

Лекция 2

§1. Реализация произвольного автомата в виде СЛС.

Теорема о реализации произвольного конечного автомата в виде СЛС (Синхронной Логической Сети).

Любой конечный автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ может быть реализован в виде СЛС над любой автоматной системой

$$\Sigma_a = \{\text{ФПС}, \boxed{D}\}.$$

Алгоритм построения СЛС

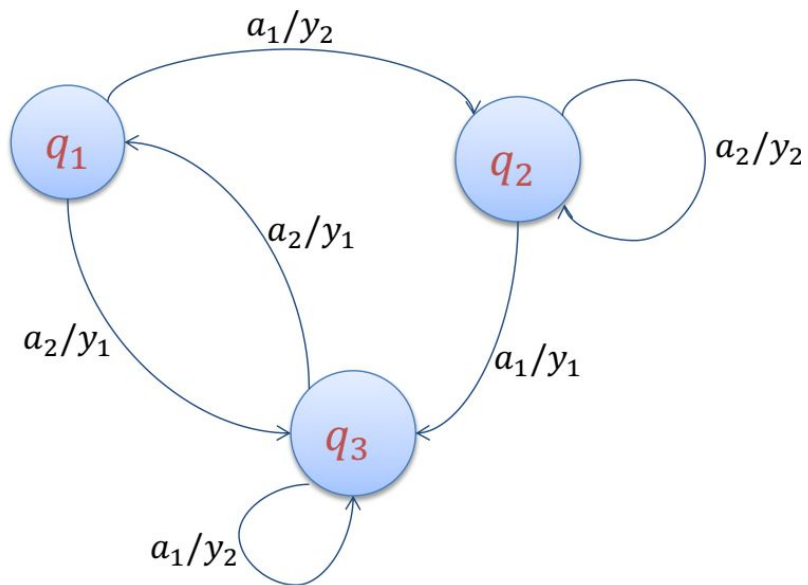
- 1. Двоичное кодирование алфавитов X , Y , Q (возможно, появятся резервные состояния).
- 2. Доопределение АТ на все состояния, в том числе и резервные. Цель: получить канонические уравнения наименьшей сложности.
- 3. Построение СЛС.

К примеру из лекции

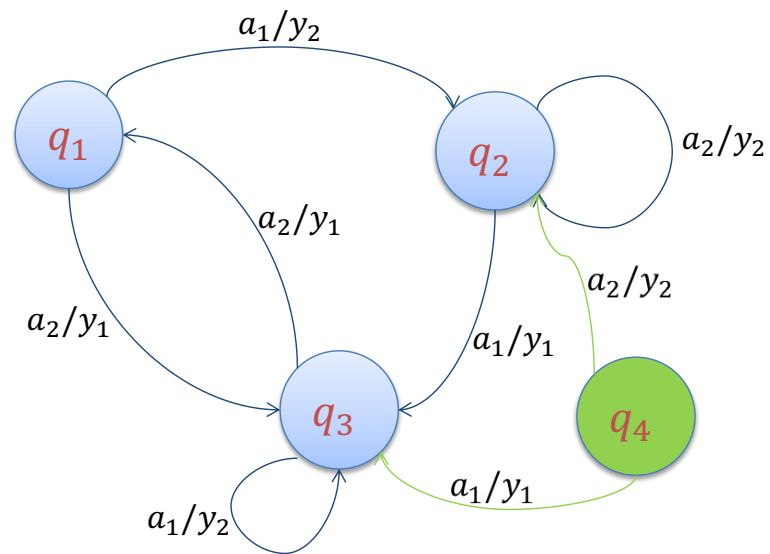
$Q: q_1 \sim 00, q_2 \sim 01, q_3 \sim 10; q(t) \sim z_1(t)z_2(t); q_4 \sim 11$

$x(t)$	$q(t-1)$	$q1$	$q2$	$q3$

$X \backslash z_1 z_2$	00	01	10	11
0	01 1	10 0	10 1	11 0
1	10 0	01 1	00 0	11 1



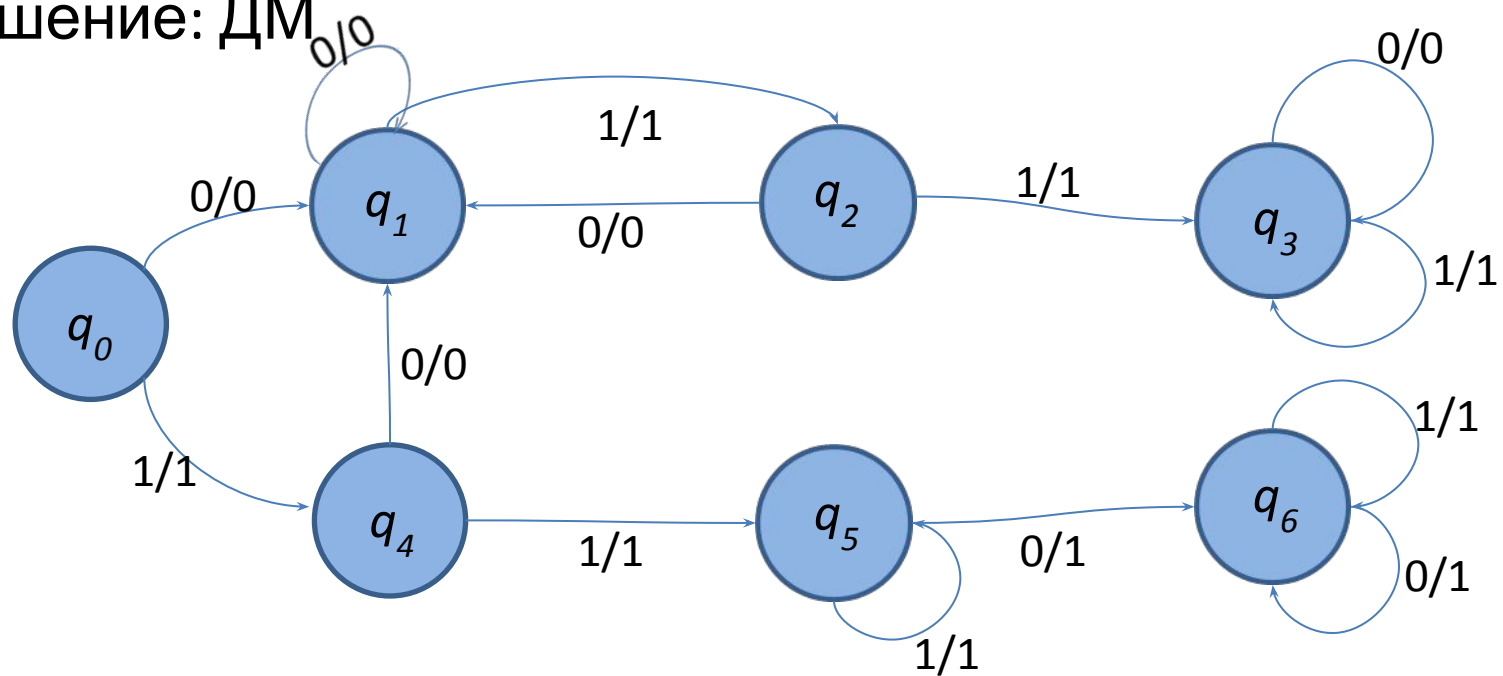
\Rightarrow



Пример. Автомат S имеет *одноразрядный*, двоичный вход и выход. S выдаёт входную букву до тех пор, пока на его вход не поступит слово $\alpha_1 = 011$ или слово $\alpha_2 = 110$. Затем, начиная с *данного* такта, S постоянно выдаёт входную букву, в случае – α_1 , или 1, в случае – α_2 .

Составить ДМ с ветвями резервных состояний и СКУ минимальной сложности над Σ_0 для S .

Решение: ДМ



A

$q(t-1)$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	
$x(t)$								
0	0 q_1	0 q_1	0 q_1	0 q_3	0 q_1	1 q_6	1 q_6	1 q_6
1	1 q_4	1 q_2	1 q_3	1 q_3	1 q_5	1 q_5	1 q_6	1 q_2

$z_1 z_2 z_3$	000	001	010	011	100	101	110	
$x(t)$								
0	0 001	0 001	0 001	0 011	0 001	1 110	1 110	[110] [1]
1	1 100	1 010	1 011	1 011	1 101	1 101	1 110	[010] [1]

$z_2 z_3$ $x z_1$	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	1			
10	1	1		1

$$z_1(t) = \bar{x}(t) \cdot z_1(t-1)(z_2(t-1) \vee z_3(t-1)) \vee \\ \vee x(t) \cdot \bar{z}_2(t-1) \cdot (\bar{z}_1(t-1) \vee \bar{z}_3(t-1)) \vee \\ \vee x(t) \cdot \bar{z}_1(t-1) \cdot \bar{z}_3(t-1)$$

$z_2 z_3$ $x z_1$	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11			1	1
10		1	1	1

$$z_2(t) = z_2 \cdot (x \vee z_1 \vee z_3) \vee z_3 \cdot (\bar{x} \cdot z_1 \vee x \cdot \bar{z}_1)$$

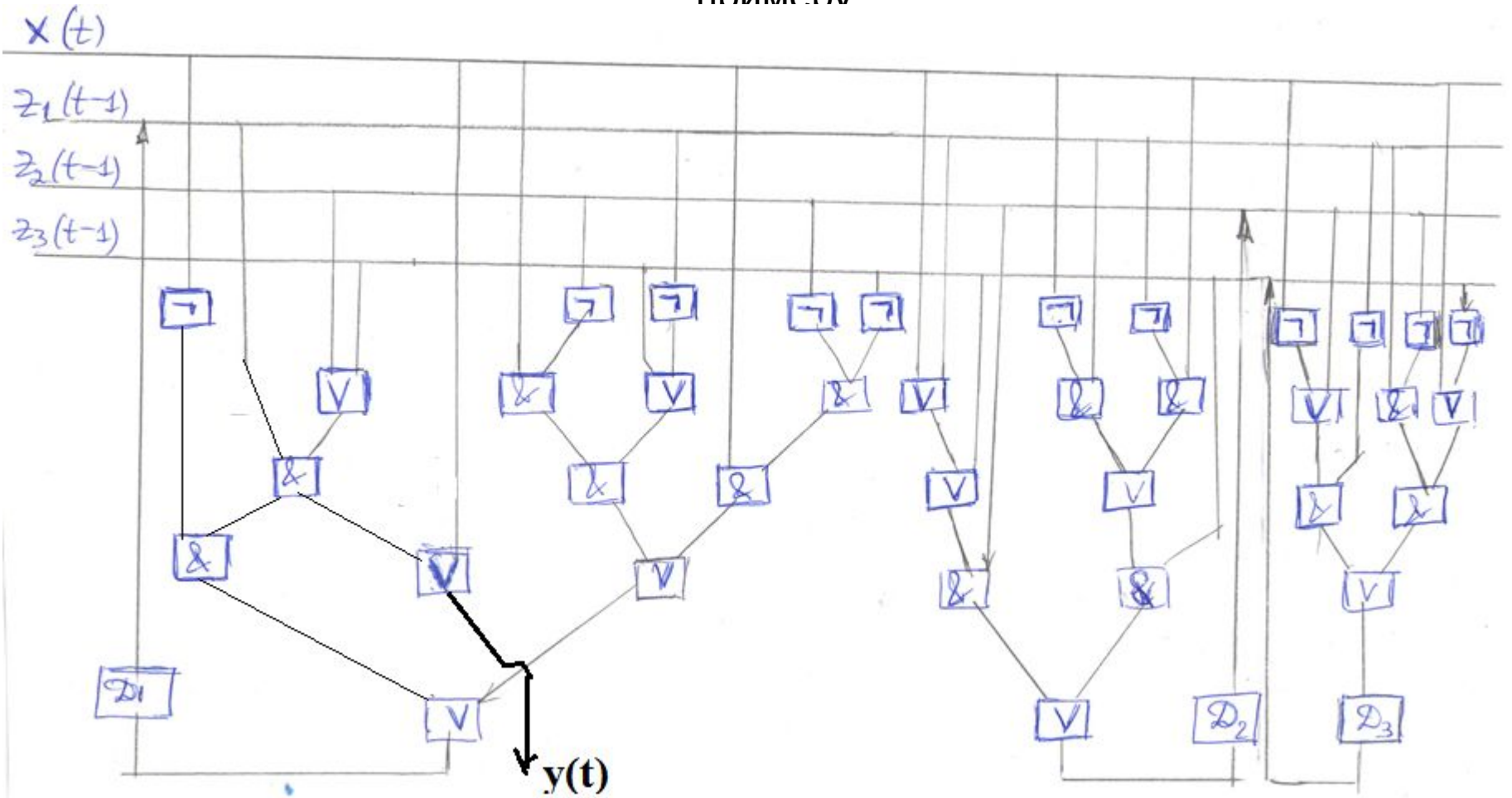
$z_2 z_3$ xz_1	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1			
11	1	1		
10			1	1

$$z_3(t) = \bar{z}_1 \cdot (\bar{x} \vee z_2) \vee z_1 \cdot \bar{z}_2 \cdot (x \vee \bar{z}_3)$$

$z_2 z_3$ xz_1	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

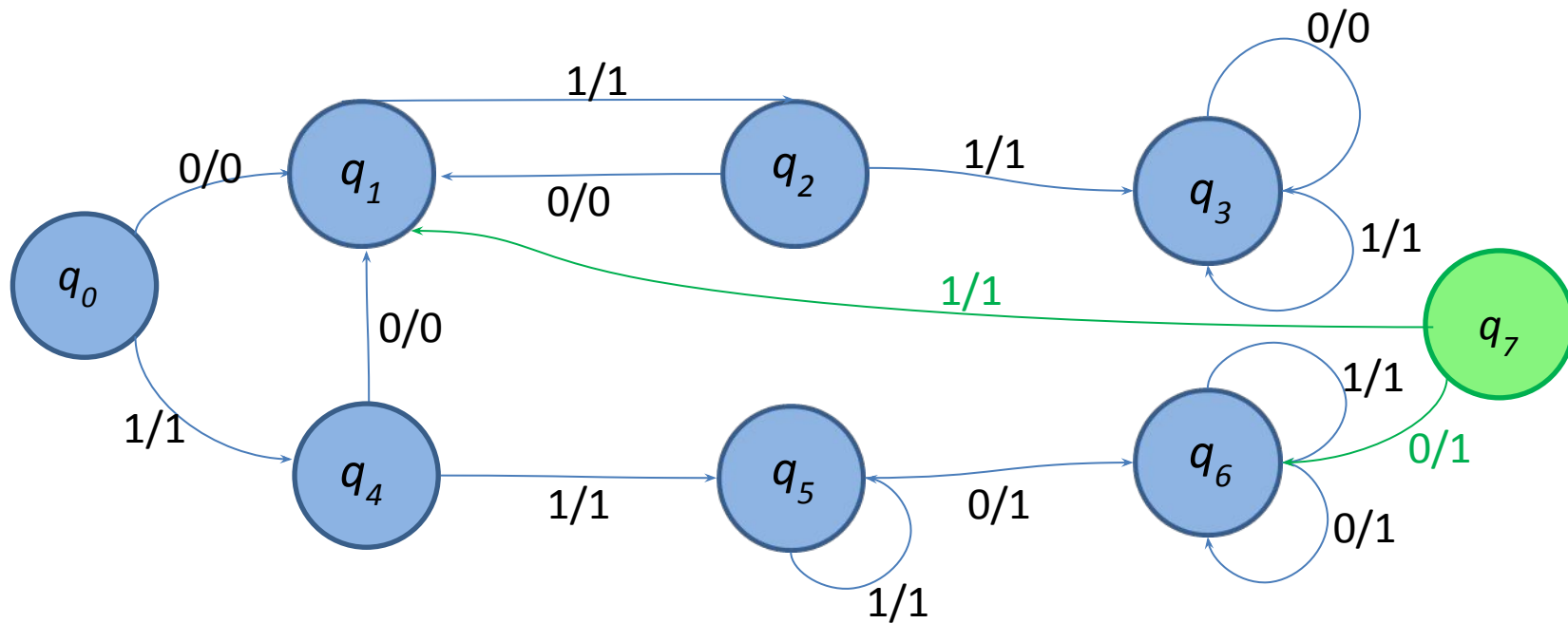
$$y(t) = x \vee z_1 \cdot (z_2 \vee z_3)$$

СЛС к
примеру



Сложность схемы =
28

ДМ с ветвями резервных состояний



Доказательство теоремы о реализации произвольного автомата в виде СЛС

Доказательство: применим алгоритм построения СЛС над $\Sigma_a = \{\text{ФПС}, \boxed{D}\}$.

Для доказательства однозначности результата можно сначала построить КУ над $\text{ФПС} = \Sigma_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$. В силу единственности ДНФ они определены однозначно. Затем, каждую функцию из Σ_0 выразить функциями данной ФПС (леммы о несамодвойственной, о нелинейной, о немонотонной функциях).

Из всех вариантов выберем КУ наименьшей сложности. Следовательно, получим однозначный результат (или несколько равнозначных)

§2. Автоматное отображение

$$S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}, q(0) = q_1, \alpha = x(1)x(2) \dots x(t), x(i) \in X$$

$$\omega = y(1)y(2) \dots y(t), y(i) \in Y$$

Автоматное отображение - это функция $f: X^* \rightarrow Y^*$
 $f(\alpha) = \omega = S(q(0), \alpha)$

Свойства автоматного отображения

1. $|f(\alpha)| = |\omega| = |\alpha|$
2. Отсутствие последействия:
если $\alpha = \alpha_1 \alpha_2$, то $\omega = \omega_1 \omega_2$,
причем $|\omega_1| = |\alpha_1|$, $|\omega_2| = |\alpha_2|$,
т. е. ω_1 зависит только от α_1

Пример автоматного отображения для вышерассмотренного примера:

$$S(q_0, 1100) = 1101 .$$

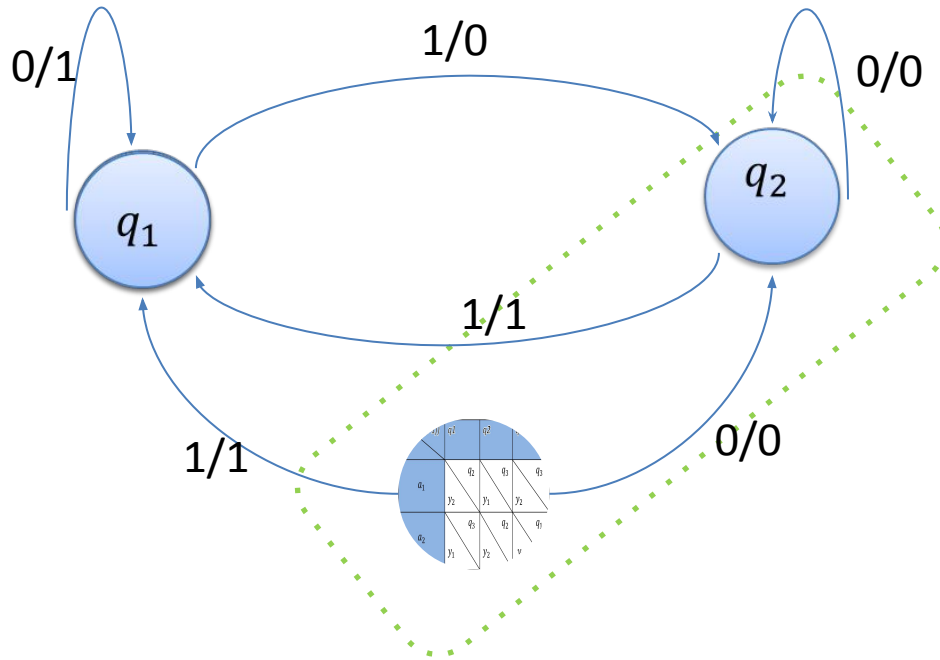
§3. Эквивалентные состояния и эквивалентные автоматы.

Эквивалентные состояния

$$q_i \sim q_j, \text{ если } \forall \alpha S(q_i, \alpha) = S(q_j, \alpha)$$

Пример:

S



Пусть

$$\alpha = x_1 \dots x_n = x_1 \alpha'$$

если $x_1 = 0$, то

$$q_2 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

если $x_1 = 1$, то

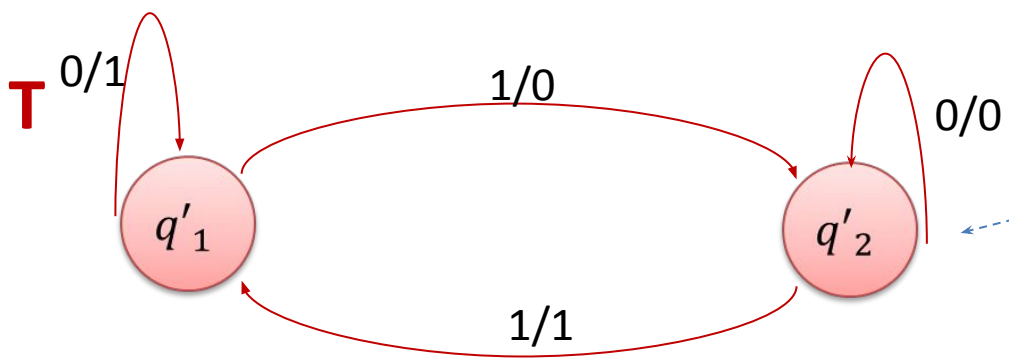
$$q_2 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{\dots} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

Эта диаграмма иллюстрирует процесс минимизации автомата. Она показывает, что состояния q_2 и q_3 являются эквивалентными, что позволяет их объединить в одно состояние q'_2 .

$$q_2 \sim q_3 \sim q'_2$$

$S \sim T$



- **Эквивалентные автоматы**

$$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\} \sim T = \{X, Q', Y, \varphi', \psi'\},$$

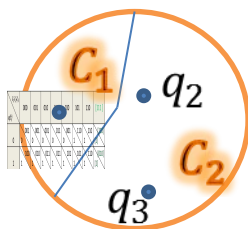
если

$$\forall q \in Q \exists q' \in Q': q \sim q' \text{ и наоборот.}$$

Автомат S называется **минимальным** автоматом (S_{min}), если среди всех автоматов, эквивалентных S , он имеет наименьшее число состояний.

Для построения S_{min} состояния автомата исходного автомата разбивают на **классы эквивалентности**.

В примере



2 класса эквивалентности C_1 и C_2

§4. Теорема о существовании минимального автомата

- Для всякого автомата S существует минимальный автомат S_{min} , который определен единственным образом с точностью до нумерации состояний.

Лемма. Если q_1 и q_2 находятся в одном классе эквивалентности, то любой символ x переводит их в один и тот же класс эквивалентности.

$$\left. \begin{array}{l} q_1 \xrightarrow{x} q_1' \\ q_2 \xrightarrow{x} q_2' \end{array} \right\} \longrightarrow q_1' \sim q_2'$$

Доказательство: (от противного)

Пусть $q_1 \sim q_2$, но $q_1' \neq q_2'$

Тогда \exists входное слово $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$

$$S(q_1', \alpha) = y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_s} = \omega$$

$$S(q_2', \alpha) = y_{k_1'} y_{k_2'} \dots y_{k_s'} = \omega', \text{ но } \omega \neq \omega'$$

Пусть $\dots \alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ (вх. слово)

$$q_1 \xrightarrow{x} q_1' \xrightarrow[y_{k_1}]{x_{i_1}} q_1'' \dots \xrightarrow[y_{k_s}]{x_{i_s}}$$

$$q_2 \xrightarrow{x} q_2' \xrightarrow[y_{k_1'}]{x_{i_1}} \dots \xrightarrow[y_{k_s'}]{x_{i_s}}$$

Тогда $y \omega \neq y \omega'$ - не м.б.,

$$\text{т.к. } q_1 \sim q_2 \Rightarrow S(q_1, \alpha) = S(q_2, \alpha)$$

противоречие

Схема доказательства

Рассмотрим автоматы S и S_m .

$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\}$, $S_m = \{X, \tilde{Q}, Y, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$, где

$\tilde{Q} = \{C_1, C_2, \dots, C_l\}$ – множество классов эквивалентных состояний.

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\tilde{\varphi}(x, C_i) = C_j$,

где $\varphi(x, q) = q' \in C_j$, (согласно Лемме)

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\tilde{\psi}(x, C_i) = \psi(x, q) = y$.

Построен S_m .

Далее: докажем, что построен минимальный автомат и он единственный с точностью до обозначения состояний.

1) $S_m \sim S$

Возьмем $\forall C \in \tilde{Q}$ и $\forall q \in S$. По построению $C \sim q$.

Наоборот: $q \in Q$, C - класс состояний, эквивалентных q . Поэтому $q \sim C$

2) Покажем, что S_m – минимальный автомат.

Пусть это не так. Тогда $\exists S_m' \sim S_m$, но S_m' имеет меньше состояний.

Тогда в S_m найдутся хотя бы 2 состояния, эквивалентных 1 состоянию S_m' , т.е. 2 класса C_i и $C_j : C_i \sim C_j$. Противоречие.

3) Из (1) и (2) следует, что в любом другом минимальном автомате число состояний такое же, как в S_m .

Следовательно, все минимальные автоматы отличаются только нумерацией состояний.

§5. Алгоритм минимизации автомата. (алгоритм Ауфенкампа и Хона)

1. С помощью функции выходов ψ разобьём Q на классы первого порядка:

$$Q = C_{11} \cup C_{12} \cup \dots \cup C_{1m}.$$

$$q \text{ и } q' \in C_{1i}, \text{ если } \forall x \psi(x, q) = \psi(x, q')$$

2. Каждый класс первого порядка разбивают на классы второго порядка C_{2j} с помощью функции переходов φ . q и $q' \in C_{2j}$, если

$$\forall x \varphi(x, q) = \tilde{q} \in C_{1k}$$

$$\varphi(x, q') = \hat{q} \in C_{1k}$$

3. Каждый класс второго порядка разбивают на классы третьего порядка C_{3l} аналогично.

$$q \text{ и } q' \in C_{3l}, \text{ если}$$
$$\forall x \varphi(x, q) = \tilde{q} \in C_{2t}$$
$$\varphi(x, q') = \hat{q} \in C_{2t}$$

4. И т.д.

Алгоритм заканчивается, если на шаге k мы получаем то же разбиение, что и на $k-1$ шаге.

Пример:

•

1.

$$C_{11}=\alpha, C_{12}=\beta, C_{13}=\gamma$$

$q(t-1)$	α q_1	α q_2	α q_3	β q_4	γ q_5	γ q_6
$x(t)$						
a_1	0	q_2	q_3	q_4	q_4	q_5
a_2	1	q_2	q_3	q_4	q_4	q_5

2.

$q(t-1)$	q_1	α q_2	q_3	β q_4	γ q_5	q_6
$x(t)$						
a_1	q_2	q_3	q_4	q_4	q_5	q_6
a_2	q_2	q_3	q_4	q_4	q_6	q_5

3.

$$C_{21}=\alpha, C_{22}=\beta, C_{23}=\gamma, C_{24}=\delta$$

$q(t-1) \backslash x(t)$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_1	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_5 δ	q_6 δ
a_2	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_6 δ	q_5 δ

4.

$$C_{31}=\alpha, C_{32}=\beta, C_{33}=\gamma, C_{34}=\delta$$

$$C_{35}=\epsilon$$

$q(t-1) \backslash x(t)$	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_1	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 δ	q_5 ϵ	q_6 ϵ
a_2	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 γ	q_6 ϵ	q_5 ϵ

5.

$q(t-1)$	α	β	γ	δ	ϵ
$x(t)$					
a_1	0	0	0	1	1
a_2	1	1	1	0	1

← Smin

Обоснование алгоритма

Покажем, что в результате алгоритма классы, полученные на последнем (k -ом) шаге, являются классами эквивалентных состояний

Для этого докажем, что

1) Если q и $q' \in C_{ki}$, то $q \sim q'$.

2) Если $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ (r – шаг, когда состояния впервые попали в разные классы). Тогда $q \not\sim q'$.

1) Пусть $q, q' \in C_{ki}$. Докажем, что $\forall \alpha S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$.

$$\forall x \left. \begin{array}{l} \varphi(x, q) \\ \varphi(x, q') \end{array} \right\} \in C_{kj} \Rightarrow q, q' \in C_{li} \Rightarrow \psi(x, q) = \psi(x, q') = y_{k_1}$$

Пусть $\alpha = x_1 \dots x_n$.

$$\left. \begin{array}{l} q \xrightarrow{y_{k_1}} \frac{x_1}{y_{k_1}} \rightarrow q_1 \xrightarrow{y_{k_2}} \frac{x_2}{y_{k_2}} \rightarrow \dots \xrightarrow{y_{k_n}} \frac{x_n}{y_{k_n}} \rightarrow q_n \\ q' \xrightarrow{y_{k_1}} \frac{x_1}{y_{k_1}} \rightarrow q'_1 \xrightarrow{y_{k_2}} \frac{x_2}{y_{k_2}} \rightarrow \dots \xrightarrow{y_{k_n}} \frac{x_n}{y_{k_n}} \rightarrow q'_n \end{array} \right\} \Rightarrow S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$$

2) Пусть $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ ($r \leq k$). Тогда $\exists x: \varphi(q, x) \in C_{r-1,i}$, $\varphi(q', x) \in C_{r-1,j}$

Тогда $\exists x'$ и $\varphi(\varphi(x, q), x')$ и $\varphi(\varphi(x, q'), x')$

попадут в разные классы порядка $r - 1$

И т.д., пока не дойдем до классов первого порядка C_{1m} и C_{1n} (разных),

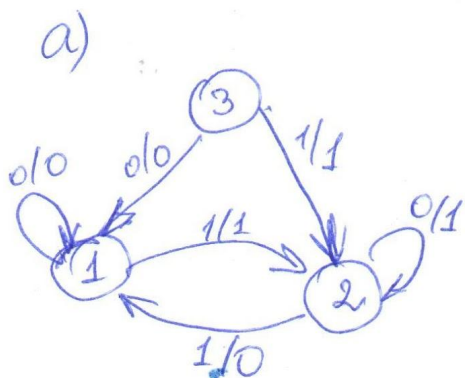
набрав слово α длины r , причем

$S(q, \alpha) \neq S(q', \alpha)$ (разные выходные слова). Т.е. $q \neq q'$.

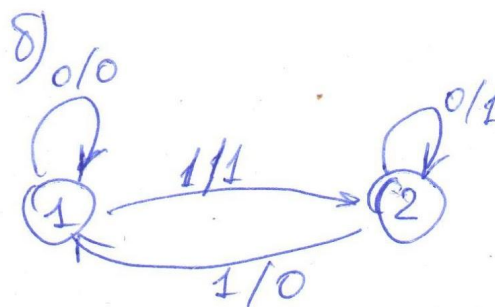
Автомат, все состояния которого эквивалентны, сводится к автомату с одним состоянием (КС).

Минимальный автомат – это автомат, все состояния которого не эквивалентны.

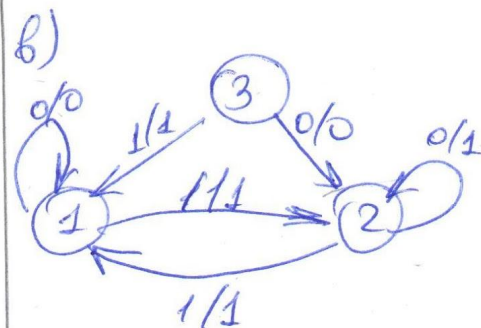
Пример: Какие из автоматов, представленных графами, являются эквивалентными?



x \ Q	1	2	3
0	1	2	1
1	2	1	2



x \ Q	1	2
0	1	2
1	2	1



x \ Q	1	2	3
0	1	2	2
1	2	1	1