ЛЕКЦИЯ 4

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ (СЛАУ)

Матричный способ решения СЛАУ

Системой n линейных алгебраических уравнений с n неизвестными называют совокупность уравнений вида:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n, \end{cases}$$

где a_{ij} - коэффициенты системы, $i = 1, \ldots, n$, $j = 1, \ldots, n$,

x_j - неизвестные, $j = 1, \ldots, n$,

b_i - свободные члены, $i = 1, \ldots, n$.

Упорядоченное множество действительных чисел $\{\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n\}$ называется **решением СЛАУ**, если оно обращает каждое уравнение СЛАУ в числовое равенство.

Представим СЛАУ
$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nn}x_n = b_n \end{cases}$$

матрица коэффициентов

матрица-столбец неизвестных

матрица-столбец свободных членов

в виде матриц

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \ldots \\ x_n \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \ldots \\ b_n \end{pmatrix} : AX = B.$$

Матричная форма записи СЛАУ

Объясните, как получилось это равенство

Найдите матрицу X

$\boxed{X = A^{-1}B}$ — решение СЛАУ в матричной форме

При каких условиях решение СЛАУ в матричной форме существует?

Сколько решений СЛАУ в матричной форме существует и почему?

Пример. Решить систему уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 = -13, \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -11, \\ 4x_1 - 2x_2 - 3x_3 = -12. \end{cases}$$

Решение СЛАУ по формулам Крамера

Запишем равенство $X = A^{-1}B$ в следующем виде

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_n \end{pmatrix}$$

Формулы Крамера

Чем являются выражения в скобках?

$$\begin{cases} x_1 = \dfrac{1}{|A|}\boxed{A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n}, \\ x_2 = \dfrac{1}{|A|}\boxed{A_{12}b_1 + A_{22}b_2 + \dots + A_{n2}b_n}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ x_n = \dfrac{1}{|A|}\boxed{A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots + A_{nn}b_n}. \end{cases}$$

$$\boxed{x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \quad x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, \quad \dots, \quad x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}.}$$

Определитель, полученный из определителя матрицы **A** заменой первого столбца столбцом свободных членов

$$A_{11}b_1 + A_{21}b_2 + \dots + A_{n1}b_n = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ b_2 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \Delta_1, \dots, A_{1n}b_1 + A_{2n}b_2 + \dots \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1,n-1} & b_1 \\ a_{21} & \dots & a_{2,n-1} & b_2 \end{vmatrix}$$

При каких условиях решение СЛАУ по формулам Крамера существует?

Сколько решений СЛАУ в матричной форме существует и почему?