

# Стохастические процессы

В последнее время в самых различных областях практики, в том числе и на фондовом рынке, возникла необходимость решения своеобразных вероятностных задач, описывающих работу так называемых систем массового обслуживания. Примерами таких систем могут служить: брокерские конторы, телефонные станции, ремонтные мастерские, билетные кассы и т.п. Каждая такая система состоит из какого-то числа обслуживающих каналов и потока заявок. Заявки поступают одна за другой в некоторые случайные моменты времени.

Если бы заявки поступали регулярно, через точно определенные промежутки времени, и обслуживание каждой заявки тоже имело определенную длительность, расчет пропускной способности системы не представлял бы никакой сложности. На фондовом рынке моменты поступления заявок случайны, а также случайна и длительность выполнения этой заявки брокером. В связи с этим процесс работы системы протекает нерегулярно: заявки могут попадать в очередь или не приходить вовсе. Таким образом, процесс функционирования системы массового обслуживания представляет собой случайный процесс.

1. Поток событий называется *стационарным*, если вероятность попадания того или иного числа событий на участок времени длиной  $\tau$  зависит только от длины этого участка и не зависит от того, где именно на оси  $0t$  расположен этот участок.
2. Поток событий называется *потоком без последствия*, если для любых неперекрывающихся участков времени число событий, попадающих на один из них, не зависит от числа событий, попадающих на другие.
3. Поток событий называется *ординарным*, если вероятность попадания на элементарный участок  $\Delta t$  двух или более событий пренебрежимо мала по сравнению с вероятностью попадания одного события.

# Стационарный пуассоновский ПОТОК

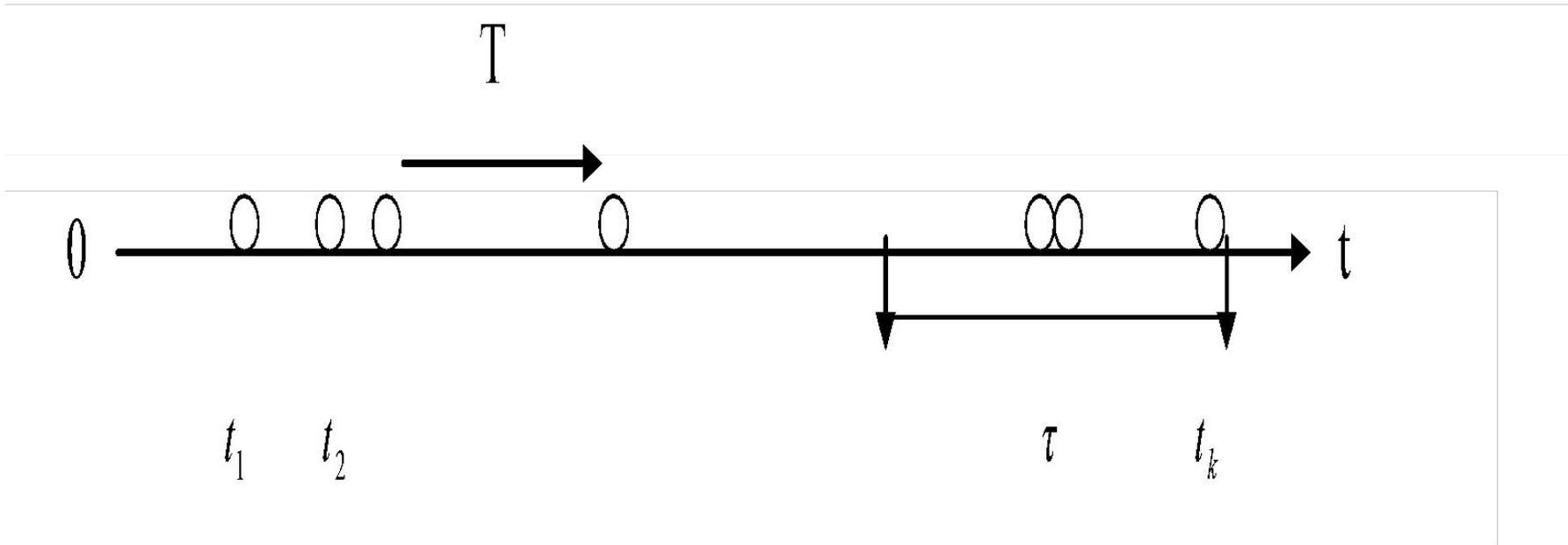
Выделим произвольный участок времени длиной  $\tau$ . Как уже было отмечено, при условиях 1, 2 и 3 (стационарность, отсутствие последствия и ординарность) число точек, попадающих на участок  $\tau$ , распределено по закону Пуассона с математическим ожиданием

$$\alpha = \lambda * \tau$$

где  $\lambda$  - плотность потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени). Вероятность того, что за время  $\tau$  произойдет ровно  $m$  событий, равна

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} * e^{-\lambda\tau}$$

# Стационарный пуассоновский ПОТОК



Если поток событий обладает всеми тремя свойствами (т. е. стационарен, ординарен и не имеет последействия), то он называется *простейшим* (или стационарным пуассоновским) потоком. Название «пуассоновский» связано с тем, что при соблюдении условий 1 - 3 число событий, попадающих на любой фиксированный интервал времени, будет распределено по закону Пуассона:

$$P_m(\tau) = \frac{(\lambda\tau)^m}{m!} e^{-\lambda\tau}$$

где  $\lambda$  - плотность потока (среднее число событий, приходящееся на единицу времени).

# Марковский случайный процесс

Допущения о пуассоновском характере потока заявок и о показательном распределении времени обслуживания позволяют применить в теории массового обслуживания аппарат так называемых марковских случайных процессов. Процесс, протекающий в экономической системе, называется марковским (или процессом без последствия), если для каждого момента времени вероятность любого состояния системы в будущем зависит только от состояния системы в настоящий момент времени и не зависит от того, каким образом

Стохастический процесс - это процесс, описывающий изменения в одной или нескольких переменных, когда эти изменения характеризуются неопределенностью. В особенности эти процессы применимы к анализу будущих изменений цен фондовых активов, так как эти изменения действительно неопределенны на эффективном рынке. Теория случайных процессов является одним из наиболее мощных и широко используемых инструментов анализа финансовых рынков. Случайные процессы, как правило, являются наиболее адекватной моделью, описывающей динамику экономических переменных фондового рынка

Согласно современной финансовой теории, известной как **гипотеза эффективных рынков** (efficient market hypothesis, EMH), цены активов отображают всю историческую информацию, касающуюся этого актива, и немедленную реакцию на поступающую новую информацию по этому активу. Эта ответная реакция проявляется в виде изменения цены. Если рынки немедленно реагируют на новую информацию и каждая часть новой информации независима от предыдущей, то изменения в ценах активов будут следовать марковскому процессу.

Фондовый рынок является *эффективным* в том смысле, что его участники практически мгновенно используют всю доступную информацию, на которую реагируют цены. Ожидания экономических агентов на эффективном рынке относительно рыночных цен, например, акций можно представить следующим образом:

$$S_{t+1}^e = M(S_t; \Omega_t) \quad (1)$$

$$S_t = S_{t-1} + \varepsilon_t \quad (2)$$

Из данного уравнения следует, что фактические цены колеблются вокруг своего рационального предсказания с чисто случайной ошибкой, имеющей нулевую среднюю и конечную дисперсию.

# Процесс Винера или броуновское движение

Разновидность марковского процесса, которая используется как отправная точка для определения стохастических процессов цен активов, это **основной процесс Винера** (basic Wiener process), или броуновское **движение** (Brownian motion), названный в честь Норберта Винера, впервые сформулировавшего строгую математическую теорию для данного вида случайных процессов. В данном случае на исследуемую переменную воздействует большое количество случайных независимых импульсов или воздействий со стороны других переменных. Опишем процесс движения цен активов, который можно представить как результат совокупного эффекта влияния многих независимых случайных импульсов, являющихся следствием получения новой информации.

# Основной процесс Винера

- $w(t; \Omega)$ - процесс Винера.
- Свойства процесса Винера:
  - 1)  $w(0; \Omega) = 0$  с вероятностью 1.
  - 2) Случайные величины  $w(t_i; \Omega) - w(t_{i-1}; \Omega)$  (приращения винеровского процесса) взаимонезависимы и распределены согласно нормальному закону с нулевым математическим ожиданием и дисперсией, равной  $(t_i - t_{i-1})$ .
  - 3) Функция  $w(t; \Omega)$  непрерывна по переменной  $t$  для всех  $\Omega$ .

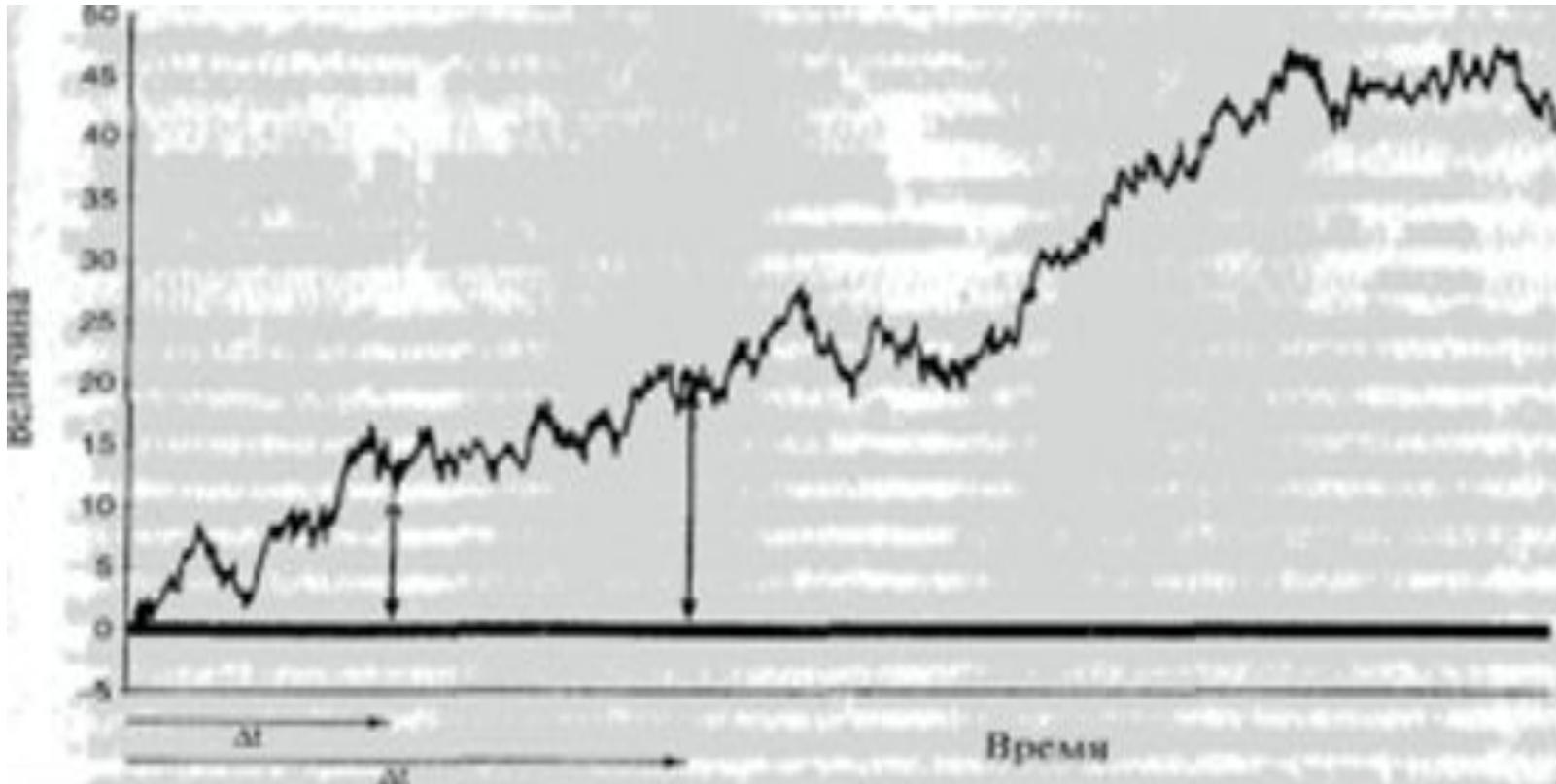
# Основной процесс Винера

Пусть  $S$  – рыночная цена фондового актива, а  $t$  – период времени. За малый промежуток времени  $\Delta t$  случайная переменная  $S$  изменится на  $\Delta S$ . Если  $S$  следует процессу Винера, т.е. броуновскому движению, изменение  $S$  за малый промежуток времени будет связано с  $\Delta t$  следующим соотношением:

$$\Delta S = \varepsilon * \sqrt{\Delta t} \quad \text{или}$$

$$dS = \varepsilon * \sqrt{dt}$$

# Основной процесс Винера



# Обобщенный процесс Винера

1) Активы характеризуются различными степенями волатильности. В процессе же, описанном выше, волатильность всех активов была одинаковой.

$$dS = \sigma * \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (1).$$

2) Рисковые активы имеют положительное ожидаемое среднее значение дохода.

$$dS = \alpha * dt + \sigma * \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (2).$$

3) Абсолютные приращения цен фондовых активов  $\Delta S$  зависят от величины  $S$ .

$$dS = \alpha * S * dt + \sigma * S * \varepsilon * \sqrt{dt} \quad (3).$$

# Процесс Ито

- Процесс Ито - это обобщенный процесс Винера, в котором параметры  $\alpha$  (ожидаемый доход) и  $\sigma^2$  (дисперсия) являются функциями от основных переменных. В общем виде процесс Ито выглядит как:

$$dS = \alpha(S, t) * dt + \sigma(S, t) * \varepsilon * \sqrt{dt}$$

# Лемма Ито

Если некоторая случайная переменная  $Z$  является функцией  $n$  процессов Ито:

$$Z = Z(t, S_1(t, \theta), S_2(t, \theta), \dots, S_n(t, \theta))$$

то приращение процесса  $Z$  можно представить в виде:

$$dZ = \frac{\partial Z}{\partial t} dt + \sum_{i=1}^n \frac{\partial Z}{\partial S_i} dS_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 Z}{\partial S_i \partial S_j} dS_i dS_j$$