Лекция 2

§1. Реализация произвольного автомата в виде СЛС.

<u>Теорема</u> о реализации произвольного конечного автомата в виде СЛС (Синхронной Логической Сети).

Любой конечный автомат $S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}$ может быть реализован в виде СЛС над любой автоматной системой

$$\sum_a = \{\text{ФПС}, \boxed{D}\}.$$

Алгоритм построения СЛС

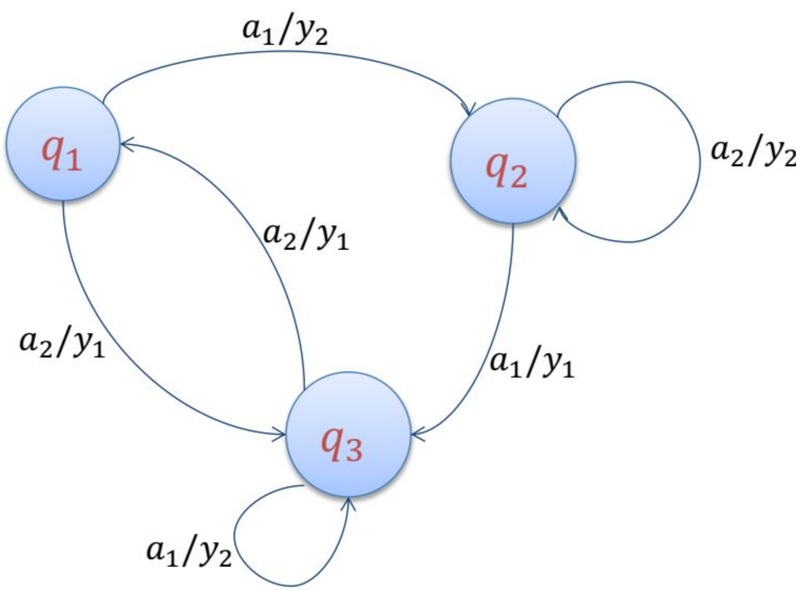
- 1. Двоичное кодирование алфавитов X, Y, Q (возможно, появятся резервные состояния).
- 2. Доопределение АТ на все состояния, в том числе и резервные. Цель: получить канонические уравнения наименьшей сложности.
- 3. Построение СЛС.

К примеру из лекции 1

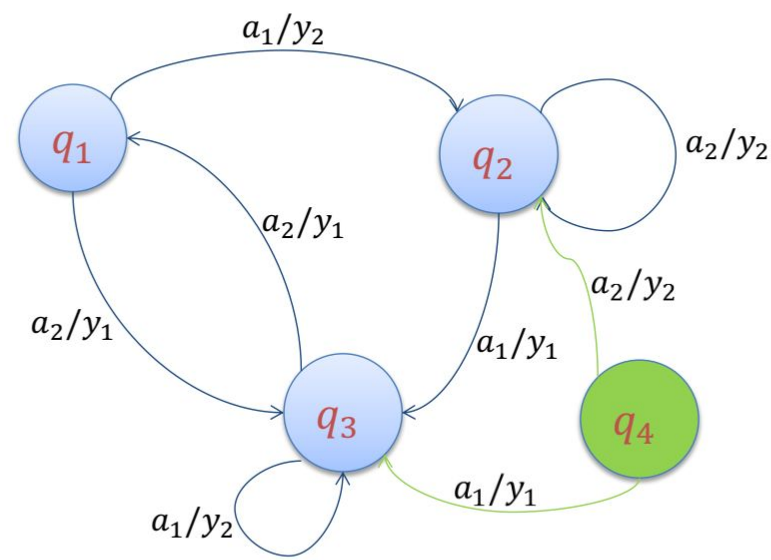
$$Q: q_1 \sim 00,\ q_2 \sim 01, q_3 \sim 10;\ q(t) \sim z_1(\mathrm{t})\mathrm{z}_2(\mathrm{t});\ \mathrm{q}_4 \sim 11$$

q(t-1)) ***x(t)***	***q1***	***q2***	***q3***

z_1z_2 \ X	00	01	10	$\boxed{11}$
0	01 / 1	10 / 0	10 / 1	$\boxed{1}\boxed{0}$ / $\boxed{0}$
1	10 / 0	01 / 1	00 / 0	$\boxed{0}\boxed{1}$ / $\boxed{1}$

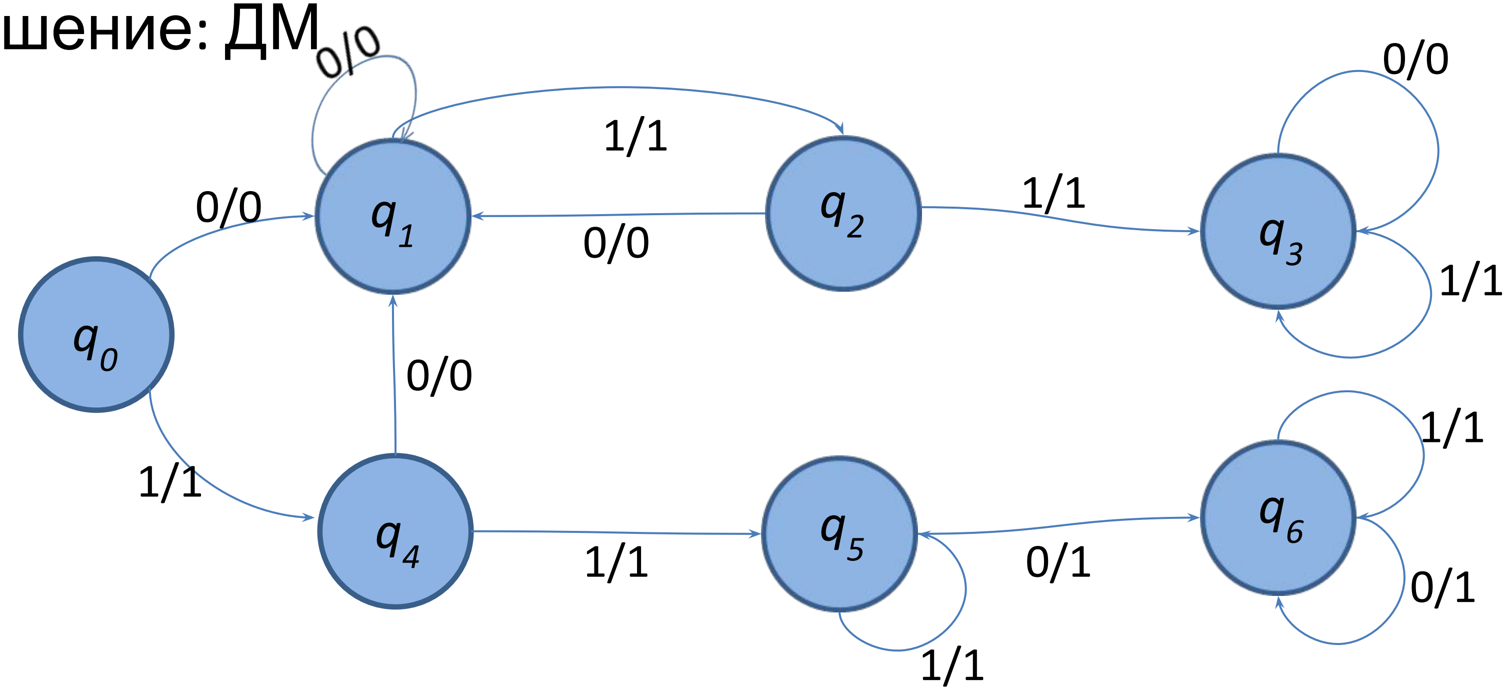


⇒



Пример. Автомат S имеет *одноразрядный*, двоичный вход и выход. S выдаёт входную букву до тех пор, пока на его вход не поступит слово $\alpha_1 = 011$ или слово $\alpha_2 = 110$. Затем, начиная с *данного* такта, S <u>постоянно</u> выдаёт <u>входную букву</u>, в *случае* – α_1, или <u>1</u>, в *случае* – α_2 .
Составить ДМ с ветвями резервных состояний и СКУ минимальной сложности над $\sum_0$ для S.

Решение: ДМ



A

$q(t-1)$ / $x(t)$	q_0	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6	
0	q_1 0	q_1 0	q_1 0	q_3 0	q_1 0	q_6 1	q_6 1	q_6 1
1	q_4 1	q_2 1	q_3 1	q_3 1	q_5 1	q_5 1	q_6 1	q_2 1

$z_1z_2z_3$ / $x(t)$	000	001	010	011	100	101	110	
0	001 0	001 0	001 0	011 0	001 0	110 1	110 1	[110] [1]
1	100 1	010 1	011 1	011 1	101 1	101 1	110 1	[010] [1]

z_2z_3 / xz_1	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	1			
10	1	1		1

$$z_1(t) = \overline{x}(t)\cdot z_1(t-1)(z_2(t-1) \vee z_3(t-1)) \vee$$
$$\vee x(t)\cdot \overline{z_2}(t-1)\cdot(\overline{z_1}(t-1) \vee \overline{z}_3(t-1)) \vee$$
$$\vee x(t)\cdot \overline{z_1}(t-1)\cdot \overline{z}_3(t-1))$$

z_2z_3 / xz_1	00	01	11	10
00			1	
01		1	1	1
11			1	1
10		1	1	1

$$z_2(t) = z_2\cdot(x \vee z_1 \vee z_3) \vee z_3\cdot(\overline{x}\cdot z_1 \vee x\cdot \overline{z_1})$$

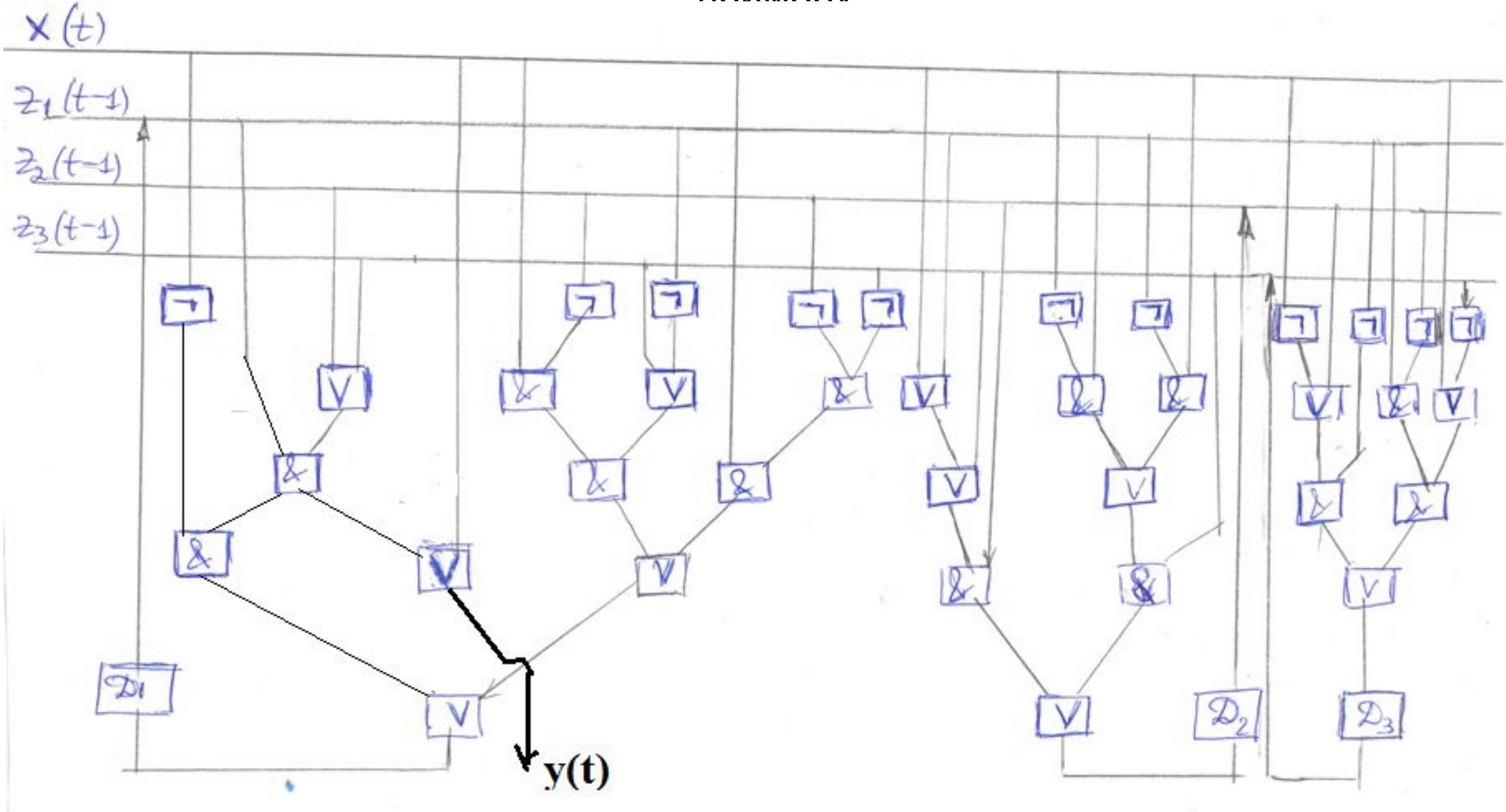
z_2z_3 / xz_1	00	01	11	10
00	1	1	1	1
01	1		$\square$	
11	1	1	$\square$	
10			1	1

$$z_3(t) = \overline{z_1} \cdot (\overline{x} \vee z_2) \vee z_1 \cdot \overline{z_2} \cdot (x \vee \overline{z_3})$$

z_2z_3 / xz_1	00	01	11	10
00				
01		1	1	1
11	1	1	1	1
10	1	1	1	1

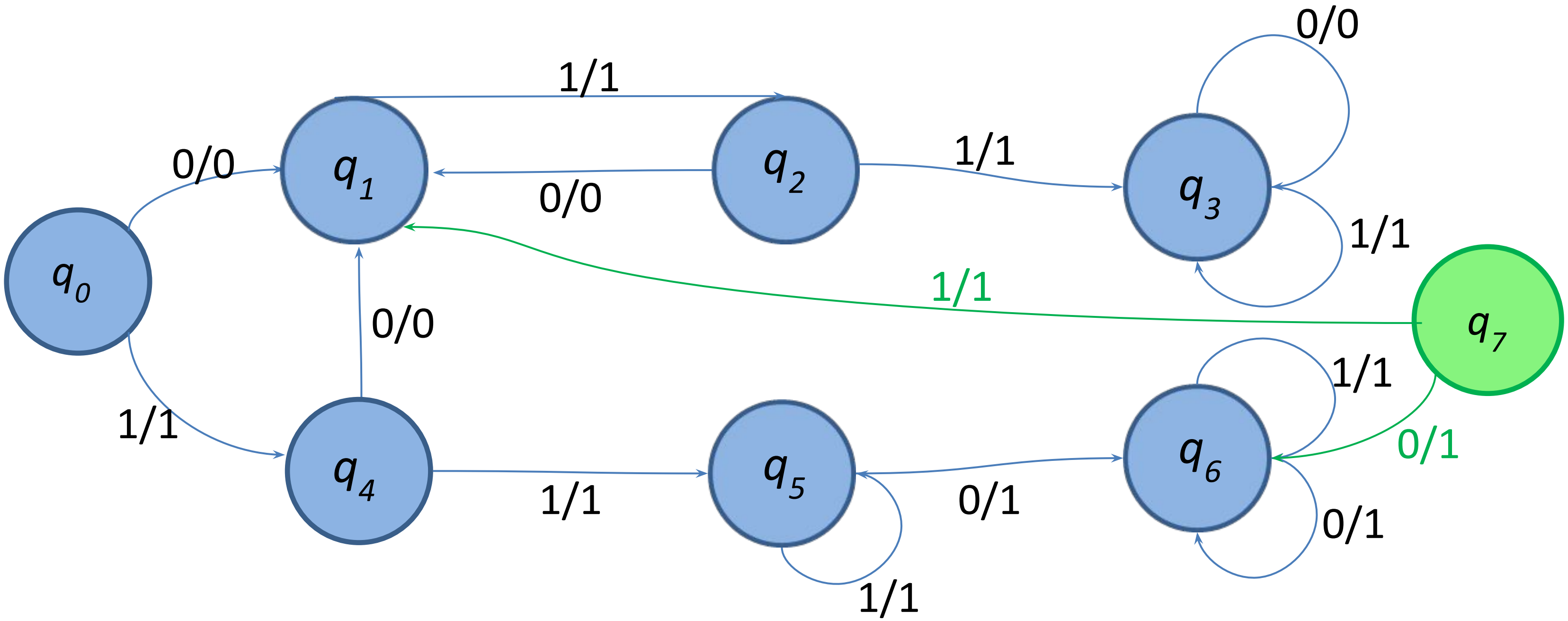
$$y(t) = x \vee z_1 \cdot (z_2 \vee z_3)$$

СЛС к примеру



Сложность схемы = 28

ДМ с ветвями резервных состояний



Доказательство теоремы о реализации произвольного автомата в виде СЛС

- Доказательство: применим алгоритм построения СЛС над $\sum_a = \{\text{ФПС}, \boxed{D}\}$.

Для доказательства однозначности результата можно сначала построить КУ над $\text{ФПС} = \sum_0 = \{\wedge, \vee, \neg\}$. В силу единственности ДНФ они определены однозначно. Затем, каждую функцию из $\sum_0$ выразить функциями данной ФПС (леммы о несамодвойстенной, о нелинейной, о немонотонной функциях).

Из всех вариантов выберем КУ наименьшей сложности. Следовательно, получим однозначный результат (или несколько равнозначных)

§2. Автоматное отображение

$$S = \{X, Y, Q, \varphi, \psi\}, q(0) = q_{1,}\ \alpha = x(1)x(2) \dots x(t), x(i) \in X$$

$$\omega = y(1)y(2) \dots y(t), y(i) \in Y$$

Автоматное отображение - это функция $f: X^* \to Y^*$

$$f(\alpha) = \omega = S(q(0), \alpha)$$

Свойства автоматного отображения

1. $|f(\alpha)| = |\omega| = |\alpha|$

2. Отсутствие последействия:

если $\alpha = \alpha_1\alpha_2$, то $\omega = \omega_1\omega_2$,

причем $|\omega_1| = |\alpha_1|, |\omega_2| = |\alpha_2|$,

т. е. ω_1 зависит только от α_1

Пример автоматного отображения для вышерассмотренного примера:

$$S(q_0, 1100) = 1101\ .$$

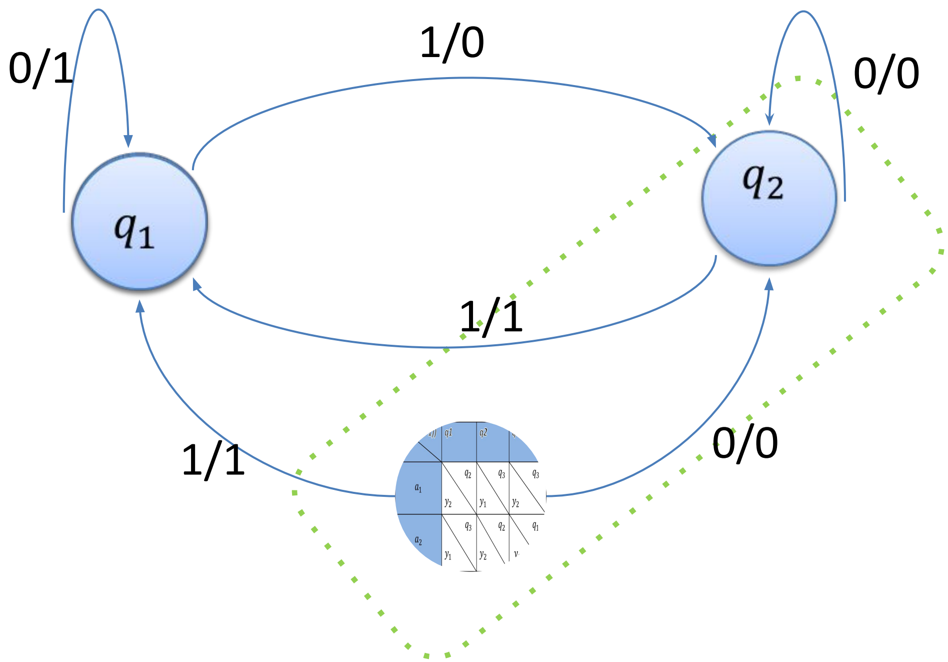
§3. Эквивалентные состояния и эквивалентные автоматы.

Эквивалентные состояния

$q_i \sim q_j$, если $\forall \alpha \; S(q_i, \alpha) = S(q_{j,} \alpha)$

Пример:

S



Пусть

$$\alpha = x_1 \dots x_n = x_1\alpha'$$

если $x_1 = 0$, то

$$q_2 \xrightarrow[0]{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow[0]{0} q_2 \xrightarrow{x_2} \dots$$

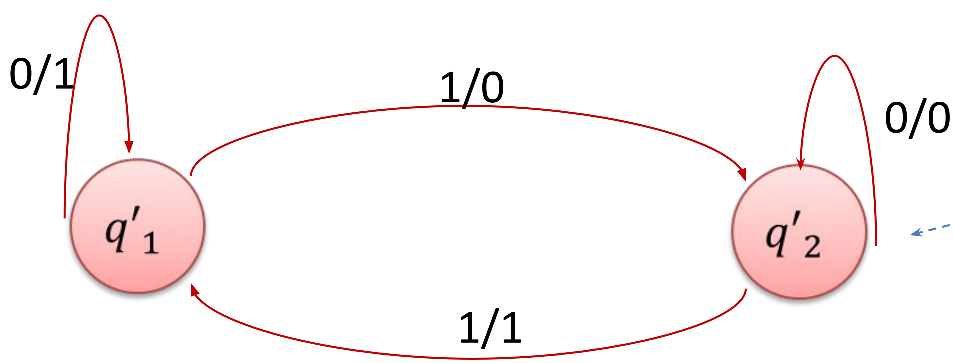
если $x_1 = 1$, то

$$q_2 \xrightarrow[1]{1} q_1 \xrightarrow{} \dots$$

$$q_3 \xrightarrow[1]{1} q_1 \xrightarrow{x_2} \dots$$

$$q_2 \sim q_3 \sim q'_2$$

T



S~ T

- **Эквивалентные автоматы**

$$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\} \sim T = \{X, Q', Y, \varphi', \psi'\},$$

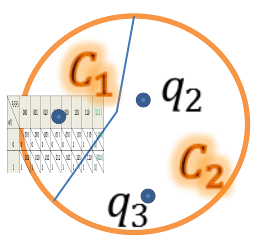
если

$$\forall q \in Q \;\; \exists\, q' \in Q' \colon q \sim q' \text{ и наоборот.}$$

Автомат *S* называется **минимальным** автоматом (S_{min}), если среди всех автоматов, эквивалентных *S*, он имеет наименьшее число состояний.

Для построения S_{min} состояния автомата исходного автомата разбивают на **классы эквивалентности**.

В примере



2 класса эквивалентности C_1 и C_2

§4. Теорема о существовании минимального автомата

- Для всякого автомата S существует минимальный автомат S_{min}, который определен единственным образом с точностью до нумерации состояний.

<u>Лемма</u>. Если q_1 и q_2 находятся в одном классе эквивалентности, то любой символ *x* переводит их в один и тот же класс эквивалентности.

$$\left.\begin{aligned} q_1 &\xrightarrow{x} q_1' \\ q_2 &\xrightarrow{x} q_2' \end{aligned}\right\} \longrightarrow q_1' \sim q_2'$$

Доказательство: (от противного)

Пусть $q_1 \sim q_2$, но $q_1' \not\sim q_2'$

Тогда $\exists$ входное слово $\alpha = x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$

$S(q_1', \alpha) = y_{k_1} y_{k_2} \dots y_{k_s} = \omega$

$S(q_2', \alpha) = y_{k_1}' y_{k_2}' \dots y_{k_s}' = \omega'$, но $\omega \neq \omega'$

Пусть $x\alpha = x x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_s}$ (вх. слово)

$$q_1 \xrightarrow[y]{x} q_1' \xrightarrow[y_{k_1}]{x_{i_1}} q_1'' \cdots\cdots \xrightarrow[y_{k_s}]{x_{i_s}}$$

$$q_2 \xrightarrow[y]{x} q_2' \xrightarrow[y_{k_1}']{x_{i_1}} \cdots\cdots \xrightarrow[y_{k_s}']{x_{i_s}}$$

Тогда $y\omega \neq y\omega'$ – не м. б.,

т.к. $q_1 \sim q_2 \Rightarrow S(q_1, x\alpha) = S(q_2, x\alpha)$

противоречие

Схема доказательства

- Рассмотрим автоматы S и S_m.

$S = \{X, Q, Y, \varphi, \psi\}$, $S_m = \{X, \tilde{Q}, Y, \tilde{\varphi}, \tilde{\psi}\}$, где

$\widetilde{Q}$ =$\{C_1, C_2, \ldots, C_l\}$ – множество классов эквивалентных состояний.

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\widetilde{\varphi}(x, C_i) = C_j$,

где $\varphi(x, q) = q' \in C_j$, (согласно Лемме)

$\forall x$ и $\forall q \in C_i$ определим $\widetilde{\psi}(x, C_i) = \psi(x, q) = y$.

Построен S_m.

Далее: докажем, что построен минимальный автомат и он единственный с точностью до обозначения состояний.

1) $S_m \sim S$

Возьмем $\forall C \in \tilde{Q}$ и $\forall q \in C$. По построению $C \sim q$.

Наоборот: $q \in Q$, C - класс состояний, эквивалентных q. Поэтому $q \sim C$

2) Покажем, что S_m – минимальный автомат.

Пусть это не так. Тогда $\exists S_m' \sim S_m$, но S_m' имеет меньше состояний.

Тогда в S_m найдутся хотя бы 2 состояния, эквивалентных 1 состоянию S_m', т.е. 2 класса C_i и C_j : $C_i \sim C_j$. Противоречие.

3) Из (1) и (2) следует, что в любом другом минимальном автомате число состоянию такое же, как в S_m.

Следовательно, все минимальные автоматы отличаются только нумерацией состояний.

§5. Алгоритм минимизации автомата. (алгоритм Ауфенкампа и Хона)

1. С помощью функции выходов ψ разобьём Q на классы первого порядка:

$$Q = C_{11} \cup C_{12} \cup \cdots \cup C_{1m}.$$

$$q \text{ и } q' \in C_{1i}, \text{если } \forall x\; \psi(x, q) = \psi(x, q')$$

2. Каждый класс первого порядка разбивают на классы второго порядка C_{2j} с помощью функции переходов φ. q и $q' \in C_{2j}$, если

$$\forall x\; \varphi(x, q) = \tilde{q} \in C_{1k}$$

$$\varphi(x, q') = \hat{q} \in C_{1k}$$

3. Каждый класс второго порядка разбивают на классы третьего порядка C_{3l} аналогично.

$$q \text{ и } q' \in C_{3l}, \text{если}$$
$$\forall x \; \varphi(\, x, q) = \tilde{q} \in C_{2t}$$
$$\varphi(x, q') = \hat{q} \in C_{2t}$$

4. И т.д.

Алгоритм заканчивается, если на шаге *k* мы получаем то же разбиение, что и на *k-1* шаге.

Пример:

-

1.

$C_{11}=\alpha, C_{12}=\beta, C_{13}=\gamma$

$q(t-1)$ / $x(t)$	α q_1	α q_2	α q_3	β q_4	γ q_5	γ q_6
a_1	0 / q_2	0 / q_3	0 / q_4	1 / q_4	1 / q_5	1 / q_6
a_2	1 / q_2	1 / q_3	1 / q_4	0 / q_4	1 / q_6	1 / q_5

2.

$q(t-1)$ / $x(t)$	α q_1	q_2	q_3	β q_4	γ q_5	q_6
a_1	q_2 α	q_3 α	q_4 β	q_4 β	q_5 γ	q_6 γ
a_2	q_2 α	q_3 α	q_4 β	q_4 β	q_6 γ	q_5 γ

3.

$C_{21}=\alpha, C_{22}=\beta, C_{23}=\gamma, C_{24}=\delta$

x(t) \ q(t-1)	α		β	γ	δ	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_1	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_5 δ	q_6 δ
a_2	q_2 α	q_3 β	q_4 γ	q_4 γ	q_6 δ	q_5 δ

4.

$C_{31}=\alpha, C_{32}=\beta, C_{33}=\gamma, C_{34}=\delta$

$C_{35}=\varepsilon$

x(t) \ q(t-1)	α	β	γ	δ	ε	
	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
a_1	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 δ	q_5 ε	q_6 ε
a_2	q_2 β	q_3 γ	q_4 δ	q_4 γ	q_6 ε	q_5 ε

5.

$x(t)$ \ $q(t-1)$	α	β	γ	δ	ε
a_1	β / 0	γ / 0	δ / 0	δ / 1	ε / 1
a_2	β / 1	γ / 1	δ / 1	γ / 0	ε / 1

← Smin

Обоснование алгоритма

Покажем, что в результате алгоритма классы, полученные на последнем (*k*-ом) шаге, являются классами эквивалентных состояний

Для этого докажем, что

1) Если q и $q' \in C_{ki}$, то $q \sim q'$.

2) Если $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ (*r* – шаг, когда состояния впервые попали в разные классы). Тогда $q \nsim q'$.

1) Пусть $q, q' \in C_{ki}$. Докажем, что $\forall \alpha\ S(q, \alpha) = S(q', \alpha)$.

$$\forall x \quad \left.\begin{matrix} \varphi(x,q) \\ \varphi(x,q') \end{matrix}\right\} \in C_{kj} \Rightarrow q, q' \in C_{1l} \Rightarrow \psi(x,q) = \psi(x,q) = y_{k_1}$$

Пусть $\alpha = x_1 \dots x_n$.

$$\left.\begin{matrix} q \dfrac{x_1}{y_{k_1}} \to q_1 \dfrac{x_2}{y_{k_2}} \to \dots \dfrac{x_n}{y_{k_n}} \to q_n \\ q' \dfrac{x_1}{y_{k_1}} \to q'_1 \dfrac{x_2}{y_{k_2}} \to \dots \dfrac{x_n}{y_{k_n}} \to q'_n \end{matrix}\right\} \Rightarrow S(q,\alpha) = S(q',\alpha)$$

2) Пусть $q \in C_{ri}$, $q' \in C_{rj}$ $(r \le k)$. Тогда $\exists x: \varphi(q,x) \in C_{r-1,i}$, $\varphi(q',x) \in C_{r-1,j}$

Тогда $\exists x'$ и $\varphi(\varphi(x,q),x')\ )\ \varphi\ \varphi\ x\ q'\ x'$

попадут в разные классы порядка r - 1

И т.д., пока не дойдем до классов первого порядка C_{1m} и C_{1n}(разных),

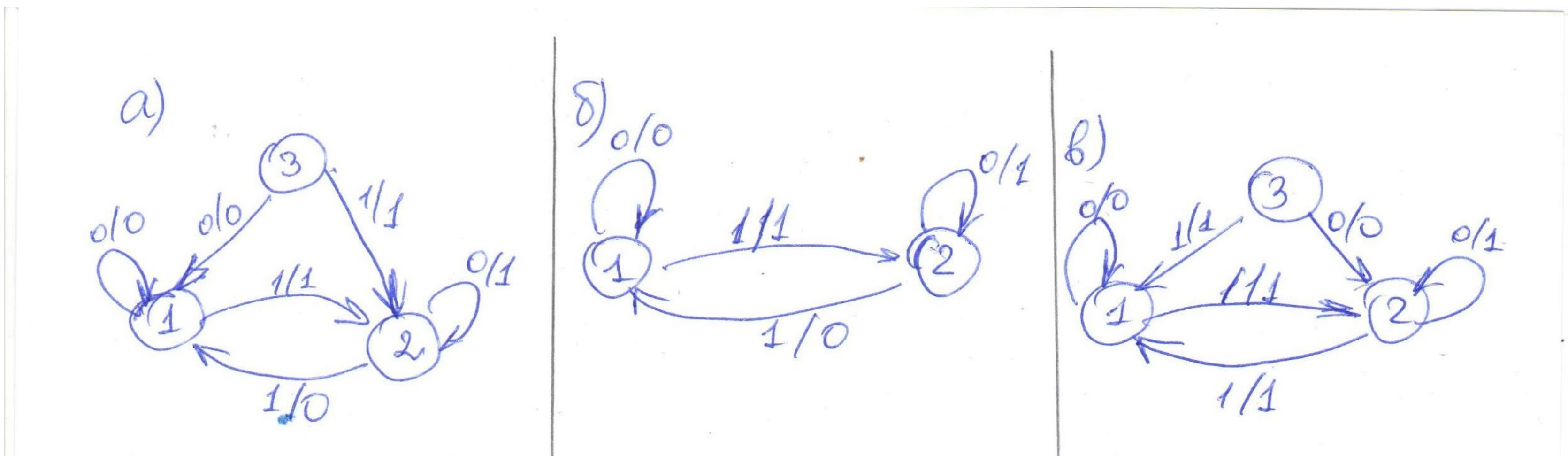
набрав слово α длины r, причем

$S(q,\alpha) \ne S(q',\ \alpha)$ (разные выходные слова). Т.е. $q \nsim q'$.

Автомат, все состояния которого эквивалентны, сводится к автомату с одним состоянием (КС).

Минимальный автомат – это автомат, все состояния которого не эквивалентны.

Пример: Какие из автоматов , представленных графами, являются эквивалентными?



а)

x \ Q	1	2	3
0	1, 0	2, 1	1, 0
1	2, 1	1, 0	2, 1

б)

x \ Q	1	2
0	1, 0	2, 1
1	2, 1	1, 0

в)

x \ Q	1	2	3
0	1, 0	2, 1	2, 0
1	2, 1	1, 1	1, 1