Vyrovnávací rovina (jednoduchý případ)

Představme si pravoúhlý souřadnicový systém, kde osy x a y vytvářejí horizontální rovinu a osa z vyjadřuje např. měřené relativní výšky vzhledem k rovině xy. Souřadnice x a y považujme za bezchybné (nezávislé) a měřickými chybami bude zatížena pouze souřadnice z (závislá veličina). Vlastní rovina může být šikmá a je vyjádřena třemi parametry (výškou v počátku, směrnicí ve směru osy x a směrnicí ve směru osy y). Naším úkolem je proložit naměřenou skupinou bodů (třemi a více) rovinu tak, aby součet čtverců odchylek ve směru osy z byl minimální. $\Sigma v_z^2 = min$. Označme v dalším Σ = [ ].

Zprostředkující funkce:

$$\tilde{z}_i = \beta_0 + \beta_1 \tilde{x}_i + \beta_2 \tilde{y}_i$$

Rovnice oprav (bezchybné x, y):

$$v_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \beta_2 y_i - z_i$$

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{A\beta} - \boldsymbol{l}$$

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & y_1 \\ 1 & x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & y_n \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\beta} = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{l} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix},$$

Normální rovnice

$$\boldsymbol{A}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{A}^T \boldsymbol{l} = \boldsymbol{0}$$

$$\boldsymbol{N} \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{n} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} n & [x] & [y] \\ [x] & [xx] & [xy] \\ [y] & [xy] & [yy] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} [z] \\ [xz] \\ [yz] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Další postup je standardní řešení jako při vyrovnáním zprostředkujících měření.

Transformace některých funkcí na funkce lineární

Některé nelineární funkce lze jednoduchou transformací převést na funkce lineární a použít regresní analýzu metodou nejmenších čtverců (vyrovnávací přímku) až u takto transformovaných lineárních funkcí. Při linearizaci se využívá zejména logaritmování původních funkcí.

$$y_i = a\,x_i^{\,b},$$

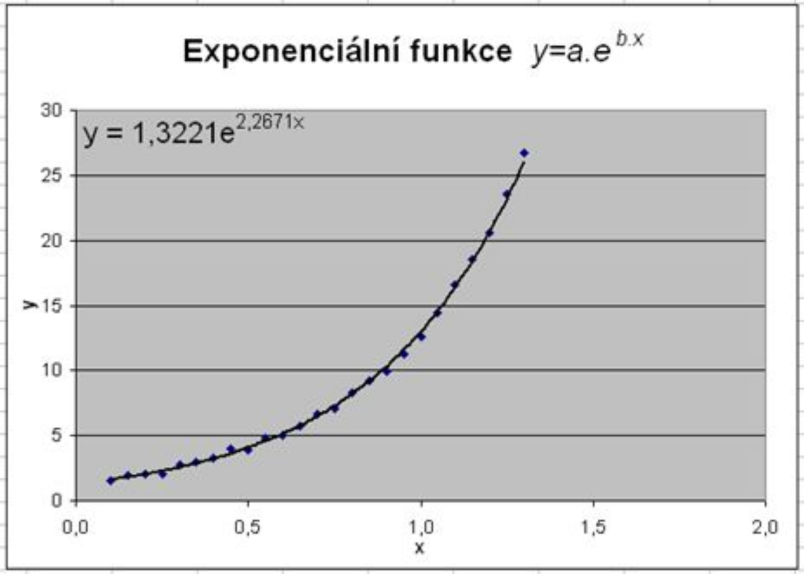
$$\ln y_i = \ln a + b \ln x_i\,, \quad u_i = \beta_0 + \beta_1 v_i\,, \quad kde$$

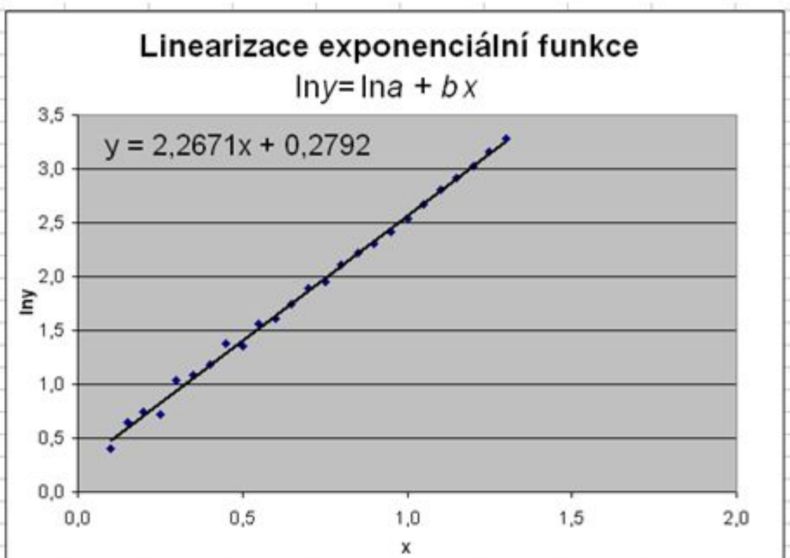
$$u_i = \ln y_i\,, \quad v_i = \ln x_i\,, \quad \beta_0 = \ln a,\ \beta_1 = b$$

Obdobně lze linearizovat logaritmováním funkci:

$$y_i = a\,e^{bx_i}\,, nebo \qquad y_i = a\,b^{x_i}\,,\ b > 0, b \neq 1$$

Metodu považujeme za přibližnou, neboť minimalizuje součet čtverců logaritmovaných veličin a ne veličin původních.





Ukázka transformace nelineární (exponenciální) funkce na funkci lineární.

První graf ukazuje průběh exponenciální funkce v původní podobě.
U těchto funkcí lze parametry rovnic určit přímo v Excelu (viz.rovnice v grafu).

Na druhém grafu je vidět průběh stejné funkce po její linearizaci logaritmováním. Parametry rovnice přímky jsou rovněž určeny přímo v Excelu.

Hledané parametry exponenciální funkce získáme až zpětnou transformaci parametrů určených při lineárním řešení:
$a = e^{2,2671} = 1,3221$, $b = 2,2671$
Pozor: Excel označil rovnici regresní přímky jako $y = \ldots$, i když se vlastně jedná o ln y.

Další přibližné metody pro určení parametrů vyrovnávací přímky

A) Metody grafické:
u těchto metod vyneseme jednotlivé body v příslušném měřítku na papír (např. milimetrový) a přímku proložíme od oka pomocí pravítka. Určované parametry poté odměříme nebo vypočteme.
B) Metody graficko-početní
tyto metody jsou obdobou předcházejících grafických metod, ale můžeme přímku např. otáčet kolem předem vypočteného těžiště, řešit grafické metody s různými měřítky na jednotlivých osách, na logaritmických papírech apod.
C) Skupinová metoda
u této metody se naměřený soubor rozdělí na dvě přibližně stejné četné skupiny a v každé z nich se určí těžiště. Přímka je pak jednoznačně určena dvěma body- těžišti jednotlivých skupin. Střední odchylka v první skupině by měla být přibližně stejně velká jako v druhé skupině. Pozor na takové rozdělení skupin, u kterých by se obě těžiště nacházely velmi blízko sebe, určení parametrů takovéto přímky je pak velmi nespolehlivé (může se vyskytnout např. při dělení na skupinu lichých a skupinu sudých měření seřazených podle pořadí zkoumaného trendu).

Lineární regrese v Excelu (1)

Excel nabízí nástroje pro lineární i nelineární regresi:
Určujeme-li parametry pouze jedné přímky, je výhodné postupovat následovně:
1. Nezávislou proměnnou ***x*** (bezchybnou) uspořádáme do sloupcového vektoru
Závislou proměnnou ***y*** (zatíženou chybami) uspořádáme do dalšího sloupcového vektoru stejné délky. Excel určuje přímku s označením parametrů $y = mx + b$).
2. Označíme 2 sousední buňky (v řádku) a napíšeme do příkazového řádku funkci: =LINREGRESE(pole_y;pole_x). Příkaz ukončíme trojhmatem pro maticové operace CTRL+SHIFT+ENTER.
3. V označených buňkách bude v první buňce násobný parametr m (naše značení B, β_1), v druhé buňce součtový parametr b (naše značení A, β_0).
Pozn: pokud má přímka procházet počátkem, bude příkaz vypadat následovně: =LINREGRESE(pole_y;pole_x;0). Poslední operátor je logický a vyjadřuje veličinu NEPRAVDA.
Součtový parametr můžeme do předem označené buňky vypočítat též příkazem: =INDEX(LINREGRESE(pole_y;pole_x);2) nebo příkazem: =INTERCEPT(pole_y;pole_x).
Násobný parametr do další označené buňky příkazem: =INDEX(LINREGRESE(pole_y;pole_x);1) nebo příkazem: =SLOPE(pole_y;pole_x). Protože je výsledkem vždy jen jedno číslo, nemusíme používat trojhmat.

Ukázka příkazů pro lineární regresi v Excelu (2)

B20 {=LINREGRESE(C7:C16;B7:B16)}

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20		0,168939	-0,00333
21			

B20 =INDEX(LINREGRESE(C7:C16;B7:B16);1)

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20		0,168939	
21			

C20 =INDEX(LINREGRESE(C7:C16;B7:B16);2)

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20			-0,00333
21			

B20 {=LINREGRESE(C7:C16;B7:B16;0)}

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20		0,168701	0
21			

B20 =SLOPE(C7:C16;B7:B16)

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20		0,168939	
21			

C20 =INTERCEPT(C7:C16;B7:B16)

Sešit2

	A	B	C
1	LINEÁRNÍ REGRESE		
2			
3			
4		DATA	
5		*x*	*y*
6		[m]	[mm]
7		2	0,50
8		4	0,80
9		6	0,80
10		8	1,25
11		10	1,50
12		12	2,20
13		14	2,45
14		16	2,40
15		18	3,15
16		20	3,50
17			
18		Výsledek	
19		*m=B*	*b=A*
20			-0,00333
21			

Pokračování lineární regrese v Excelu (3)

Funkce LINREGRESE nabízí i výpočet směrodatných odchylek určovaných parametrů. Po zadání výstupní matice 2x2 prvků napíšeme příkaz: =LINREGRESE(pole_y;pole_x;;PRAVDA), který vypočítá v prvním řádku násobný a součtový parametr a v druhém řádku jejich směrodatné odchylky,viz první obrázek. Protože je výstupem matice, musíme zadání zakončit trojhmatem. Na druhém obrázku je ukázána funkce =LINTREND(pole_y;pole_x), která do vybraného pole vypočítá přímo vyrovnané hodnoty = vyrovnané body ležící na vyrovnávací přímce. Uvedené funkce poskytují ještě další možnosti, např. statistického zhodnocení.

B21 {=LINREGRESE(C7:C16;B7:B16;;1)}

	A	B	C	D	E	F
1	LINEÁRNÍ REGRESE					
2						
3						
4		DATA				
5		*x*	*y*			
6		[m]	[mm]			
7		2	0,50			
8		4	0,80			
9		6	0,80			
10		8	1,25			
11		10	1,50			
12		12	2,20			
13		14	2,45			
14		16	2,40			
15		18	3,15			
16		20	3,50			
17						
18		Výsledek				
19		*m=B*	*b=A*			
20		*σB*	*σA*			
21		0,168939	-0,00333			
22		0,010461	0,129812			
23						
24						

E7 {=LINTREND(C7:C16;B7:B16)}

	A	B	C	D	E	F
1	LINEÁRNÍ REGRESE					
2						
3						
4		DATA				
5		*x1*	*y*		*y - vyrovnané*	
6		[m]	[mm]		[mm]	
7		2	0,50		0,334545	
8		4	0,80		0,672424	
9		6	0,80		1,010303	
10		8	1,25		1,348182	
11		10	1,50		1,686061	
12		12	2,20		2,023939	
13		14	2,45		2,361818	
14		16	2,40		2,699697	
15		18	3,15		3,037576	
16		20	3,50		3,375455	
17						
18		Výsledek				
19		*m=B*	*b=A*			
20		0,168939	-0,003333			
21						

Pokračování lineární regrese v Excelu (4)

Silnou stránkou Excelu je i tvorba grafů. Na prvním obrázku je ukázka výběru typu grafu XYbodový se zákresem naměřených dat. Na dalším obrázku proložení regresní přímky s rovnicí s vypočtenými parametry. Rovnice se vkládá v záložce *Možnosti*, kde je možno volit průchod přímky počátkem či výpočet koeficientu determinace (bude objasněno později).