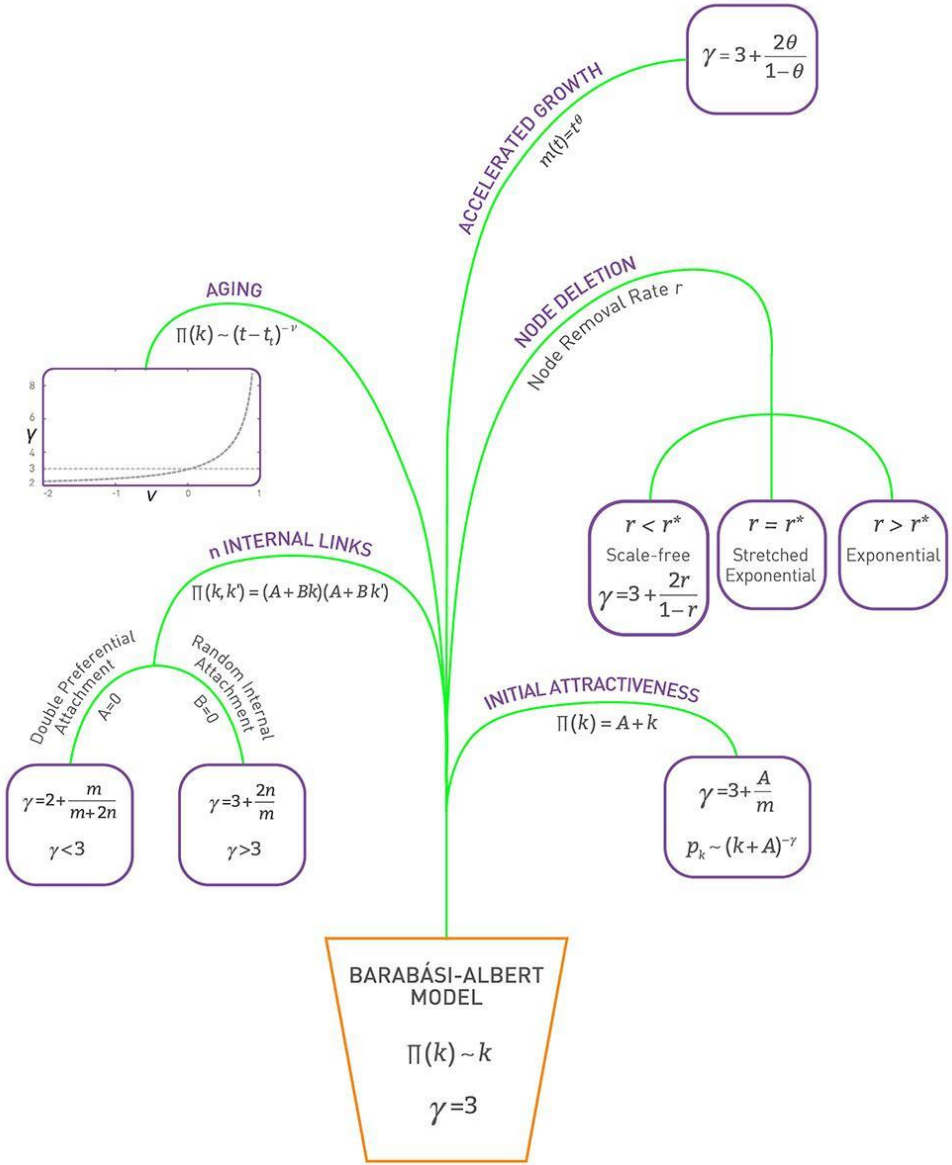
v<0: *новые узлы соед. со старыми*
усиливается роль предпочтит. соединения

v→ −∞ каждый нов. узел соединяется только с самым старым суперхаб

v>0: *новые узлы соед. с молодыми*

v→ +∞: каждый узел соед. с предшественником




BARABÁSI-ALBERT MODEL
$\Pi(k) \sim k$
$\gamma = 3$
ACCELERATED GROWTH
$m(t) = t^{\theta}$
$\gamma = 3 + \frac{2\theta}{1-\theta}$
NODE DELETION
Node Removal Rate r
$r < r^*$
Scale-free
$\gamma = 3 + \frac{2r}{1-r}$
$r = r^*$
Stretched Exponential
$r > r^*$
Exponential
INITIAL ATTRACTIVENESS
$\Pi(k) = A + k$
$\gamma = 3 + \frac{A}{m}$
$p_k \sim (k+A)^{-\gamma}$
AGING
$\Pi(k) \sim (t - t_i)^{-\nu}$
γ
ν
n INTERNAL LINKS
$\Pi(k,k') = (A + Bk)(A + Bk')$
Double Preferential Attachment
A=0
$\gamma = 2 + \frac{m}{m+2n}$
$\gamma < 3$
Random Internal Attachment
B=0
$\gamma = 3 + \frac{2n}{m}$
$\gamma > 3$

Summary

- **Power-Law**

  A pure power-law emerges if a growing network is governed by linear preferential attachment only, as predicted by the Barabási-Albert model. It is rare to observe such a pure power law in real systems. This idealized model represents the starting point for understanding the degree distribution of real networks.

- **Stretched Exponential**

  If preferential attachment is sublinear, the degree distribution follows a stretched exponential (SECTION 5.7). A similar degree-distribution can also appear under node removal at the critical point (**Figure 6.12**).

- **Fitness-induced Corrections**
  In the presence of fitness the precise form of p_k depends on the fitness distribution $\rho(\eta)$, which determines p_k via (6.6). For example, a uniform fitness distribution induces a logarithmic correction in p_k as predicted by (6.8). Other forms of $\rho(\eta)$ can lead to rather exotic forms for p_k.

- **Small-degree Saturation**
  Initial attractiveness adds a random component to preferential attachment. Consequently, the degree distribution develops a small-degree saturation, as seen in (6.24).

- **High-degree Cutoffs**
  Node and link removal, present in many real systems, can induce exponential high-degree cutoffs in the degree distribution. Furthermore, random node-removal can deplete the small-degree nodes, inducing a peak in p_k.

In most real networks several of the elementary processes discussed in this chapter appear together. For example, in the scientific collaboration network we have sublinear preferential attachment with initial attractiveness and the links can be both external and internal. As researchers have different creativity, fitness also plays a role, hence an accurate model requires us to know the appropriate fitness distribution. Therefore, the degree distribution is expected to display small degree saturation (thanks to initial attractiveness), stretched exponential cutoff at high degrees (thanks to sublinear preferential attachment), and some unknown corrections due to the particular form of the fitness distribution $\rho(\eta)$.

In general if wish to obtain an accurate fit to the degree distribution, we first need to build a generative model that analytically predicts the functional form of p_k. Yet, in many systems developing an accurate theory for p_k may be an overkill. It is often sufficient, instead, to establish if we are dealing with a bounded or an unbounded degree distribution (SECTION 4.9), as the system's properties will be primarily driven by this distinction.

Section 6 summary

MODEL CLASS	EXAMPLES	CHARACTERISTICS
Static Models	Erdős–Rényi Watts-Strogatz	• N fixed • p_k bounded • Static, time independent topologies
Generative Models	Configuration Model Hidden Parameter Model	• Arbitrary pre-defined p_k • Static, time independent topologies
Evolving Network Models	Barabási–Albert Model Bianconi-Barabási Model Initial Attractiveness Model Internal Links Model Node Deletion Model Accelerated Growth Model Aging Model	• p_k is determined by the processes that contribute to the network's evolution. • Time-varying network topologies

LESSONS LEARNED: evolving network models

1. There is no universal exponent characterizing all networks.

2. Growth and preferential attachment are responsible for the emergence of the scale-free property.
3. The origins of the preferential attachment is system-dependent.
4. Modeling real networks:
    - identify the microscopic processes that take place in the system
    - measure their frequency from real data
    - develop dynamical models that capture these processes.

5. If the model is correct, it should correctly predict not only the degree exponent, but both small and large k-cutoffs.