# Часть II.
# Глава 1.
# Трансляции, их представление и реализация

# § 1.1. Трансляции и трансляторы

***Определение 1.1.*** *Трансляцией* из языка $L_1 \subseteq \Sigma^*$ в язык $L_2 \subseteq \Delta^*$ называется отношение $\tau \subseteq L_1 \times L_2$.

Здесь $\Sigma$ — *входной алфавит*, $L_1$ — *входной язык*, $\Delta$ — *выходной алфавит*, $L_2$ — *выходной язык*.

Другими словами, трансляция есть некоторое множество пар предложений $(x, y)$, где $x \in L_1$ — *входное*, а $y \in L_2$ — *выходное предложение*.

Хотя в общем случае в трансляции $\tau$ одному входному предложению $x$ может соответствовать несколько выходных предложений $y$, по отношению к языкам программирования трансляция всегда является *функцией*, т. е. для каждого входа существует не более одного выхода.

Существует бесконечно много примеров трансляций, но самым элементарным, вероятно, является тот, который может быть задан *гомоморфизмом*, т. е. отображением $h$ из $\Sigma$ в $\Delta^*$.

**Пример 1.1.** Предположим, что мы хотим закодировать некоторый текст с помощью азбуки Морзе. Как известно, в коде Морзе каждая буква представляется как некоторая последовательность из точек и тире. Эти последовательности, называемые *посылками*, имеют разную длину. Для отделения одной посылки от другой используется *пауза*.

Очевидно, что трансляцию предложений, например, на русском языке, в код Морзе можно реализовать с помощью гомоморфизма, задаваемого следующим образом:

*Буква*: а б в …я

*Посылка*: ·— —··· ·—— …·—·—

Для простоты предполагаем, что паузы представлены пробелами, завершающими каждую посылку. Тогда, скажем, слово “абба” с помощью замены букв на посылки даёт результат: ·— —··· —··· ·—

Для любой входной цепочки $x = a_1 a_2 \ldots a_n$, $a_i \in \Sigma$, $i=1,2,\ldots,n$, гомоморфизм $h$ позволяет найти соответствующую выходную цепочку $y \in \Delta^*$ с помощью посимвольной подстановки: $y = h(a_1)h(a_2)\ldots h(a_n)$.

Область определения гомоморфизма можно расширить до $\Sigma^*$ следующим образом:

$h'(ax) = h(a)h'(x)$, $h'(\varepsilon) = \varepsilon$. Здесь $a \in \Sigma$, $x \in \Sigma^*$.

Далее используется одно и тоже обозначение $h$ для гомоморфизма на $\Sigma$ и $\Sigma^*$.

Гомоморфизм $h$ определяет трансляцию
$$\tau(h) = \{(x, h(x)) \mid x \in \Sigma^*\}.$$

Устройство, которое по заданной цепочке $x \in \Sigma^*$ находит соответствующую цепочку $y = h(x)$, такую, что $(x, y) \in \tau(h)$, тривиально: оно должно посимвольно просмотреть входную цепочку $x$ и заменить каждый её символ $a$ на $h(a)$. Это устройство является примером простейшего транслятора, реализующего трансляцию $\tau(h)$.

Реалистичным примером транслятора, основанного на гомоморфизме, является простейший *ассемблер*.

*Транслятором* для данной трансляции $\tau$ называется такое устройство, которое по данной входной строке $x$ вычисляет выходную цепочку $y$, такую, что $(x, y) \in \tau$.

Желательными свойствами транслятора являются:

1) *эффективность* (время, затрачиваемое на перевод входной строки, должно быть линейно пропорционально её длине);

2) *малый размер*;

3) *правильность* (желательно иметь небольшой тест, такой, чтобы если транслятор прошёл его, то это гарантировало бы правильную работу транслятора на *всех* входных цепочках).

## § 1.2. Схемы синтаксически управляемой трансляции

Трансляторы являются средством реализации трансляций, хотя их можно рассматривать также и как способ задания трансляций.

Способом спецификации трансляций, более сложных, чем те, которые описываются при помощи гомоморфизма, является аппарат *схем синтаксически управляемых трансляций* (sdts — **s**yntax-**d**irected **t**ranslation **s**chema).

<u>***Определение* 1.2.**</u> *Схемой синтаксически управляемой трансляции* называется формальная система $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где

$N$ — *алфавит нетерминалов*;

$\Sigma$ — конечный *входной алфавит*;

$\Delta$ — конечный *выходной алфавит*,

причём $N \cap \Sigma = \varnothing$ и $N \cap \Delta = \varnothing$;

$R$ — конечное множество *правил* схемы вида

$A \to \alpha, \beta$, где $A \in N$, $\alpha \in (N \cup \Sigma)^*$, $\beta \in (N \cup \Delta)^*$, причём каждое вхождение нетерминала в цепочку α взаимно однозначно *связано* с некоторым вхождением одноимённого нетерминала в β, и эта связь является неотъемлемой частью правила;

$S \in N$ — *начальный нетерминал*.

Цепочка α называется *синтаксической*, а цепочка β — *семантической*.

Для указания связей между вхождениями нетерминалов можно использовать индексы.

Например, связанные вхождения одноимённых нетерминалов помечаются одинаковыми индексами:

$$A \to aB^{(1)}bCB^{(2)},\ B^{(2)}B^{(1)}dC.$$

***Определение* 1.3.** Введем понятие *трансляционной формы* следующим образом:

1) $(S, S)$ — *начальная трансляционная форма*, причём эти два вхождения начального нетерминала связаны друг с другом по определению;

2) если $(\alpha A \beta, \alpha' A \beta')$ — трансляционная форма, в которой два явно выделенных вхождения нетерминала $A$ связаны, и если $A \to \gamma, \gamma'$ — правило из $R$, то $(\alpha\gamma\beta, \alpha'\gamma'\beta')$ — трансляционная форма; причём связь между нетерминалами в $\gamma$ и $\gamma'$ такая же, как в правиле; нетерминалы в цепочках $\alpha$ и $\beta$ связываются с нетерминалами в цепочках $\alpha'$ и $\beta'$ в новой трансляционной форме точно так же, как в предыдущей; *связь между нетерминалами* является существенной чертой трансляционной формы;

3) трансляционными формами являются такие и только такие пары цепочек, которые могут быть получены с помощью этих двух способов.

Это определение фактически вводит *отношение непосредственной выводимости* одной трансляционной формы из другой. В таком случае принято писать:

$$(\alpha A\beta,\ \alpha' A\beta') \underset{T}{\Rightarrow} (\alpha\gamma\beta,\ \alpha'\gamma'\beta').$$

Для степени, транзитивного и рефлексивно-транзитивного замыкания этого отношения используются соответственно следующие обозначения: $\overset{n}{\underset{T}{\Longrightarrow}}$, $\overset{+}{\underset{T}{\Longrightarrow}}$ и $\overset{*}{\underset{T}{\Longrightarrow}}$.

Когда ясно, в какой схеме производится вывод, имя схемы может быть опущено.

***<u>Определение</u>*** **<u>1.4.</u>** *Трансляция*, заданная при помощи схемы синтаксически управляемой трансляции $T$, есть множество

$$\tau(T) = \{(x, y) \mid (S, S) \underset{T}{\overset{*}{\Rightarrow}} (x, y), x \in \Sigma^*, y \in \Delta^*\}$$

и называется *синтаксически управляемой трансляцией* (sdt — **s**yntax-**d**irected **t**ransla-tion).

***Определение* 1.5.**

Грамматика $G_i = (N, \Sigma, P_i, S)$, где

$$P_i = \{A \to \alpha \mid \exists\ A \to \alpha, \beta \in R\},$$

называется *входной грамматикой* схемы.

Грамматика $G_o = (N, \Delta, P_o, S)$, где

$$P_o = \{A \to \beta \mid \exists\ A \to \alpha, \beta \in R\},$$

называется *выходной грамматикой* схемы.

Очевидно, что $G_i$ и $G_o$ — контекстно-свободные грамматики, порождающие входной и выходной языки трансляции, задаваемой схемой.

Ret 24

**Пример 1.2.** Пусть sdts

$$T = (\{E, T, F\}, \{a, +, *, (, )\}, \{a, +, *\}, R, E),$$

где $R = \{(1)\ E \to E + T, E\ T\ +;$

$(2)\ E \to T, T;$

$(3)\ T \to T * F, T\ F\ *;$

$(4)\ T \to F, F;$

$(5)\ F \to (E), E;$

$(6)\ F \to a, a\ \}.$

Связь между нетерминалами в этих правилах очевидна, так как в синтаксической и семантической цепочках каждого правила не более чем одно вхождение нетерминала, представленного данным символом из $\{E, T, F\}$.

Рассмотрим какой-нибудь левосторонний вывод в схеме $T$, например:

$$
\begin{aligned}
&(E, E) \underset{T}{\overset{(1)}{\Longrightarrow}} (E + T, ET+) \underset{T}{\overset{(2)}{\Longrightarrow}} \\
&(T^{(1)} + T, T^{(1)}T+) \underset{T}{\overset{(4)}{\Longrightarrow}} \\
&(F + T, FT+) \underset{T}{\overset{(6)}{\Longrightarrow}} \\
&(a + T, aT+) \underset{T}{\overset{(3)}{\Longrightarrow}} \\
&(a + T_{*} F, aTF_{*}+) \underset{T}{\overset{(4,6)}{\Longrightarrow}} \\
&(a + a_{*} F, aaF_{*}+) \underset{T}{\overset{(6)}{\Longrightarrow}} \\
&(a + a_{*} a, aaa_{*}+).
\end{aligned}
$$

Нетрудно догадаться, что

$\tau(T) = \{(x, y) \mid$

$x$ — инфиксная запись,

$y$ — эквивалентная постфиксная запись арифметического выражения$\}$.

***Определение* 1.6.** Схема синтаксически управляемой трансляции называется *простой*, если в каждом её правиле

$$A \to \alpha, \beta$$

связанные нетерминалы в цепочках α и β встречаются в одинаковом порядке.

Трансляция, определяемая простой схемой, называется *простой синтаксически управляемой трансляцией*.

Многие, но не все, полезные трансляции могут быть описаны как простые.

В примере 1.2 схема $T$, как и определяемая ею трансляция $\tau(T)$, является простой.

Простые синтаксически управляемые трансляции интересны тем, что каждая из них может быть реализована транслятором в классе недетерминированных магазинных преобразователей (рис. 1.1).

Другими словами, *магазинные преобразователи характеризуют класс простых синтаксически управляемых трансляций* таким же образом, как магазинные автоматы характеризуют класс контекстно-свободных языков.

К рассмотрению таких трансляций мы сейчас и перейдем.

## § 1.3. Магазинные преобразователи и синтаксически управляемые трансляции

Здесь мы рассмотрим магазинные преобразователи, отличающиеся от магазинных автоматов тем, что у них есть выходная лента.

# Недетерминированный магазинный преобразователь

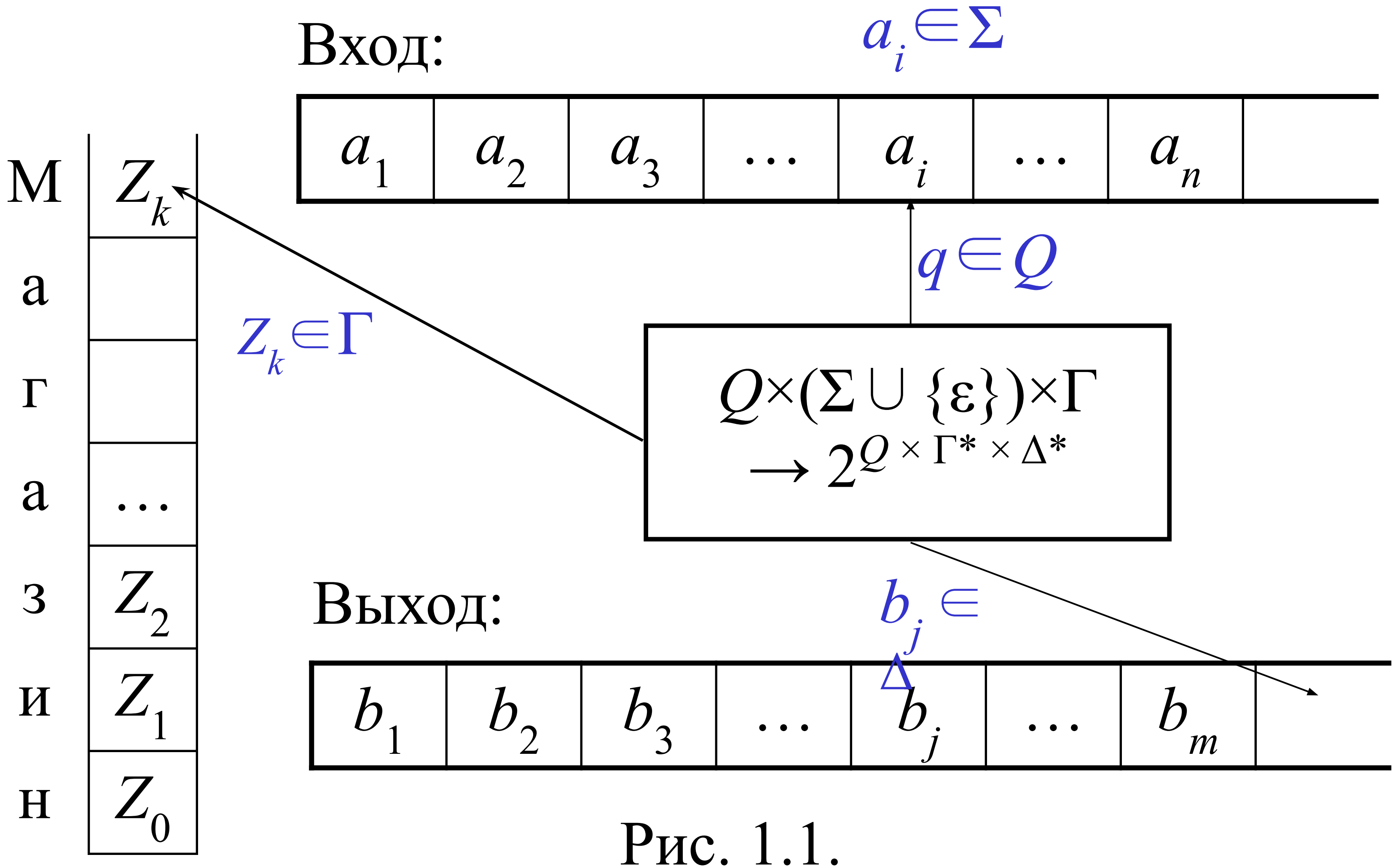


Рис. 1.1.

Ret 24

***Определение*** **1.7.**

*Недерминированный магазинный преобразователь* (npdt — **n**ondeterministic **p**ush**d**own **t**ransducer) есть формальная система

$$P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F), \text{ где}$$

$Q$ — *конечное множество состояний*,

$\Sigma$ — *конечный входной алфавит*,

$\Gamma$ — *конечный алфавит магазинных символов*,

$\Delta$ — *конечный выходной алфавит*,

$q_0 \in Q$ — *начальное состояние*,

$Z_0 \in \Gamma$ — *начальный символ магазина*,

$F \subseteq Q$ — *множество конечных состояний*,

$\delta$ — *отображение типа* $Q \times (\Sigma \cup \{\varepsilon\}) \times \Gamma \to 2^{Q \times \Gamma^* \times \Delta^*}$, причём область значений $\delta$ представлена *конечными* подмножествами ***троек*** из $Q \times \Gamma^* \times \Delta^*$.

Запись

$$\delta(q, a, Z) = \{(p_i, \gamma_i, y_i)\}_{i=1}^{n}$$

означает, что npdt $P$, находясь в состоянии $q \in Q$, сканируя $a \in \Sigma$ на входной ленте или не зависимо от текущего входного символа в случае $a = \varepsilon$, имея $Z \in \Gamma$ на вершине магазина, переходит в одно из состояний $p_i \in Q$, заменяя в магазине символ $Z$ на цепочку $\gamma_i \in \Gamma^*$ и записывая цепочку $y_i \in \Delta^*$ на выходную ленту.

При этом входная головка сдвигается на одну ячейку вправо, если $a \neq \varepsilon$, иначе головка остается на месте, головка магазина сканирует последнюю запись в магазине, а головка выходной ленты размещается справа от последней её записи.

В частности:

- если $a = \varepsilon$, то выбор действия не зависит от текущего входного символа и, как уже отмечалось, входная головка неподвижна;
- если $\gamma_i = \varepsilon$, то верхний символ магазина стирается, а вершина магазина опускается;
- если $y_i = \varepsilon$, то на выходную ленту ничего не пишется, и её головка остается на прежнем месте.

В начальный момент $q = q_0$, в магазине находится единственный символ $Z_0$, входная головка сканирует первую ячейку на входной ленте, а выходная лента пуста, причём её головка находится на первой ячейке.

Работу магазинного преобразователя опишем в терминах конфигураций.

**<u>*Определение* 1.8.</u>** *Конфигурацией магазинного преобразователя* $P$ назовем четверку ($q$, $x$, $\alpha$, $y$), где $q \in Q$ — *текущее состояние*, $x \in \Sigma^*$ — часть входной цепочки от текущего символа до её последнего символа, называемая *непросмотренной частью входной цепочки*, $\alpha \in \Gamma^*$ — *содержимое магазина* (будем считать, что первый символ цепочки $\alpha$ есть верхний символ магазина), $y \in \Delta^*$ — *вся выходная цепочка*.

Таким образом, *начальная конфигурация* есть $(q_0,x,Z_0,\varepsilon)$, где $x$ обозначает *всю входную цепочку*.

Пусть $(q,ax,Z\alpha,y)$ — текущая конфигурация, и $(p, \gamma, z) \in \delta(q, a, Z)$.

Тогда один такт работы pdt $P$ записывается как отношение между двумя последовательными конфигурациями:

$$(q, ax, Z\alpha, y) \vdash (p, x, \gamma\alpha, yz).$$

Здесь $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x \in \Sigma^*$, $Z \in \Gamma$, $\alpha, \gamma \in \Gamma^*$, $y, z \in \Delta^*$.

Как обычно, определяются степень ($\vdash^{n}$), транзитивное замыкание ($\vdash^{+}$) и рефлексивно-транзитивное замыкание ($\vdash^{*}$) этого отношения.

***<u>Определение 1.9.</u>*** Говорят, что $y \in \Delta^*$ есть *выход* для $x \in \Sigma^*$ *при конечном состоянии*, если

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y)$$

для некоторых $q \in F$ и $\alpha \in \Gamma^*$.

*Трансляция*, определяемая магазинным преобразователем $P$ *при конечном состоянии*, есть

$$\tau(P) = \{(x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \alpha, y)$$

для некоторых $q \in F$ и $\alpha \in \Gamma^*\}$.

Говорят, что $y \in \Delta^*$ есть *выход* для $x \in \Sigma^*$ *при пустом магазине*, если

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$$

для некоторого $q \in Q$.

*Трансляция*, определяемая магазинным преобразователем $P$ *при пустом магазине*, есть

$$\tau_e(P) = \{(x, y) \mid (q_0, x, Z_0, \varepsilon) \vdash^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$$

для некоторого $q \in Q\}$.

**Пример 1.3.** Пусть pdt $P = (\{q\}, \{a, +, *\},$
$\{E, +, *\}, \{a, +, *\}, \delta, q, E, \{q\})$, где

1) $\delta(q, a, E) = \{(q, \varepsilon, a)\}$,
2) $\delta(q, +, E) = \{(q, EE+, \varepsilon)\}$,
3) $\delta(q, *, E) = \{(q, EE*, \varepsilon)\}$,

Входной символ используется

4) $\delta(q, \varepsilon, +) = \{(q, \varepsilon, +)\}$,
5) $\delta(q, \varepsilon, *) = \{(q, \varepsilon, *)\}$.

Входной символ не используется

Ret 66

## Пример 1.3.

Рассмотрим действия pdt $P$ на входе $+*aaa$:

$(q, +_*aaa, E, \varepsilon) \vdash^{(2)} (q, {}_*aaa, EE+, \varepsilon) \vdash^{(3)}$

$\vdash^{(3)} (q, aaa, EE_*E+, \varepsilon) \vdash^{(1)} (q, aa, E_*E+, a) \vdash^{(1)}$

$\vdash^{(1)} (q, a, {}_*E+, aa) \vdash^{(5)} (q, a, E+, aa_*) \vdash^{(1)}$

$\vdash^{(1)} (q, \varepsilon, +, aa_*a) \vdash^{(4)} (q, \varepsilon, \varepsilon, aa_*a+)$.

Очевидно, что он преобразует префиксные арифметические выражения в постфиксные.

Данный магазинный преобразователь является примером *детерминированного* магазинного преобразователя (*см.* определение 1.10 далее).

***Определение* 1.10.** Магазинный преобразователь $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, F)$ называется *детерминированным* (dpdt), если

1) $\#\delta(q, a, Z) \le 1$
для всех $q \in Q$, $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $Z \in \Gamma$;

2) если $\delta(q, \varepsilon, Z) \neq \varnothing$ для данных $q \in Q$ и $Z \in \Gamma$, то $\delta(q, a, Z) = \varnothing$ для всех $a \in \Sigma$.

На практике предпочитают использовать детерминированными магазинными преобразователями (dpdt), поскольку в реализации они оказываются более эффективными по сравнению с недетерминированными магазинными преобразователями (npdt).

Когда неважно различать, о каких преобразователях, детерминированных или недетерминированных, идёт речь, используется обозначение pdt.

**Лемма 1.1.** *Пусть* $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$ — *простая схема синтаксически управляемой трансляции.*

*Существует недетерминированный магазинный преобразователь* $P$*, такой, что* $\tau_e(P) = \tau(T)$.

*Доказательство*. Построим npdt $P$, о котором идёт речь, и покажем, что он реализует трансляцию $\tau(T)$.

Ret 65

Положим

$$P = (\{q\}, \Sigma, N \cup \Sigma \cup \Delta', \Delta, \delta, q, S, \varnothing).$$

Чтобы отличать в магазине $P$ входные символы от выходных, последние переименовываются с помощью гомоморфизма $h$, определяемого для каждого выходного символа $b \in \Delta$ при помощи равенства $h(b) = b'$ таким образом, чтобы множество символов $\Delta' = \{b' \mid b \in \Delta\}$ не пересекалось со словарем $\Sigma$, т. е. $\Sigma \cap \Delta' = \varnothing$.

Отображение $\delta$ определяется так:

**1.** $(q, x_0 y_0{}' B_1 x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A)$, если

$$A \to x_0 B_1 x_1 \ldots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \ldots B_m y_m \in R,$$

$$y_i{}' = h(y_i), i = 1, 2, \ldots, m, \text{ где } m \geq 0.$$

Здесь $h(by) = b'h(y)$ для каждого $b \in \Delta$ и $y \in \Delta^*$, $h(\varepsilon) = \varepsilon$.

**2.** $\delta(q, a, a) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$ для всех $a \in \Sigma$.

**3.** $\delta(q, \varepsilon, b') = \{(q, \varepsilon, b)\}$ для всех $b \in \Delta$.

Ret 53 Ret 55

## $\tau(T) \subseteq \tau_e(P)$

I. Докажем сначала, что

если $(S, S) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$, то $(q, x, S, \varepsilon) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

Для этого индукцией по длине вывода $l$ докажем более общее утверждение для любого $A \in N$:

если существует вывод $(A, A) \overset{l}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$,

то $(q, x, A, \varepsilon) \overset{*}{\vdash} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

<u>*База*</u>. Пусть $l = 1$. Имеем $(A, A) \underset{T}{\Rightarrow} (x, y)$.

На этом единственном шаге вывода применяется правило $A \rightarrow x, y \in R$.

Ret 52

Согласно п.1 определения $\delta$ имеем

$$(q, xy', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A).$$

Поэтому $(q, x, A, \varepsilon) \vdash (q, x, xy', \varepsilon)$.

Далее согласно п.2

$$(q, x, xy', \varepsilon) \vdash^{|x|} (q, \varepsilon, y', \varepsilon).$$

Наконец, согласно п.3 имеем

$$(q, \varepsilon, y', \varepsilon) \vdash^{|y|} (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Итак, существует переход

$$(q, x, A, \varepsilon) \vdash^{*} (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

*Индукционная гипотеза*. Предположим, что вспомогательное утверждение выполняется для всех выводов длиной $l \leq n$ ($n \geq 1$).

*Индукционный переход*. Докажем утверждение для $l = n + 1$.

Пусть

$$(A, A) \underset{T}{\Rightarrow} (x_0 B_1 x_1 \ldots B_m x_m, y_0 B_1 y_1 \ldots B_m y_m) \overset{n}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$$

— вывод длиной $n + 1$.

Очевидно, что

$$x = x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, \; y = y_0 z_1 y_1 z_2 y_2 \ldots z_m y_m, \qquad (1.1)$$

и $(B_i, B_i) \overset{l_i}{\underset{T}{\Rightarrow}} (t_i, z_i)$, $l_i \leq n$, $i = 1, 2, \ldots, m$. $\qquad$ (1.2)

На первом шаге данного вывода было применено правило

$$A \to x_0B_1x_1B_2x_2\ldots B_mx_m,\ y_0B_1y_1B_2y_2\ldots B_my_m \in R$$

и потому согласно п.1 построения имеем

$$(q,\ x_0y_0'B_1x_1y_1'B_2x_2y_2'\ldots\ B_mx_my_m'B,\ \varepsilon) \in \delta(q,\ \varepsilon,\ A). \qquad (1.3)$$

Кроме того, согласно индукционной гипотезе из существования частичных выводов (1.2), следует возможность перехода

$$(q,\ t_i,\ B_i,\ \varepsilon) \vdash^{*} (q,\ \varepsilon,\ \varepsilon,\ z_i),\ i = 1,\ 2,\ldots,\ m. \qquad (1.4)$$

Рассмотрим движения pdt $P$.
Учитывая условия (1.1) и (1.3), имеем

$$(q, x, A, \varepsilon) = (q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, A, \varepsilon) \vdash_P$$
$$\vdash_P (q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \ldots B_m x_m y_m', \varepsilon).$$

Согласно п.2 построений имеем переход

$$(q, x_0 t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \ldots B_m x_m y_m', \varepsilon) \vdash_P^{|x_0|}$$
$$\vdash_P^{|x_0|} (q, t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \ldots B_m x_m y_m', \varepsilon);$$

согласно п.3 построений имеем переход

$$(q, t_1 x_1 t_2 x_2 \ldots t_m x_m, y_0' B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \ldots B_m x_m y_m', \varepsilon) \vdash_P^{|y_0|}$$
$$\vdash_P^{|y_0|} (q, t_1 x_1 \ldots t_m x_m, B_1 x_1 y_1' B_2 x_2 y_2' \ldots B_m x_m y_m', y_0).$$

Учитывая существование перехода (1.4) для $i = 1$, получаем:

$$(q, t_1x_1t_2x_2\ldots t_mx_m, B_1x_1y_1'B_2x_2y_2' \ldots B_mx_my_m', y_0) \overset{|t_1|}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{|t_1|}{\underset{P}{\vdash}} (q, x_1t_2x_2\ldots t_mx_m, x_1y_1'B_2x_2y_2'\ldots B_mx_my_m', y_0z_1).$$

Далее рассуждения с использованием пп.2, 3 построений, а также переходов (1.4) для $i = 2, 3,\ldots, m$, повторяются.

В результате получаем последующие движения:

$$(q, x_1t_2x_2\ldots t_mx_m, x_1y_1'B_2x_2y_2' \ldots B_mx_my_m', y_0z_1) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, t_2x_2\ldots t_mx_m, y_1'B_2x_2y_2' \ldots B_mx_my_m', y_0z_1) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, t_2x_2\ldots t_mx_m, B_2x_2y_2' \ldots B_mx_my_m', y_0z_1y_1) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} \ldots$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, t_mx_m, B_mx_my_m', y_0z_1y_1 \ldots z_{m-1}y_{m-1}) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, x_m, x_my_m', y_0z_1y_1 \ldots z_{m-1}y_{m-1}z_m) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, y_m', y_0z_1y_1 \ldots z_{m-1}y_{m-1}z_m) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y_0z_1y_1 \ldots z_{m-1}y_{m-1}z_my_m) = (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В конце рассуждений о движениях pdt $P$ принято во внимание представление цепочки $y$ согласно равенству (1.1).

Итак, вся последовательность движений может быть представлена в виде

$$(q, x, A, \varepsilon) \mathrel{\substack{*\\ \vdash\\ P}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В частности, из доказанного вспомогательного утверждения при $A = S$ следует утверждение I.

II. Докажем теперь обратное утверждение: если $(q, x, S, \varepsilon) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$ , то $(S, S) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$.

Для этого индукцией по числу $l$ движений типа 1, независимых от входных символов, определённых согласно п.1 построений, докажем более общее утверждение
для любого $A \in N$:
если $(q, x, A, \varepsilon) \overset{l}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$,
то $(A, A) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$.

*База*. Пусть $l = 1$.

Имеем $(q, x, A, \varepsilon) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y)$, где только одно движение типа 1. Очевидно, что оно — первое движение, так как в исходной конфигурации на вершине магазина находится $A \in N$. Это движение не может привести к появлению нетерминалов в магазинной цепочке из-за того, что они неизбежно привели бы к другим движениям типа 1.

Кроме того, магазинная цепочка, замещающая $A$ на вершине магазина, должна начинаться на $x$, так как только в этом случае удасться продвинуться по входу $x$ (за счёт движений, определённых в п.2, которые используют входные символы).

Наконец, магазинная цепочка должна заканчиваться на $y'$, потому что только в этом случае на выходе может образоваться цепочка $y$ (за счёт движений, определённых в п.3 , которые переносят образы выходных символов из магазина на выход).

Поэтому фактически имеем

$$(q, x, A, \varepsilon) \vdash_P (q, x, xy', \varepsilon) \vdash_P^{|x|} (q, \varepsilon, y', \varepsilon) \vdash_P^{|y|}$$
$$\vdash_P^{|y|} (q, \varepsilon, \varepsilon, y),$$

где первое движение обусловлено тем, что

$$(q, xy', \varepsilon) \in \delta(q, \varepsilon, A),$$

а это означает существование правила

$$A \to x, y \in R.$$

Два последних перехода выполнены согласно пп. 2, 3 построений.

Воспользовавшись существующим правилом, немедленно получаем вывод

$$(A, A) \underset{T}{\Rightarrow} (x, y).$$

*Индукционная гипотеза*. Предположим, что вспомогательное утверждение выполняется для всех $l \le n$ ($n \ge 1$).

*Индукционный переход*. Докажем утверждение для $l = n + 1$.

Пусть имеется переход

$$(q, x, A, \varepsilon) \mathrel{\vdash\!\!\frac{\;*\;}{P}} (q, \varepsilon, \varepsilon, y),$$

в котором ровно $n + 1$ движение типа 1.

Поскольку в исходной конфигурации на вершине магазина $A \in N$, то первое же движение — типа 1:

$$(q, x, A, \varepsilon) \vdash_P (q, x, x_0 y_0' B_1 x_1 y_1' \ldots B_m x_m y_m', \varepsilon) \vdash_P^* \vdash_P^* (q, \varepsilon, \varepsilon, y). \quad (1.5)$$

В конечной конфигурации магазин пуст. Цепочка $x_0 \in \Sigma^*$, появившаяся в верхней части магазина после первого движения, может быть удалена только, если входная цепочка $x$ начинается на $x_0$.

Ret 63

Поэтому далее последуют движения, определяемые п.2, которые продвинут вход по $x_0$ и удалят такую же цепочку из магазина.

$$(q, x, A, \varepsilon) \vdash_P (q, x_0 \overset{\triangle}{x}, x_0 y_0{}' B_1 x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', \varepsilon)$$

$$\vdash_P^* (q, \overset{\triangle}{x}, y_0{}' B_1 x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', \varepsilon) \ldots$$

Далее ряд движений, определяемых п.3, удалит цепочку $y_0{}'$ из магазина, выдав на выход $y_0$, и символ $B_1$ окажется на вершине магазина.

$$\vdash_P^{|y_0|} (q, \overset{\triangle}{x}, B_1 x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', y_0) =$$

# $\tau_e(P) \subseteq \tau(T)$

К моменту, когда вершина магазина опустится ниже позиции $B_1$, будет просканирована некоторая часть входа $t_1$, следующая за цепочкой $x_0$, т. е. $\overset{\vartriangle}{x} = t_1\hat{x}$, а на выходе образуется некоторая цепочка $z_1$:

$$= (q, \overbrace{t_1\hat{x}}^{\overset{\vartriangle}{x}}, B_1 x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', y_0) \overset{l_1}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$(q, \hat{x}, x_1 y_1{}' \ldots B_m x_m y_m{}', y_0 z_1)$$

Далее мы можем повторить рассуждения, аналогичные предыдущим, относя их к цепочкам $x_i \in \Sigma^*$, $y_i' \in \Delta'$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ и $B_j \in N$ $(j = 2, \ldots, m)$, последовательно появляющимся в верхней части магазина в результате серии движений, построенных в соответствии с п.2, затем п.3, и ряда движений, приводящих к понижению вершины магазина ниже позиции, занимаемой $B_j$.

Другими словами, детальный разбор возможных движений от исходной конфигурации к конечной даёт основание утверждать, что вход $x$ и выход $y$ представимы в виде

$$x = x_0 t_1 x_1 \ldots t_m x_m,\ y = y_0 z_1 y_1 \ldots z_m y_m, \quad (1.6)$$

причём

$$(q, t_i, B_i, \varepsilon) \overset{l_i}{\underset{P}{\vdash}} (q, \varepsilon, \varepsilon, z_i), \quad (1.7)$$

$l_i \leq n$, $i = 1, 2, \ldots, m$.

По построению первое движение (1. По построению первое движение (1.5 По построению первое движение (1.5) обусловлено существованием правила

$$A \to x_0B_1x_1\ldots B_mx_m, y_0B_1y_1\ldots B_my_m \in R, \quad (1.8)$$

а из существования движений (1.7) по индукционному предположению следует существование выводов

$$(B_i, B_i) \overset{l_i}{\underset{T}{\Rightarrow}} (t_i, z_i), i = 1, 2, \ldots, m. \quad (1.9)$$

Используя (1.8) и (1.9), с учетом (1.6) получаем:

$$(A, A) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x_0B_1x_1\ldots B_mx_m, y_0B_1y_1\ldots B_my_m) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}}$$

$$(x_0t_1x_1\ldots t_mx_m, y_0z_1y_1\ldots z_my_m) = (x, y).$$

В частности, при $A = S$ следует утверждение II.

Из рассуждений I и II следует утверждение леммы.

Доказанная лемма даёт алгоритм построения недетерминированного магазинного преобразователя, эквивалентного данной простой схеме синтаксически управляемой трансляции.

**Пример 1.4.**

Пусть sdts $T = (\{E\}, \{a, +, *\}, \{a, +, *\}, R, E)$, где

$R = \{(1)\ E \to +EE, EE+\ ;$

$(2)\ E \to {*}EE, EE{*}\ ;$

$(3)\ E \to a, a\}.$

По лемме 1.1 эквивалентный npdt есть

$P = (\{q\}, \{a, +, *\}, \{E, a, +, *, a', +', *'\}, \{a, +, *\}, \delta,$

$q, E, \varnothing)$, где

1) $\delta(q, \varepsilon, E) = \{ (q, +EE+', \varepsilon),$

$(q, {*}EE{*}', \varepsilon),$

$(q, aa', \varepsilon)\},$

2) $\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$ для всех $b \in \{a, +, *\}$,

3) $\delta(q, \varepsilon, c') = \{(q, \varepsilon, c)\}$ для всех $c \in \{a, +, *\}$.

## Пример 1.4.

Сравните этот *недетерминированный* магазинный преобразователь с эквивалентным *детерминированным* преобразователем из примера 1.3.

Оба преобразуют префиксные арифметические выражения в постфиксные.

$(q, +_*aaa, E, \varepsilon) \vdash (q, +_*aaa, +EE+', \varepsilon) \vdash (q, {}_*aaa, EE+', \varepsilon) \vdash$

$\vdash (q, {}_*aaa, {}_*EE_*'E+', \varepsilon) \vdash (q, aaa, EE_*'E+', \varepsilon) \vdash$

$\vdash (q, aaa, aa'E_*'E+', \varepsilon) \vdash (q, aa, a'E_*'E+', \varepsilon) \vdash$

$\vdash (q, aa, E_*'E+', a) \vdash (q, aa, aa'{}_*'E+', a) \vdash$

$\vdash (q, a, a'{}_*'E+', a) \vdash (q, a, {}_*'E+', aa) \vdash (q, a, E+', a\,a\,{}_*) \vdash$

$\vdash (q, a, aa'+', aa_*) \vdash (q, \varepsilon, a'+', aa_*) \vdash (q, \varepsilon, +', a\,a\,{}_*\,a) \vdash$

$\vdash (q, \varepsilon, \varepsilon, a\,a\,{}_*\,a\,+).$

**Лемма 1.2.** *Пусть* $P = (Q, \Sigma, \Gamma, \Delta, \delta, q_0, Z_0, \varnothing)$ *— недетерминированный магазинный преобразователь. Существует простая схема синтаксически-управляемой трансляции* $T$*, такая, что* $\tau(T) = \tau_e(P)$.

*Доказательство*. Построим такую схему $T$ следующим образом (*ср*. с теор. 5.3).

Положим $T = (N, \Sigma, \Delta, R, S)$, где

$$N = \{S\} \cup \{[qZp] \mid q, p \in Q, Z \in \Gamma\},$$

$\Sigma$ и $\Delta$ — такие же, как в npdt $P$,

Ret 82

$R = \{S \to [q_0Z_0p], [q_0Z_0p] \mid$ для всех $p \in Q\} \cup$

$\cup \{[qZp] \to a[q_1Z_1q_2][q_2Z_2q_3]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}],$

$y[q_1Z_1q_2][q_2Z_2q_3]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}] \mid$

$(q_1, Z_1Z_2\ldots Z_m, y) \in \delta(q, a, Z);$

$a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\},\ y \in \Delta^*; p, q, q_i \in Q; Z, Z_i \in \Gamma;$

$i = 1, 2, \ldots, m;\ q_{m+1} = p\}.$

I. Докажем сначала, что

если $(q, x, Z, \varepsilon) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y)$,

то $([qZp], [qZp]) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$,

используя индукцию по числу $l$ движений ndpt $P$.

*<u>База</u>*. Пусть $l = 1$.

Имеем

$$(q, x, Z, \varepsilon) \vdash_P (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В этом случае $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$ и $(p, \varepsilon, y) \in \delta(q, x, Z)$. Тогда по построению схемы $T$ существует правило $[qZp] \to x, y \in R$, с помощью которого немедленно получаем:

$$([qZp], [qZp]) \underset{T}{\Rightarrow} (x, y).$$

*Индукционная гипотеза*. Предположим, что утверждение I выполняется для всех переходов между конфигурациями за число движений $l \leq n$ ($n \leq 1$).

*Индукционный переход*. Докажем, что тогда утверждение I справедливо и для $l = n + 1$.

Итак, пусть

$$(q, x, Z, \varepsilon) \mathrel{\vdash\!\!\frac{n+1}{P}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Рассмотрим этот переход подробнее.

В общем случае первое движение имеет вид

$$(q, x, Z, \varepsilon) = (q, ax', Z, \varepsilon) \underset{P}{\vdash} \underset{P}{\vdash} (q_1, x', Z_1Z_2\ldots Z_m, y_0). \qquad (1.10)$$

Затем следуют дальнейшие движения:

$$(q_1, x', Z_1Z_2\ldots Z_m, y_0) = (q_1, x_1x_2\ldots x_m, Z_1Z_2\ldots Z_m, y_0) \overset{l_1}{\underset{P}{\vdash}} \overset{l_1}{\underset{P}{\vdash}} (q_2, x_2\ldots x_m, Z_2\ldots Z_m, y_0y_1) \overset{l_2}{\underset{P}{\vdash}} \ldots \overset{l_m}{\underset{P}{\vdash}} (q_{m+1}, \varepsilon, \varepsilon, y_0y_1y_2\ldots y_m) = (p, \varepsilon, \varepsilon, y). \; (1.11)$$

Здесь $a \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $x = ax_1x_2 \ldots x_m$,

$y = y_0y_1y_2\ldots y_m$,

причём

$$(q_i, x_i, Z_i, \varepsilon) \mathrel{\Big|\!\frac{l_i}{P}} (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon, y_i), \qquad (1.12)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$; $l_i \leq n$; $q_{m+1} = p$.

Первое движение (1.10) существует потому, что $(q_1, Z_1Z_2\ldots Z_m, y_0) \in \delta(q, a, Z)$, следовательно, по способу построения правил схемы в ней имеется правило

$$[qZp] \to a[q_1Z_1q_2][q_2Z_2q_3]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}],$$
$$y_0[q_1Z_1q_2][q_2Z_2q_3]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}], \quad (1.13)$$

в обозначениях нетерминалов которого участвуют те состояния, по которым проходил npdt *P*.

Из последующих движений (1.11) согласно индукционной гипотезе, применённой к (1.12), следует существование выводов

$$([q_i Z_i q_{i+1}], [q_i Z_i q_{i+1}]) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x_i, y_i), \qquad (1.14)$$

$i = 1, 2,\ldots, m$.

Из (1.13) и (1.14) можно выстроить требуемый вывод:

$$([qZp], [qZp]) \underset{T}{\Rightarrow} (a[q_1 Z_1 q_2]\ldots[q_m Z_m q_{m+1}], \; y_0[q_1 Z_1 q_2]\ldots[q_m Z_m q_{m+1}]) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (ax_1 x_2\ldots x_m, y_0 y_1\ldots y_m) = (x, y).$$

II. Индукцией по длине $l$ вывода докажем теперь обратное утверждение:

если $([qZp], [qZp]) \overset{l}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$,

то $(q, x, Z, \varepsilon) \vdash_P^* (p, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

***База***. Пусть $l = 1$. Имеем $([qZp], [qZp]) \underset{T}{\Rightarrow} (x, y)$.

На единственном шаге этого вывода использовано правило схемы $[qZp] \to x, y$, которое обязано своим происхождением тому, что $(p, \varepsilon, y) \in \delta(q, x, Z)$, где $x \in \Sigma \cup \{\varepsilon\}$, $y \in \Delta^*$, а тогда $(q, x, Z, \varepsilon) \vdash_P (p, \varepsilon, \varepsilon, y)$.

*Индукционная гипотеза*. Предположим, что аналогичное утверждение выполняется для всех выводов, длина которых не превосходит $n$ ($n \leq 1$).

*Индукционный переход*. Докажем аналогичное утверждение для выводов длиной $l = n + 1$.

Пусть

$$([qZp], [qZp]) \underset{T}{\Rightarrow}$$

$$\underset{T}{\Rightarrow} (a[q_1 Z_1 q_2] \ldots [q_m Z_m q_{m+1}],$$

$$y_0[q_1 Z_1 q_2] \ldots [q_m Z_m q_{m+1}]) \overset{n}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y). \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует, что существует правило

$$[qZp] \to a[q_1Z_1q_2]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}],$$
$$y[q_1Z_1q_2]\ldots[q_mZ_mq_{m+1}] \in R,$$

которое обязано своим происхождение тому, что

$$(q_1, Z_1\ldots Z_m, y) \in \delta(q, a, Z). \qquad (1.16)$$

Кроме того, из (1.15) следует, что

$$x = ax_1 \ldots x_m,\ y = y_0 y_1 \ldots y_m, \qquad (1.17)$$

$$([q_i Z_i q_{i+1}], [q_i Z_i q_{i+1}]) \qquad (x_i \overset{l_i}{\underset{T}{\Rightarrow}} y_i),\ l_i \le n,$$

а тогда согласно индукционной гипотезе

$$(q_i, x_i, Z_i, \varepsilon) \quad \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (q_{i+1}, \varepsilon, \varepsilon, y_i), \qquad (1.18)$$

$i = 1, 2, \ldots, m$; $q_{m+1} = p$.

Из (1.16) и (1.18) с учетом (1.17) выстраивается последовательность движений: $(q, x, Z, \varepsilon) = (q, ax_1 \ldots x_m, Z, \varepsilon) \underset{P}{\vdash}$

$$\underset{P}{\vdash} (q_1, x_1 \ldots x_m, Z_1 \ldots Z_m, y_0) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}}$$

$$\overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y_0 y_1 \ldots y_m) = (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Из рассуждений I и II следует, что для любых $q, p \in Q$ и $Z \in \Gamma$ вывод

$$([qZp], [qZp]) \underset{T}{\overset{*}{\Rightarrow}} (x, y)$$

существует тогда и только тогда, когда

$$(q, x, Z, \varepsilon) \mathrel{\vdash\!\!\frac{*}{P}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

В частности, это справедливо для $q = q_0$ и $Z = Z_0$.

В то же время при помощи правила вида $S \to [q_0Z_0p], [q_0Z_0p]$ всегда можно пристроить начало к вышеприведённому выводу, чтобы считать доказанным утверждение:

$$(S, S) \underset{T}{\Rightarrow} ([q_0Z_0p], [q_0Z_0p]) \overset{*}{\underset{T}{\Rightarrow}} (x, y)$$

тогда и только тогда, когда

$$(q_0, x, Z_0, \varepsilon) \overset{*}{\underset{P}{\vdash}} (p, \varepsilon, \varepsilon, y).$$

Лемма доказана.

Из лемм 1.1 и 1.2 следует

**Теорема 1.1.** *Трансляция* $\tau = \tau(T)$, *где* $T$ — *простая схема синтаксически управляемой трансляции, существует тогда и только тогда, когда существует недетерминированный магазинный преобразователь* $P$, *такой, что* $\tau_e(P) = \tau$.

Ret 106

**Пример 1.5.** В предыдущем примере по простой sdts $T = (\{E\}, \{a, +, {}_*\}, \{a, +, {}_*\}, R, E)$, где

$$R = \{ \quad (1)\ E \to +EE,\ EE+\ ;$$
$$(2)\ E \to {}_*EE,\ EE_*\ ;$$
$$(3)\ E \to a,\ a\},$$

был построен эквивалентный npdt

$P = (\{q\}, \{a, +, {}_*\}, \{E, a, +, {}_*, a', +', {}_*'\}, \{a, +, {}_*\}, \delta, q, E, \varnothing)$,

где 1) $\delta(q, \varepsilon, E) = \{(q, +EE+', \varepsilon),$
$(q, {}_*EE_*', \varepsilon),$
$(q, aa', \varepsilon)\}$,

2) $\delta(q, b, b) = \{(q, \varepsilon, \varepsilon)\}$ для всех $b \in \{a, +, {}_*\}$,

3) $\delta(q, \varepsilon, c') = \{(q, \varepsilon, c)\}$ для всех $c \in \{a, +, {}_*\}$.

Ret 84

Теперь по этому недетерминированному преобразователю $P$ мы построим эквивалентную простую схему синтаксически управляемой трансляции, воспользовавшись алгоритмом, описанным в лемме 1.2.

## Пример 1.5.

Положим $T = (\{S, [qEq], [qaq], [q{+}q], [q_*q],$
$[qa'q], [q{+}'q], [q_*'q]\},$
$\{a, +, {}_*\}, \{a, +, {}_*\}, R, S),$

$R = \{(1)\ S \to [qEq], [qEq];$

$(2)\ [qEq] \to [q{+}q]\ [qEq]\ [qEq]\ [q{+}'q],$
$[q{+}q]\ [qEq]\ [qEq]\ [q{+}'q];$

$(3)\ [qEq] \to [q_*q]\ [qEq]\ [qEq]\ [q_*'q],$
$[q_*q]\ [qEq]\ [qEq]\ [q_*'q];$

$(4)\ [qEq] \to [qaq]\ [qa'q], [qaq]\ [qa'q];$

$(5)\ [qaq] \to a, \varepsilon;$ $(8)\ [qa'q] \to \varepsilon, a;$

$(6)\ [q{+}q] \to +, \varepsilon;$ $(9)\ [q{+}'q] \to \varepsilon, +;$

$(7)\ [q_*q] \to {}_*, \varepsilon;$ $(10)\ [q_*'q] \to \varepsilon, {}_*\}.$

## Пример 1.5.

Эта схема мало похожа на исходную, в которой было всего три правила. Однако её можно эквивалентными преобразованиями привести к исходной.

Во-первых, правые части правил 5–10 можно подставить в правые части правил 2–4. В результате получим

$R' = \{\, (1)\ S \to [qEq], [qEq];$

$(2')\ [qEq] \to +[qEq]\ [qEq], [qEq]\ [qEq]+;$

$(3')\ [qEq] \to {}_*[qEq]\ [qEq], [qEq]\ [qEq]_*;$

$(4')\ [qEq] \to a, a\}.$

Легко видеть, что из ($S$, $S$) выводится в точности то же, что и из ($[qEq]$, $[qEq]$). Остается заменить в правилах $2'$–$4'$ слева и справа $[qEq]$ на простое $E$ и отбросить бесполезное правило 1, чтобы получить исходную схему.