

Часть II.

Глава 1.

Трансляции, их
представление и
реализация

§ 1.1. Трансляции и трансляторы

Определение 1.1. *Трансляцией* из языка $L_1 \subseteq \Sigma^*$ в язык $L_2 \subseteq \Delta^*$ называется отношение $\tau \subseteq L_1 \times L_2$.

Здесь Σ — входной алфавит, L_1 — входной язык, Δ — выходной алфавит, L_2 — выходной язык.

Другими словами, трансляция есть некоторое множество пар предложений (x, y) , где $x \in L_1$ — входное, а $y \in L_2$ — выходное предложение.

Хотя в общем случае в трансляции t одному входному предложению x может соответствовать несколько выходных предложений y , по отношению к языкам программирования трансляция всегда является *функцией*, т. е. для каждого входа существует не более одного выхода.

Существует бесконечно много примеров трансляций, но самым элементарным, вероятно, является тот, который может быть задан *гомоморфизмом*, т. е. отображением h из Σ в Δ^* .

Пример 1.1. Предположим, что мы хотим закодировать некоторый текст с помощью азбуки Морзе. Как известно, в коде Морзе каждая буква представляется как некоторая последовательность из точек и тире. Эти последовательности, называемые *посылками*, имеют разную длину. Для отделения одной посылки от другой используется *пауза*.

Очевидно, что трансляцию предложений, например, на русском языке, в код Морзе можно реализовать с помощью гомоморфизма, задаваемого следующим образом:

Буква: а б в ... я

Посылка: · — — ... · — — ... · — · —

Для простоты предполагаем, что паузы представлены пробелами, завершающими каждую посылку. Тогда, скажем, слово “абба” с помощью замены букв на посылки даёт результат: · — — ... — ... · —

Часть 2: Гомоморфизм

Для любой входной цепочки $x = a_1 a_2 \dots a_n$, $a_i \in \Sigma$, $i=1,2,\dots,n$, гомоморфизм h позволяет найти соответствующую выходную цепочку $y \in \Delta^*$ с помощью посимвольной подстановки: $y = h(a_1)h(a_2)\dots h(a_n)$.

Область определения гомоморфизма можно расширить до Σ^* следующим образом:

$$h'(ax) = h(a)h'(x), h'(\varepsilon) = \varepsilon. \text{ Здесь } a \in \Sigma, x \in \Sigma^*.$$

Далее используется одно и тоже обозначение h для гомоморфизма на Σ и Σ^* .

Гомоморфизм h определяет трансляцию

$$\tau(h) = \{(x, h(x)) \mid x \in \Sigma^*\}.$$

Устройство, которое по заданной цепочке $x \in \Sigma^*$ находит соответствующую цепочку $y = h(x)$, такую, что $(x, y) \in \tau(h)$, тривиально: оно должно посимвольно просмотреть входную цепочку x и заменить каждый её символ a на $h(a)$. Это устройство является примером простейшего транслятора, реализующего трансляцию $\tau(h)$.

Реалистичным примером транслятора, основанного на гомоморфизме, является простейший *ассемблер*.

Транслятором для данной трансляции τ называется такое устройство, которое по данной входной строке x вычисляет выходную цепочку y , такую, что $(x, y) \in \tau$.

Желательными свойствами транслятора являются:

- 1) *эффективность* (время, затрачиваемое на перевод входной строки, должно быть линейно пропорционально её длине);
- 2) *малый размер*;
- 3) *правильность* (желательно иметь небольшой тест, такой, чтобы если транслятор прошёл его, то это гарантировало бы правильную работу транслятора на *всех* входных цепочках).

§ 1.2. Схемы синтаксически управляемой трансляции

Трансляторы являются средством реализации трансляций, хотя их можно рассматривать также и как способ задания трансляций.

Способом спецификации трансляций, более сложных, чем те, которые описываются при помощи гомоморфизма, является аппарат *схем синтаксически управляемых трансляций* (sdts — **syntax-directed translation schema**).

Определение 1.2. *Схемой синтаксически управляемой трансляции* называется формальная система $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где

- N — алфавит нетерминалов;
- Σ — конечный входной алфавит;
- Δ — конечный выходной алфавит,
причём $N \cap \Sigma = \emptyset$ и $N \cap \Delta = \emptyset$;
- R — конечное множество правил схемы

вида

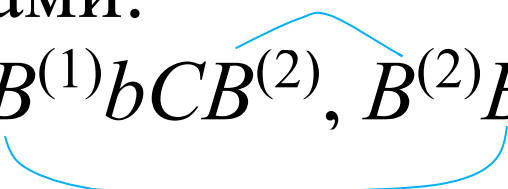
$A \rightarrow \alpha, \beta$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$, $\beta \in (N \cup \Delta)^*$, причём каждое вхождение нетерминала в цепочку α взаимно однозначно связано с некоторым вхождением одноимённого нетерминала в β , и эта связь является неотъемлемой частью правила;

$S \in N$ — *начальный нетерминал*.

Цепочка α называется *синтаксической*, а цепочка β — *семантической*.

Для указания связей между вхождениями нетерминалов можно использовать индексы.

Например, связанные вхождения одноимённых нетерминалов помечаются одинаковыми индексами:

$$A \rightarrow aB^{(1)}bCB^{(2)}, B^{(2)}B^{(1)}dC.$$


Определение 1.3. Введем понятие *трансляционной формы* следующим образом:

1) (S, S) — *начальная трансляционная форма*, причём эти два вхождения начального нетерминала связаны друг с другом по определению;

2) если $(\alpha A \beta, \alpha' A \beta')$ — трансляционная форма, в которой два явно выделенных вхождения нетерминала A связаны, и если $A \rightarrow \gamma, \gamma'$ — правило из R , то $(\alpha \gamma \beta, \alpha' \gamma' \beta')$ — трансляционная форма; причём связь между нетерминалами в γ и γ' такая же, как в правиле; нетерминалы в цепочках α и β связываются с нетерминалами в цепочках α' и β' в новой трансляционной форме точно так же, как в предыдущей; *связь между нетерминалами является существенной чертой трансляционной формы;*

3) трансляционными формами являются такие и только такие пары цепочек, которые могут быть получены с помощью этих двух способов.

Это определение фактически вводит *отношение непосредственной выводимости* одной трансляционной формы из другой. В таком случае принято писать:

$$(\alpha A \beta, \alpha' A \beta') \xRightarrow{T} (\alpha \gamma \beta, \alpha' \gamma' \beta').$$

Для степени, транзитивного и рефлексивно-транзитивного замыкания этого отношения используются соответственно следующие обозначения: $\xRightarrow[T]{n}$, $\xRightarrow[T]{+}$ и $\xRightarrow[T]{*}$.

Когда ясно, в какой схеме производится вывод, имя схемы может быть опущено.

Определение 1.4. *Трансляция*, заданная при помощи схемы синтаксически управляемой трансляции T , есть множество

$$\tau(T) = \{(x, y) \mid (S, S) \xRightarrow[T]{*} (x, y), x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*\}$$

и называется *синтаксически управляемой трансляцией* (sdt — syntax-directed translation).

Определение 1.5.

Грамматика $G_i = (N, \Sigma, P_i, S)$, где

$$P_i = \{A \rightarrow \alpha \mid \exists A \rightarrow \alpha, \beta \in R\},$$

называется *входной грамматикой* схемы.

Грамматика $G_o = (N, \Delta, P_o, S)$, где

$$P_o = \{A \rightarrow \beta \mid \exists A \rightarrow \alpha, \beta \in R\},$$

называется *выходной грамматикой* схемы.

Очевидно, что G_i и G_o — контекстно-свободные грамматики, порождающие входной и выходной языки трансляции, задаваемой схемой.

Пример 1.2. Пусть sdts

$$T = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (,)\}, \{a, +, *\}, R, E),$$

где $R = \{(1) E \rightarrow E + T, E T +;$

$$(2) E \rightarrow T, T;$$

$$(3) T \rightarrow T * F, T F *;$$

$$(4) T \rightarrow F, F;$$

$$(5) F \rightarrow (E), E;$$

$$(6) F \rightarrow a, a \}.$$

Связь между нетерминалами в этих правилах очевидна, так как в синтаксической и семантической цепочках каждого правила не более чем одно вхождение нетерминала, представленного данным символом из $\{E, T, F\}$.

Рассмотрим какой-нибудь левосторонний вывод в схеме T , например:

$$\begin{aligned}
 (E, E) &\xRightarrow[T]{(1)} (E + T, ET+) \xRightarrow[T]{(2)} \\
 &(T^{(1)} \xRightarrow[T]{(2)} T, T^{(1)}T+) \xRightarrow[T]{(4)} \\
 &\xRightarrow[T]{(4)} (F + T, FT+) \xRightarrow[T]{(6)} \\
 &(a + \xRightarrow[T]{(6)} aT+) \xRightarrow[T]{(3)} \\
 &(a + \xRightarrow[T]{(3)} F, aTF_*+) \xRightarrow[T]{(4,6)} \\
 &(a + \xRightarrow[T]{(4,6)} F, aaF_*+) \xRightarrow[T]{(6)} \\
 &\xRightarrow[T]{(6)} (a + a_*a, aaa_*+).
 \end{aligned}$$

Нетрудно догадаться, что

$$\tau(T) = \{(x, y) \mid$$

x — инфиксная запись,
 y — эквивалентная постфиксная
запись арифметического выражения}.

Определение 1.6. Схема синтаксически управляемой трансляции называется *простой*, если в каждом её правиле

$$A \rightarrow \alpha, \beta$$

связанные нетерминалы в цепочках α и β встречаются в одинаковом порядке.

Трансляция, определяемая простой схемой, называется *простой синтаксически управляемой трансляцией*.

Многие, но не все, полезные трансляции могут быть описаны как простые.

В примере [1.2](#) схема T , как и определяемая ею трансляция $\tau(T)$, является простой.

Простые синтаксически управляемые трансляции интересны тем, что каждая из них может быть реализована транслятором в классе недетерминированных магазинных преобразователей ([рис. 1.1](#)).

Другими словами, *магазинные преобразователи* характеризуют класс *простых синтаксически управляемых трансляций* таким же образом, как *магазинные автоматы* характеризуют класс *контекстно-свободных языков*.

К рассмотрению таких трансляций мы сейчас и перейдем.

§ 1.3. Магазинные преобразователи и синтаксически управляемые трансляции

Здесь мы рассмотрим магазинные преобразователи, отличающиеся от магазинных автоматов тем, что у них есть выходная лента.

Недетерминированный магазинный преобразователь

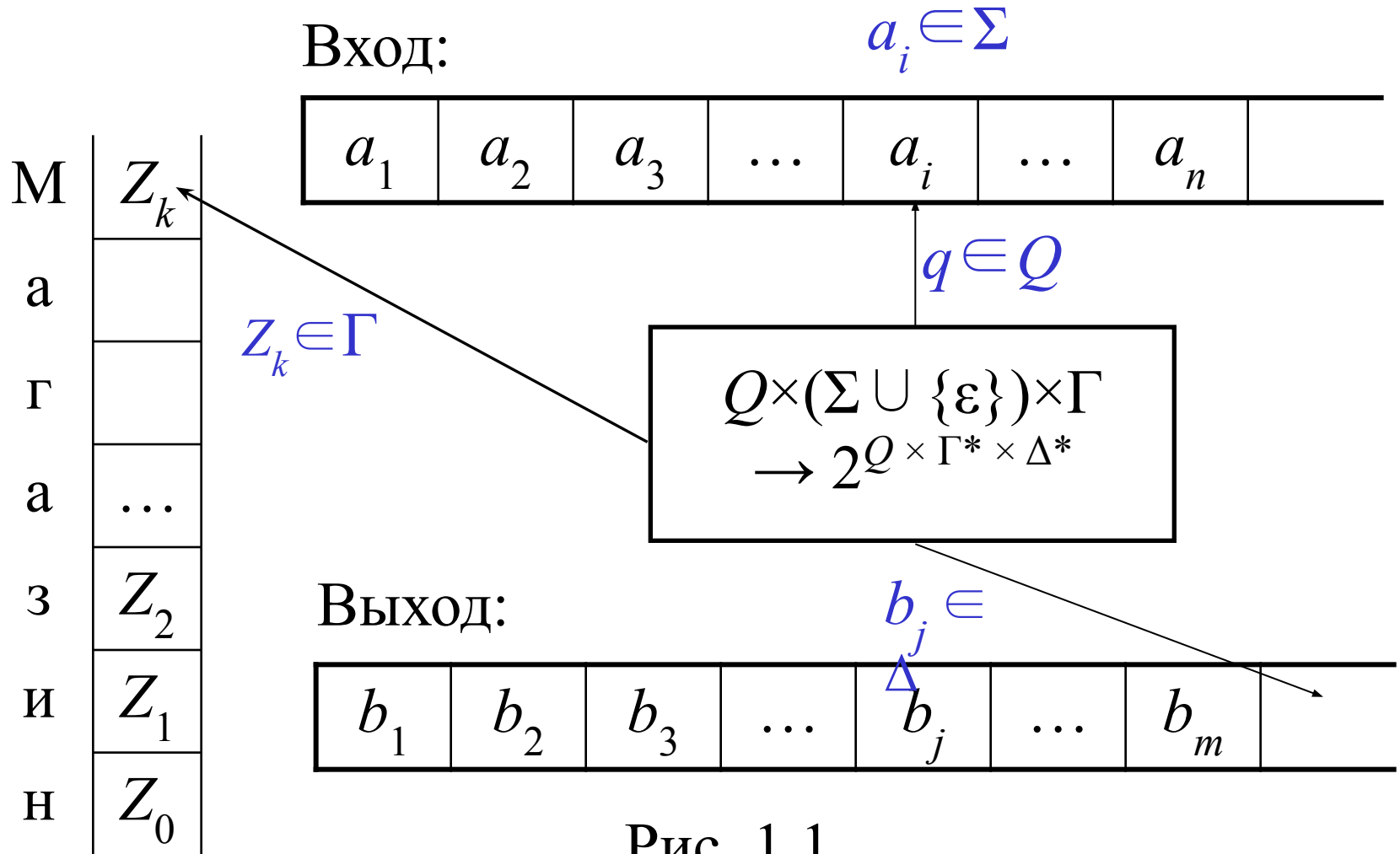


Рис. 1.1.

Определение 1.7.

Недетерминированный магазинный преобразователь (npdt — **n**ondeterministic **p**ush**d**own **t**ransducer) есть формальная система

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F), \text{ где}$$

Q — конечное множество состояний,

Σ — конечный входной алфавит,

Γ — конечный алфавит магазинных символов,

Δ — конечный выходной алфавит,

$q_0 \in Q$ — начальное состояние,

$Z_0 \in \Gamma$ — начальный символ магазина,

$F \subseteq Q$ — множество конечных состояний,

δ — отображение типа $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \rightarrow 2^{Q \times \Gamma^* \times \Delta^*}$,

причём область значений δ представлена конечными подмножествами *троек* из $Q \times \Gamma^* \times \Delta^*$.

Запись

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_i, \gamma_i, y_i)\}_{i=1}^n$$

означает, что прдт P , находясь в состоянии $q \in Q$, сканируя $a \in \Sigma$ на входной ленте или независимо от текущего входного символа в случае $a = \varepsilon$, имея $Z \in \Gamma$ на вершине магазина, переходит в одно из состояний $p_i \in Q$, заменяя в магазине символ Z на цепочку $\gamma_i \in \Gamma^*$ и записывая цепочку $y_i \in \Delta^*$ на выходную ленту.

При этом входная головка сдвигается на одну ячейку вправо, если $a \neq \varepsilon$, иначе головка остается на месте, головка магазина сканирует последнюю запись в магазине, а головка выходной ленты размещается справа от последней её записи.

В частности:

- если $a = \varepsilon$, то выбор действия не зависит от текущего входного символа и, как уже отмечалось, входная головка неподвижна;
- если $\gamma_i = \varepsilon$, то верхний символ магазина стирается, а вершина магазина опускается;
- если $y_i = \varepsilon$, то на выходную ленту ничего не пишется, и её головка остается на прежнем месте.

В начальный момент $q = q_0$, в магазине находится единственный символ Z_0 , входная головка сканирует первую ячейку на входной ленте, а выходная лента пуста, причём её головка находится на первой ячейке.

Работу магазинного преобразователя опишем в терминах конфигураций.

Определение 1.8. Конфигурацией магазинного преобразователя P назовем четверку (q, x, α, y) , где $q \in Q$ — текущее состояние, $x \in \Sigma^*$ — часть входной цепочки от текущего символа до её последнего символа, называемая *непросмотренной частью входной цепочки*, $\alpha \in \Gamma^*$ — содержимое магазина (будем считать, что первый символ цепочки α есть верхний символ магазина), $y \in \Delta^*$ — вся выходная цепочка.

Таким образом, начальная конфигурация есть $(q_0, x, Z_0, \varepsilon)$, где x обозначает всю входную цепочку.

Пусть $(q, ax, Z\alpha, y)$ — текущая конфигурация, и $(p, \gamma, z) \in \delta(q, a, Z)$.

Тогда один такт работы $pdt P$ записывается как отношение между двумя последовательными конфигурациями:

$$(q, ax, Z\alpha, y) \vdash (p, x, \gamma\alpha, yz).$$

Здесь $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$, $y, z \in \Delta^*$.

Как обычно, определяются степень $(| _ -)^n$, транзитивное замыкание $(| _ -)^+$ и рефлексивно-транзитивное замыкание $(| _ -)^*$ этого отношения.

Определение 1.9. Говорят, что $y \in \Delta^*$ есть выход для $x \in \Sigma^*$ при конечном состоянии, если

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y)$$

для некоторых $q \in F$ и $\alpha \in \Gamma^*$.

Трансляция, определяемая магазинным преобразователем P при конечном состоянии, есть

$$\tau(P) = \{(x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y)$$

для некоторых $q \in F$ и $\alpha \in \Gamma^*\}$.

Говорят, что $y \in \Delta^*$ есть *выход* для $x \in \Sigma^*$ при пустом магазине, если

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$$

для некоторого $q \in Q$.

Трансляция, определяемая магазинным преобразователем P при пустом магазине, есть

$$\tau_e(P) = \{(x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$$

для некоторого $q \in Q\}$.

Пример 1.3. Пусть $\text{pdt } P = (\{q\}, \{a, +, *\}, \{E, +, *\}, \{a, +, *\}, \delta, q, E, \{q\})$, где

$$1) \delta(q, a, E) = \{(q, \varepsilon, a)\},$$

$$2) \delta(q, +, E) = \{(q, EE+, \varepsilon)\},$$

$$3) \delta(q, *, E) = \{(q, EE_*, \varepsilon)\},$$

$$4) \delta(q, \varepsilon, +) = \{(q, \varepsilon, +)\},$$

$$5) \delta(q, \varepsilon, *) = \{(q, \varepsilon, *)\}.$$

Входной символ
используется

Входной символ
не используется

Пример 1.3.

Рассмотрим действия $\text{pdt } P$ на входе $+^*aaa$:

$$\begin{aligned} & (q, +_*aaa, E, \varepsilon) \stackrel{(2)}{\longmapsto} (q, *_aaa, EE+, \varepsilon) \stackrel{(3)}{\longmapsto} \\ & \stackrel{(3)}{\longmapsto} (q, aaa, EE_*E+, \varepsilon) \stackrel{(1)}{\longmapsto} (q, aa, E_*E+, a) \stackrel{(1)}{\longmapsto} \\ & \stackrel{(1)}{\longmapsto} (q, a, *_E+, aa) \stackrel{(5)}{\longmapsto} (q, a, E+, aa_*) \stackrel{(1)}{\longmapsto} \\ & \stackrel{(1)}{\longmapsto} (q, \varepsilon, +, aa_*a) \stackrel{(4)}{\longmapsto} (q, \varepsilon, \varepsilon, aa_*a+). \end{aligned}$$

Очевидно, что он преобразует префиксные арифметические выражения в постфиксные.

Данный магазинный преобразователь является примером *детерминированного* магазинного преобразователя (см. определение [1.10](#) далее).

Определение 1.10. Магазинный преобразователь $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$ называется *детерминированным (dpdt)*, если

1) $\#\delta(q, a, Z) \leq 1$

для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Z \in \Gamma$;

2) если $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \emptyset$ для данных $q \in Q$ и $Z \in \Gamma$, то $\delta(q, a, Z) = \emptyset$ для всех $a \in \Sigma$.

На практике предпочитают использовать детерминированными магазинными преобразователями (dpdt), поскольку в реализации они оказываются более эффективными по сравнению с недетерминированными магазинными преобразователями (npdt).

Когда неважно различать, о каких преобразователях, детерминированных или недетерминированных, идёт речь, используется обозначение pdt.

Лемма 1.1. Пусть $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$ — простая схема синтаксически управляемой трансляции.

Существует недетерминированный магазинный преобразователь P , такой, что $\tau_e(P) = \tau(T)$.

Доказательство. Построим $\text{prdt } P$, о котором идёт речь, и покажем, что он реализует трансляцию $\tau(T)$.

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

Положим

$$P = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma \cup \Delta', \Delta, \delta, q, S, \emptyset).$$

Чтобы отличать в магазине P входные символы от выходных, последние переименовываются с помощью гомоморфизма h , определяемого для каждого выходного символа $b \in \Delta$ при помощи равенства $h(b) = b'$ таким образом, чтобы множество символов $\Delta' = \{b' \mid b \in \Delta\}$ не пересекалось со словарем Σ , т. е. $\Sigma \cap \Delta' = \emptyset$.

$$\tau(T) \subseteq \tau_\varepsilon(P)$$

Отображение δ определяется так:

1. $(q, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, если
 $A \rightarrow x_0 B_1 x_1 \dots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \dots B_m y_m \in R$,
 $y_i' = h(y_i), i = 1, 2, \dots, m$, где $m \geq 0$.

Здесь $h(by) = b'h(y)$ для каждого $b \in \Delta$ и $y \in \Delta^*$, $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

2. $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$ для всех $a \in \Sigma$.
3. $\delta(q, \varepsilon, b') = \{(q, \varepsilon, b)\}$ для всех $b \in \Delta$.

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

I. Докажем сначала, что

если $(S, S) \xRightarrow[T]{*} (x, y)$, то $(q, x, S, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

Для этого индукцией по длине вывода l докажем более общее утверждение для любого $A \in N$:

если существует вывод $(A, A) \xRightarrow[T]{l} (x, y)$,

то $(q, x, A, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

База. Пусть $l = 1$. Имеем $(A, A) \xRightarrow[T]{} (x, y)$.

На этом единственном шаге вывода применяется правило $A \rightarrow x, y \in R$.

$$\tau(T) \subseteq \tau_\varepsilon(P)$$

Согласно п.1 определения δ имеем

$$(q, xy', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A).$$

Поэтому $(q, x, A, \varepsilon) \vdash (q, x, xy', \varepsilon)$.

Далее согласно п.2

$$(q, x, xy', \varepsilon) \stackrel{|x|}{\vdash} (q, \varepsilon, y', \varepsilon).$$

Наконец, согласно п.3 имеем

$$(q, \varepsilon, y', \varepsilon) \stackrel{|y|}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Итак, существует переход

$$(q, x, A, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

Индукционная гипотеза. Предположим, что вспомогательное утверждение выполняется для всех выводов длиной $l \leq n$ ($n \geq 1$).

Индукционный переход. Докажем утверждение для $l = n + 1$.

Пусть

$(A, A) \xRightarrow{T} (x_0 B_1 x_1 \dots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \dots B_m y_m) \xRightarrow{T}^n (x, y)$
— вывод длиной $n + 1$.

Очевидно, что

$$x = x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, y = y_0 z_1 y_1 z_2 y_2 \dots z_m y_m, \quad (1.1)$$

$$\text{и } (B_i, B_i) \xRightarrow{T}^{l_i} (t_i, z_i), l_i \leq n, i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.2)$$

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

На первом шаге данного вывода было применено правило

$$A \rightarrow x_0 B_1 x_1 B_2 x_2 \dots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 B_2 y_2 \dots B_m y_m \in R$$

и потому согласно п.1 построения имеем

$$(q, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m' B, \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A). \quad (1.3)$$

Кроме того, согласно индукционной гипотезе из существования частичных выводов (1.2), следует возможность перехода

$$(q, t_i, B_i, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, z_i), i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.4)$$

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

Рассмотрим движения pdt P .

Учитывая условия (1.1) и (1.3), имеем

$$(q, x, A, \varepsilon) = (q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, A, \varepsilon) \Big|_P$$

$$\Big|_P (q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon).$$

Согласно п.2 построений имеем переход

$$(q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \Big|_P^{|x_0|}$$

$$\Big|_P^{|x_0|} (q, t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon);$$

согласно п.3 построений имеем переход

$$(q, t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \Big|_P^{|y_0|}$$

$$\Big|_P^{|y_0|} (q, t_1 x_1 \dots t_m x_m, B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0).$$

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

Учитывая существование перехода (1.4) для $i = 1$, получаем:

$$\begin{aligned} & (q, t_1 x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0) \Big|_{\frac{|t_1|}{P}} \\ & \Big|_{\frac{|t_1|}{P}} (q, x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0 z_1). \end{aligned}$$

Далее рассуждения с использованием пп.2, 3 построений, а также переходов (1.4) для $i = 2, 3, \dots, m$, повторяются.

В результате получаем последующие движения:

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

$$\begin{aligned}
& (q, x_1 t_2 x_2 \dots t_m x_m, x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0 z_1) \Big|_P^* \\
& \Big|_P^* (q, t_2 x_2 \dots t_m x_m, y_1' B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0 z_1) \Big|_P^* \\
& \Big|_P^* (q, t_2 x_2 \dots t_m x_m, B_2 x_2 y_2' \dots B_m x_m y_m', y_0 z_1 y_1) \Big|_P^* \dots \\
& \Big|_P^* (q, t_m x_m, B_m x_m y_m', y_0 z_1 y_1 \dots z_{m-1} y_{m-1}) \Big|_P^* \\
& \Big|_P^* (q, x_m, x_m y_m', y_0 z_1 y_1 \dots z_{m-1} y_{m-1} z_m) \Big|_P^* \\
& \Big|_P^* (q, \varepsilon, y_m', y_0 z_1 y_1 \dots z_{m-1} y_{m-1} z_m) \Big|_P^* \\
& \Big|_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y_0 z_1 y_1 \dots z_{m-1} y_{m-1} z_m y_m) = (q, \varepsilon, \varepsilon, y).
\end{aligned}$$

$$\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$$

В конце рассуждений о движениях pdt P принято во внимание представление цепочки y согласно равенству (1.1).

Итак, вся последовательность движений может быть представлена в виде

$$(q, x, A, \varepsilon) \mid_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В частности, из доказанного вспомогательного утверждения при $A = S$ следует утверждение I.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

II. Докажем теперь обратное утверждение:

если $(q, x, S, \varepsilon) \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$, то $(S, S) \stackrel{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$.

Для этого индукцией по числу l движений типа 1, независимых от входных символов, определённых согласно [п.1](#) построений, докажем более общее утверждение для любого $A \in N$:

если $(q, x, A, \varepsilon) \stackrel{l}{\underset{P}{\mid}} (\varepsilon, \varepsilon, y)$,

то $(A, A) \stackrel{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

База. Пусть $l = 1$.

Имеем $(q, x, A, \varepsilon) \stackrel{*}{\mid}_P (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$, где только одно движение типа 1. Очевидно, что оно — первое движение, так как в исходной конфигурации на вершине магазина находится $A \in N$. Это движение не может привести к появлению нетерминалов в магазинной цепочке из-за того, что они неизбежно привели бы к другим движениям типа 1.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Кроме того, магазинная цепочка, замещающая A на вершине магазина, должна начинаться на x , так как только в этом случае удастся продвинуться по входу x (за счёт движений, определённых в [п.2](#), которые используют входные символы).

Наконец, магазинная цепочка должна заканчиваться на y' , потому что только в этом случае на выходе может образоваться цепочка y (за счёт движений, определённых в [п.3](#), которые переносят образы выходных символов из магазина на выход).

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Поэтому фактически имеем

$$(q, x, A, \varepsilon) \stackrel{|_P}{\longrightarrow} (q, x, xy', \varepsilon) \stackrel{|_P}{\longrightarrow} (q, \varepsilon, y', \varepsilon) \stackrel{|_P}{\longrightarrow} (q, \varepsilon, \varepsilon, y),$$

где первое движение обусловлено тем, что

$$(q, xy', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A),$$

а это означает существование правила

$$A \rightarrow x, y \in R.$$

Два последних перехода выполнены согласно пп. 2, 3 построений.

Воспользовавшись существующим правилом, немедленно получаем вывод

$$(A, A) \stackrel{T}{\Rightarrow} (x, y).$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Индукционная гипотеза. Предположим, что вспомогательное утверждение выполняется для всех $l \leq n$ ($n \geq 1$).

Индукционный переход. Докажем утверждение для $l = n + 1$.

Пусть имеется переход

$$(q, x, A, \varepsilon) \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y),$$

в котором ровно $n + 1$ движение типа 1.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Поскольку в исходной конфигурации на вершине магазина $A \in N$, то первое же движение — типа 1:

$$(q, x, A, \varepsilon) \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}} (q, x, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}} \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y). \quad (1.5)$$

В конечной конфигурации магазин пуст. Цепочка $x_0 \in \Sigma^*$, появившаяся в верхней части магазина после первого движения, может быть удалена только, если входная цепочка x начинается на x_0 .

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Поэтому далее последуют движения, определяемые п.2, которые продвинут вход по x_0 и удалят такую же цепочку из магазина.

$$(q, x, A, \varepsilon) \xrightarrow{P} (q, x_0 \overset{\sqcup}{x}, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \\ \xrightarrow{P^*} (q, \overset{\sqcup}{x}, y_0' B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', \varepsilon) \dots$$

Далее ряд движений, определяемых п.3, удалит цепочку y_0' из магазина, выдав на выход y_0 , и символ B_1 окажется на вершине магазина.

$$\xrightarrow{P} (q, \overset{\sqcup}{x}, B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', y_0) =$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

К моменту, когда вершина магазина опустится ниже позиции B_1 , будет просканирована некоторая часть входа t_1 , следующая за цепочкой x_0 , т. е. $\hat{x} = t_1 \hat{x}$, а на выходе образуется некоторая цепочка z_1 :

$$= (q, \overbrace{t_1 \hat{x}}^{\hat{x}}, B_1 x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', y_0) \Big|_P^{l_1}$$

$$(q, \hat{x}, x_1 y_1' \dots B_m x_m y_m', y_0 z_1)$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Далее мы можем повторить рассуждения, аналогичные предыдущим, относя их к цепочкам $x_i \in \Sigma^*$, $y_i' \in \Delta'$ ($i = 1, 2, \dots, m$) и $V_j \in N$ ($j = 2, \dots, m$), последовательно появляющимся в верхней части магазина в результате серии движений, построенных в соответствии с п.2, затем п.3, и ряда движений, приводящих к понижению вершины магазина ниже позиции, занимаемой V_j .

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Другими словами, детальный разбор возможных движений от исходной конфигурации к конечной даёт основание утверждать, что вход x и выход y представимы в виде

$$x = x_0 t_1 x_1 \dots t_m x_m, y = y_0 z_1 y_1 \dots z_m y_m, \quad (1.6)$$

причём

$$(q, t_i, B_i, \varepsilon) \stackrel{l_i}{\underset{P}{|}} (q, \varepsilon, \varepsilon, z_i), \quad (1.7)$$
$$l_i \leq n, i = 1, 2, \dots, m.$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

По построению первое движение (1.5) По построению первое движение (1.5) По построению первое движение (1.5) обусловлено существованием правила

$$A \rightarrow x_0 B_1 x_1 \dots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \dots B_m y_m \in R, \quad (1.8)$$

а из существования движений (1.7) по индукционному предположению следует существование выводов

$$(B_i, B_i) \quad (t_i, z_i), \quad i = 1, 2, \dots, m. \quad (1.9)$$

Используя (1.8) и (1.9), с учетом (1.6) получаем:

$$(A, A) \xrightarrow{T} (x_0 B_1 x_1 \dots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \dots B_m y_m)$$

$$(x_0 t_1 x_1 \dots t_m x_m, y_0 z_1 y_1 \dots z_m y_m) = (x, y).$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

В частности, при $A = S$ следует утверждение II.

Из рассуждений I и II следует утверждение леммы.

Доказанная лемма даёт алгоритм построения недетерминированного магазинного преобразователя, эквивалентного данной простой схеме синтаксически управляемой трансляции.

Пример 1.4.

Пусть sdtс $T = (\{E\}, \{a, +, *\}, \{a, +, *\}, R, E)$, где

$$R = \{(1) E \rightarrow +EE, EE+ ;$$
$$(2) E \rightarrow *EE, EE* ;$$
$$(3) E \rightarrow a, a\}.$$

По лемме [1.1](#) эквивалентный прдт есть

$$P = (\{q\}, \{a, +, *\}, \{E, a, +, *, a', +', *'\}, \{a, +, *\}, \delta, q, E, \emptyset),$$
 где

$$1) \delta(q, \varepsilon, E) = \{ (q, +EE+', \varepsilon),$$
$$(q, *EE*', \varepsilon),$$
$$(q, aa', \varepsilon) \},$$

$$2) \delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\} \text{ для всех } b \in \{a, +, *\},$$

$$3) \delta(q, \varepsilon, c') = \{(q, \varepsilon, c)\} \text{ для всех } c \in \{a, +, *\}.$$

Пример 1.4.

Сравните этот *недетерминированный* магазинный преобразователь с эквивалентным *детерминированным* преобразователем из примера [1.3](#).

Оба преобразуют префиксные арифметические выражения в постфиксные.

$$\begin{aligned} & (q, +_*aaa, E, \varepsilon) \vdash (q, +_*aaa, +EE+', \varepsilon) \vdash (q, *_*aaa, EE+', \varepsilon) \vdash \\ & \vdash (q, *_*aaa, *_*EE_*'E+', \varepsilon) \vdash (q, aaa, EE_*'E+', \varepsilon) \vdash \\ & \vdash (q, aaa, aa'E_*'E+', \varepsilon) \vdash (q, aa, a'E_*'E+', \varepsilon) \vdash \\ & \vdash (q, aa, E_*'E+', a) \vdash (q, aa, aa'_*E+', a) \vdash \\ & \vdash (q, a, a'_*E+', a) \vdash (q, a, *_E+', aa) \vdash (q, a, E+', aa_*) \vdash \\ & \vdash (q, a, aa'+', aa_*) \vdash (q, \varepsilon, a'+', aa_*) \vdash (q, \varepsilon, +', aa_*a) \vdash \\ & \vdash (q, \varepsilon, \varepsilon, aa_*a+). \end{aligned}$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Лемма 1.2. Пусть $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, \emptyset)$ — недетерминированный магазинный преобразователь. Существует простая схема синтаксически-управляемой трансляции T , такая, что $\tau(T) = \tau_e(P)$.

Доказательство. Построим такую схему T следующим образом (ср. с теор. [5.3](#)).

Положим $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где

$$N = \{S\} \cup \{[qZp] \mid q, p \in Q, Z \in \Gamma\},$$

Σ и Δ — такие же, как в $\text{prdt } P$,

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

$$R = \{S \rightarrow [q_0 Z_0 p], [q_0 Z_0 p] \mid \text{для всех } p \in Q\} \cup \\ \cup \{[q Z p] \rightarrow a[q_1 Z_1 q_2][q_2 Z_2 q_3] \dots [q_m Z_m q_{m+1}], \\ y[q_1 Z_1 q_2][q_2 Z_2 q_3] \dots [q_m Z_m q_{m+1}] \mid \\ (q_1, Z_1 Z_2 \dots Z_m, y) \in \delta(q, a, Z); \\ a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}, y \in \Delta^*; p, q, q_i \in Q; Z, Z_i \in \Gamma; \\ i = 1, 2, \dots, m; q_{m+1} = p\}.$$

I. Докажем сначала, что

$$\text{если } (q, x, Z, \varepsilon) \quad (p \stackrel{*}{\underset{P}{\mid}}, \varepsilon, y),$$

$$\text{то } ([q Z p], [q Z p]) \quad (x \stackrel{*}{\underset{T}{\rightarrow}} y),$$

используя индукцию по числу l движений $\text{ndpt } P$.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

База. Пусть $l = 1$.

Имеем

$$(q, x, Z, \varepsilon) \mid_P (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В этом случае $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $(p, \varepsilon, y) \in \delta(q, x, Z)$. Тогда по построению схемы T существует правило $[qZp] \rightarrow x, y \in R$, с помощью которого немедленно получаем:

$$([qZp], [qZp]) \xRightarrow{T} (x, y).$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Индукционная гипотеза. Предположим, что утверждение I выполняется для всех переходов между конфигурациями за число движений $l \leq n$ ($n \leq 1$).

Индукционный переход. Докажем, что тогда утверждение I справедливо и для $l = n + 1$.

Итак, пусть

$$(q, x, Z, \varepsilon) \stackrel{n+1}{\underset{P}{|}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Рассмотрим этот переход подробнее.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

В общем случае первое движение имеет вид

$$(q, x, Z, \varepsilon) = (q, ax', Z, \varepsilon) \stackrel{|_P}{=} \stackrel{|_P}{=} (q_1, x', Z_1 Z_2 \dots Z_m, y_0). \quad (1.10)$$

Затем следуют дальнейшие движения:

$$\begin{aligned} (q_1, x', Z_1 Z_2 \dots Z_m, y_0) &= \\ &= (q_1, x_1 x_2 \dots x_m, Z_1 Z_2 \dots Z_m, y_0) \stackrel{|_P}{\stackrel{l_1}{=}} \\ &\stackrel{|_P}{\stackrel{l_1}{=}} (q_2, x_2 \dots x_m, Z_2 \dots Z_m, y_0 y_1) \stackrel{|_P}{\stackrel{l_2}{=}} \dots \\ &\stackrel{|_P}{\stackrel{l_m}{=}} (q_{m+1}, \varepsilon, \varepsilon, y_0 y_1 y_2 \dots y_m) = (p, \varepsilon, \varepsilon, y). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Здесь $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x = ax_1 x_2 \dots x_m$,

$$y = y_0 y_1 y_2 \dots y_m,$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

причём

$$(q_i, x_i, Z_i, \varepsilon) \stackrel{l_i}{\mid}_P (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon, y_i), \quad (1.12)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; l_i \leq n; q_{m+1} = p.$$

Первое движение (1.10) существует потому, что $(q_1, Z_1 Z_2 \dots Z_m, y_0) \in \delta(q, a, Z)$, следовательно, по способу построения правил схемы в ней имеется правило

$$[qZp] \rightarrow a[q_1 Z_1 q_2][q_2 Z_2 q_3] \dots [q_m Z_m q_{m+1}],$$

$$y_0 [q_1 Z_1 q_2][q_2 Z_2 q_3] \dots [q_m Z_m q_{m+1}], \quad (1.13)$$

в обозначениях нетерминалов которого участвуют те состояния, по которым проходил $\text{npdt } P$.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Из последующих движений (1.11) согласно индукционной гипотезе, применённой к (1.12), следует существование выводов

$$([q_i Z_i q_{i+1}], [q_i Z_i q_{i+1}]) \xRightarrow{T}^* (x_i, y_i), \quad (1.14)$$

$i = 1, 2, \dots, m.$

Из (1.13) и (1.14) можно выстроить требуемый вывод:

$$([qZp], [qZp]) \xRightarrow{T} (a[q_1 Z_1 q_2] \dots [q_m Z_m q_{m+1}],$$

$$y_0 [q_1 Z_1 q_2] \dots [q_m Z_m q_{m+1}]) \xRightarrow{T}^*$$

$$\xRightarrow{T}^* (ax_1 x_2 \dots x_m, y_0 y_1 \dots y_m) = (x, y).$$

$$\tau_\varepsilon(P) \subseteq \tau(T)$$

II. Индукцией по длине l вывода докажем теперь обратное утверждение:

$$\begin{aligned} &\text{если } ([qZp], [qZp]) \xRightarrow[T]{l} (x, y), \\ &\text{то } (q, x, Z, \varepsilon) \vdash_P^* (p, \varepsilon, \varepsilon, y). \end{aligned}$$

База. Пусть $l = 1$. Имеем $([qZp], [qZp]) \xRightarrow[T]{} (x, y)$.

На единственном шаге этого вывода использовано правило схемы $[qZp] \rightarrow x, y$, которое обязано своим происхождением тому, что $(p, \varepsilon, y) \in \delta(q, x, Z)$, где $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $y \in \Delta^*$, а тогда $(q, x, Z, \varepsilon) \vdash_P (p, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Индукционная гипотеза. Предположим, что аналогичное утверждение выполняется для всех выводов, длина которых не превосходит n ($n \leq 1$).

Индукционный переход. Докажем аналогичное утверждение для выводов длиной $l = n + 1$.

Пусть

$$\begin{aligned}
 ([qZp], [qZp]) &\xRightarrow{T} \\
 &\xRightarrow{T} (a[q_1Z_1q_2] \cdots [q_mZ_mq_{m+1}], \\
 &\quad y_0[q_1Z_1q_2] \cdots [q_mZ_mq_{m+1}]) \xRightarrow[n]{T} (x, y). \quad (1.15)
 \end{aligned}$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Из (1.15) следует, что существует правило

$$\begin{aligned} [qZp] &\rightarrow a[q_1Z_1q_2]\cdots[q_mZ_mq_{m+1}], \\ y[q_1Z_1q_2]\cdots[q_mZ_mq_{m+1}] &\in R, \end{aligned}$$

которое обязано своим происхождением тому, что

$$(q_1, Z_1 \dots Z_m, y) \in \delta(q, a, Z). \quad (1.16)$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Кроме того, из (1.15) следует, что

$$x = ax_1 \dots x_m, y = y_0 y_1 \dots y_m, \quad (1.17)$$

$$([q_i Z_i q_{i+1}], [q_i Z_i q_{i+1}]) \quad (\overset{l_i}{x} \rightarrow y_i), l_i \leq n,$$

а тогда согласно индукционной гипотезе

$$(q_i, x_i, Z_i, \varepsilon) \quad \overset{*}{\vdash}_P \varepsilon, \varepsilon, y_i), \quad (1.18)$$

$$i = 1, 2, \dots, m; q_{m+1} = p.$$

Из (1.16) и (1.18) с учетом (1.17) выстраивается последовательность движений:

$$\begin{aligned} (q, x, Z, \varepsilon) &= (q, ax_1 \dots x_m, Z, \varepsilon) \overset{\vdash}{\vdash}_P \\ &\overset{\vdash}{\vdash}_P (q_1, x_1 \dots x_m, Z_1 \dots Z_m, y_0) \overset{*}{\vdash}_P \\ &\overset{*}{\vdash}_P (p, \varepsilon, \varepsilon, y_0 y_1 \dots y_m) = (p, \varepsilon, \varepsilon, y). \end{aligned}$$

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Из рассуждений I и II следует, что для любых $q, p \in Q$ и $Z \in \Gamma$ вывод

$$([qZp], [qZp]) \xRightarrow{T^*} (x, y)$$

существует тогда и только тогда, когда

$$(q, x, Z, \varepsilon) \mid_P^* (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В частности, это справедливо для $q = q_0$ и $Z = Z_0$.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

В то же время при помощи правила вида $S \rightarrow [q_0 Z_0 p]$, $[q_0 Z_0 p]$ всегда можно пристроить начало к вышеприведённому выводу, чтобы считать доказанным утверждение:

$$(S, S) \xRightarrow{T} ([q_0 Z_0 p], [q_0 Z_0 p]) \xRightarrow{T}^* (x, y)$$

тогда и только тогда, когда

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \mid_P^* (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Лемма доказана.

$$\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$$

Из лемм 1.1 и 1.2 следует

Теорема 1.1. *Трансляция $\tau = \tau(T)$, где T — простая схема синтаксически управляемой трансляции, существует тогда и только тогда, когда существует недетерминированный магазинный преобразователь P , такой, что $\tau_e(P) = \tau$.*

[Ret 106](#)

Пример 1.5. В предыдущем примере по простой

sdts $T = (\{E\}, \{a, +, *\}, \{a, +, *\}, R, E)$, где

$$R = \{ \quad (1) E \rightarrow +EE, EE+ ;$$

$$(2) E \rightarrow *EE, EE* ;$$

$$(3) E \rightarrow a, a\},$$

был построен эквивалентный prdt

$$P = (\{q\}, \{a, +, *\}, \{E, a, +, *, a', +', *'\}, \{a, +, *\}, \\ \delta, q, E, \emptyset),$$

$$\text{где } 1) \delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, +EE+', \varepsilon),$$

$$(q, *EE*', \varepsilon),$$

$$(q, aa', \varepsilon)\},$$

$$2) \delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\} \text{ для всех } b \in \{a, +, *\},$$

$$3) \delta(q, \varepsilon, c') = \{(q, \varepsilon, c)\} \text{ для всех } c \in \{a, +, *\}.$$

Пример 1.5.

Теперь по этому недетерминированному преобразователю P мы построим эквивалентную простую схему синтаксически управляемой трансляции, воспользовавшись алгоритмом, описанным в лемме [1.2](#).

Пример 1.5.

Положим $T = (\{S, [qEq], [qaq], [q^+q], [q_*q], [qa'q], [q^+'q], [q_*'q]\}, \{a, +, *\}, \{a, +, *\}, R, S)$,

$R = \{(1) S \rightarrow [qEq], [qEq];$

(2) $[qEq] \rightarrow [q^+q] [qEq] [qEq] [q^+'q],$
 $[q^+q] [qEq] [qEq] [q^+'q];$

(3) $[qEq] \rightarrow [q_*q] [qEq] [qEq] [q_*'q],$
 $[q_*q] [qEq] [qEq] [q_*'q];$

(4) $[qEq] \rightarrow [qaq] [qa'q], [qaq] [qa'q];$

(5) $[qaq] \rightarrow a, \varepsilon;$ (8) $[qa'q] \rightarrow \varepsilon, a;$

(6) $[q^+q] \rightarrow +, \varepsilon;$ (9) $[q^+'q] \rightarrow \varepsilon, +;$

(7) $[q_*q] \rightarrow *, \varepsilon;$ (10) $[q_*'q] \rightarrow \varepsilon, *.$

Пример 1.5.

Эта схема мало похожа на ИСХОДНУЮ, в которой было всего три правила. Однако её можно эквивалентными преобразованиями привести к исходной.

Пример 1.5.

Во-первых, правые части правил 5–10 можно подставить в правые части правил 2–4. В результате получим

$$R' = \{ (1) S \rightarrow [qEq], [qEq]; \\ (2') [qEq] \rightarrow +[qEq] [qEq], [qEq] [qEq]^+; \\ (3') [qEq] \rightarrow *[qEq] [qEq], [qEq] [qEq]^*; \\ (4') [qEq] \rightarrow a, a \}.$$

Легко видеть, что из (S, S) выводится в точности то же, что и из $([qEq], [qEq])$. Остается заменить в правилах 2'–4' слева и справа $[qEq]$ на простое E и отбросить бесполезное правило 1, чтобы получить исходную схему.