

Оценка работ учащихся

1. Разложите на множители: $x^2y + 1 - x^2 - y$.

Пример 1.

$$\text{Пример 1. } x^2y + 1 - x^2 - y = x^2y - x^2 + 1 - y = x^2(y-1) - 1(y-1) = (x^2-1)(y-1)$$

Пример 2.

$$\text{Пример 2. } x^2y + 1 - x^2 - y = x^2(y-1) + 1 - y = \\ = (y-1)(x^2+1)$$

1. Решение не содержит ошибок, но разложение на множители не доведено до конца.

2. За решение выставляется 0 баллов; допущена ошибка в знаках при группировке слагаемых .

1. Разложите на множители: $x^2y + 1 - x^2 - y$.

Ответ: $(y-1)(x-1)(x+1)$.

Решение. $x^2y + 1 - x^2 - y = x^2(y-1) - (y-1) = (y-1)(x^2 - 1) = (y-1)(x-1)(x+1)$.

2. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

Пример 1.

$$19) \quad \frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{5(x-1)(x+0,4)}{5x(x+0,4)} = \frac{x-1}{x}$$

$$5x^2 - 3x - 2 = 0;$$

$$D = 9 + 40 = 49;$$

$$x = \frac{3 \pm 7}{10}; \quad x_1 = 1; \quad x_2 = -0,4;$$

**Все шаги выполнены верно,
получен правильный
ответ.**



2. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

Пример 2.

$$1) \frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{5(x-1)(x+0,4)}{5x^2 + 2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)}$$

$$= \frac{x-1}{x}$$

$$\begin{aligned} &0,4 = \frac{2}{5} \\ &5x + 2 > 0 \\ &x \neq -\frac{2}{5} \end{aligned}$$

2. Сократите дробь $\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x}$.

Ответ: $\frac{x-1}{x}$.

Решение. Корни квадратного трехчлена $5x^2 - 3x - 2$: $x_1 = 1, x_2 = -\frac{2}{5}$. Имеем

$$\frac{5x^2 - 3x - 2}{5x^2 + 2x} = \frac{(x-1)(5x+2)}{x(5x+2)} = \frac{x-1}{x}.$$

Сокращение дроби выполнено верно. Но так как при указании ОДЗ допущена ошибка (хотя нахождение области определения дроби в данном случае не требуется), количество баллов за решение снижается.

1. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$.

Пример 1.

$$20. (\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$$

$$\sqrt{3} - 1,5 > 0$$

$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x < -\frac{3}{2}$$

$$x < -1,5$$

Ответ: $x \in (-\infty; -1,5)$

**Допущена ошибка на
последнем шаге решения.
Оценка снижается.**



1. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$.

Пример 2

$$20. (\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$$

$$\sqrt{3} \approx 1,4, \quad \sqrt{3} > 1,5$$


$$3 - 2x > 0$$

$$-2x > -3$$

$$x > 1,5$$

Ответ: $(1,5; +\infty)$

**Допущена ошибка
принципиального
характера в алгоритме
решения неравенства. За
решение выставляется 0
баллов.**



1. Решите неравенство $(\sqrt{3} - 1,5)(3 - 2x) > 0$.

Ответ: $(-\infty; 1,5)$. Другая возможная форма ответа: $x < 1,5$.

Решение. 1) Определим знак разности $\sqrt{3} - 1,5$. Так как $1,5 = \sqrt{2,25}$ и $\sqrt{3} > \sqrt{2,25}$, то $\sqrt{3} - 1,5 > 0$.

2) Получаем неравенство $3 - 2x > 0$. Отсюда $x < 1,5$.

4. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \dots$

21) Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \dots$

$$a_1 = -8,6, \quad d = 0,4$$

$$a_n = a_1 + d(n-1)$$

$$a_n = -8,6 + 0,4(n-1)$$

$$-8,6 + 0,4(n-1) < 0$$

$$0,4n - 9 < 0$$

$$n < \frac{9}{0,4} = 22,5$$


$$n < 22,5, \quad n = 22$$

$$a_{22} = -8,6 + 0,4 \cdot 21 = -8,6 + 8,4 = -0,2$$

$$S_{22} = \frac{-8,6 + (-0,2)}{2} \cdot 22 = -8,8 \cdot 11 = -96,8$$

Ответ: $-96,8$

Ход решения верный, но допущена вычислительная ошибка (при нахождении разности арифметической прогрессии), с ее учетом решение доведено до конца.



4. Найдите сумму всех отрицательных членов арифметической прогрессии $-8,6; -8,4; \dots$

Ответ: $-189,2$.

Решение. 1. Найдем разность прогрессии: $d = -8,4 + 8,6 = 0,2$.

2. Найдем число отрицательных членов прогрессии.

Составим формулу n -го члена: $a_n = -8,6 + 0,2(n-1) = 0,2n - 8,8$.

Решим неравенство $0,2n - 8,8 < 0$; получим $n < 44$. Значит, $n = 43$.

$$3. S_{43} = \frac{(2 \cdot (-8,6) + 0,2 \cdot 42) \cdot 43}{2} = -189,2.$$

2. Из пункта А в пункт В, расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта В вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от А до В пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт В, если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

$v \cong 21$

Пусть x км/ч — скорость плота
 Тогда $4x$ км/ч — скорость катера
 в стоячей воде.

$4x + x = 5x$ — скорость катера
 по течению, $4x - x = 3x$ — против
 течения.

Плывут навстречу друг другу,
 скорости сближения $x + 3x = 4x$.

$\frac{s}{4x}$ ч — время до встречи

$\frac{s}{4x} \cdot 3x = \frac{3s}{4}$ км — катер про-
 шёл до встречи.

$\frac{3s}{4} : 5x = \frac{3s}{20x}$ ч — время на
 обратный путь (катер)

Всё время: $\frac{s}{4x} + \frac{3s}{20x} = \frac{8s}{20x} =$
 $= \frac{2s}{5x}$ ч.

За это время плот прошёл

$\frac{2s}{5x} \cdot x = \frac{2s}{5} = \frac{s}{2}$ км. Ответ: половина пути

**Ход решения верный, введены
нужные обозначения,
приведены пояснения, но
допущена вычислительная
ошибка, с ее учетом решение
доведено до конца.**



2. Из пункта A в пункт B , расположенный ниже по течению реки, отправился плот. Одновременно навстречу ему из пункта B вышел катер. Встретив плот, катер сразу повернул и поплыл назад. Какую часть пути от A до B пройдет плот к моменту возвращения катера в пункт B , если скорость катера в стоячей воде вчетверо больше скорости течения реки?

Ответ: плот пройдет $\frac{2}{5}$ всего пути.

Решение. Пусть скорость течения реки (и плота) x км/ч. Тогда скорость катера против течения равна $4x - x = 3x$ км/ч, а по течению $4x + x = 5x$ км/ч. Следовательно, скорость катера против течения в 3 раза больше скорости плота, а по течению – в 5 раз больше скорости плота. Если плот до встречи проплыл S км, то катер – в 3 раза больше, т. е. $3S$ км. После встречи катер пройдет $3S$ км, а плот – в 5 раз меньше, т. е. $\frac{3S}{5}$ км. Всего

плот пройдет $S + \frac{3S}{5} = \frac{8S}{5}$. Отношение пройденного плотом пути ко всему пути равно

$$\frac{\frac{8S}{5}}{4S} = \frac{2}{5}.$$

3. Найдите все значения a , при которых неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Пример 2.

$$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$$

$$\begin{aligned} \Delta &= (2a + 4)^2 - 4(8a + 1) \cdot 1 = \\ &= 4a^2 + 16a + 16 - 32a - 4 = 4a^2 - 16a + 12 \end{aligned}$$

$$4a^2 - 16a + 12 \leq 0$$

$$\Delta = 256 - 4 \cdot 4 \cdot 12 = 64 = 8^2$$


$$a_{1,2} = \frac{16 \pm 8}{16}$$

$$a_1 = \frac{12}{16} = \frac{3}{4}$$

$$a_2 = \frac{24}{16} = \frac{3}{2}$$

Ответ: при $a = \frac{3}{4}$ и $a = \frac{3}{2}$ уравнение не имеет решений.

За решение выставляется 0 баллов. Учащийся не владеет приемом решения квадратного неравенства, допускает ошибки в применении формулы корней квадратного уравнения.



3. Найдите все значения a , при которых неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Пример 1.

$x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$. найти все значения a , при которых решений нет.

т.е. при каких a график параболы не будет пересекать $y = 0$.

$$D < 0; \quad D = (2a + 4)^2 - 4(8a + 1) =$$

$$= 4a^2 + 16a + 16 - 32a - 4 =$$

$$= 4a^2 - 16a + 12 < 0.$$

$$a^2 - 4a + 3 < 0.$$

$$(a - 1)(a + 3) < 0.$$

~~$a \in (-3; 1)$~~ $a \in (1; 3)$

Ответ: при $a \in (1; 3)$.

**Все шаги решения
выполнены верно (хотя
есть погрешность в
терминологии), получен
правильный ответ.**



3. Найдите все значения a , при которых неравенство $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1 \leq 0$ не имеет решений.

Ответ: $1 < a < 3$; другая возможная форма ответа: $a \in (1; 3)$.

Решение. График функции $y = x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ – парабола, ветви которой направлены вверх. Значит, данное неравенство не имеет решений в том и только том случае, если эта парабола целиком расположена в верхней полуплоскости. Отсюда следует, что дискриминант квадратного трехчлена $x^2 + (2a + 4)x + 8a + 1$ должен быть отрицателен.

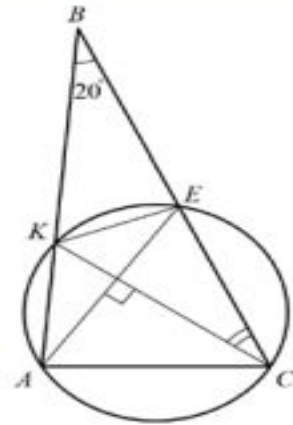
Имеем $D_1 = (a + 2)^2 - (8a + 1) = a^2 - 4a + 3 < 0$.

Решив квадратное неравенство, получаем $1 < a < 3$.

Замечание. Учащийся может воспользоваться формулой дискриминанта $D = b^2 - 4ac$.

Задание

1. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезок AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC = 20^\circ$.



$$\angle AKC = \angle AEC \Rightarrow \angle KCB = \angle AEB$$

$$\angle AEB = \frac{1}{2}(360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ$$

$$\angle AEB = \angle OCE + \angle COE \Rightarrow \angle OCE = 125^\circ - 90^\circ = 35^\circ$$

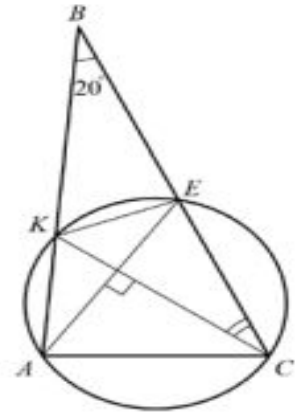
Ответ: 35°

**За выполнение задания
количество баллов
снижается, т.к. отсутствуют
пояснения и ссылки на
использованные теоремы.**



Задание

1. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезки AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC = 20^\circ$.



№ 24

$$\angle AEC = \angle AKC \text{ (общая хорда AC)}$$



$$\angle BEA = \angle BKE \text{ (как смежные)}$$



$$\angle BEA = \frac{360^\circ - (90^\circ + 20^\circ)}{2} = \frac{250^\circ}{2} = 125^\circ$$



$$\angle AEC = 180^\circ - 125^\circ = 65^\circ$$

$$\angle KCB = 90^\circ - 65^\circ = 25^\circ$$

(из прямоугольного треугольника OEC)

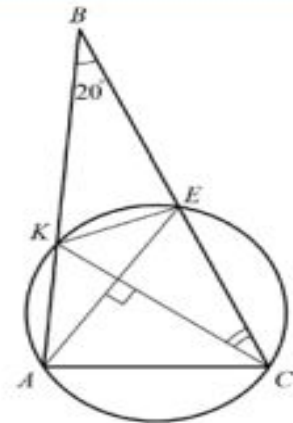


**Допущена вычислительная
ошибка, которая не носит
принципиального
характера; задание
доведено до конца.**



Задание

1. Окружность проходит через вершины A и C треугольника ABC и пересекает его стороны AB и BC в точках K и E соответственно. Отрезок AE и CK перпендикулярны. Найдите $\angle KCB$, если $\angle ABC = 20^\circ$.

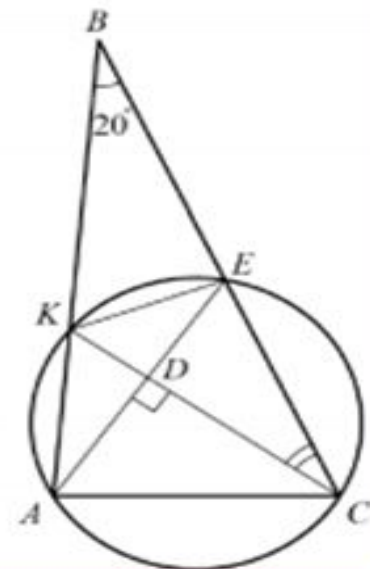


Решение.

$\angle AKC = \angle AEC$, т.к. опираются на одну дугу окружности; следовательно, $\angle VKC = \angle BEA$, как смежные с ними. Из четырехугольника

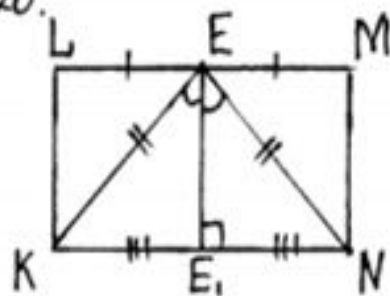
$$BKDE : \angle VKC = \frac{1}{2} (360^\circ - 90^\circ - 20^\circ) = 125^\circ. \text{ Из}$$

$$\triangle VKC \quad \angle KCB = 180^\circ - 125^\circ - 20^\circ = 35^\circ.$$



2. В параллелограмме $KLMN$ точка E — середина стороны LM . Известно, что $EK = EN$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

№ 20.



Дано: $KLMN$ — параллелограмм; $LE = EM$, $EK = EN$.

Доказать: $KLMN$ — прямоугольник.

Доказательство: проведем высоту EE_1 к стороне KN ;

$\triangle KEN$ — равнобедренный, т.к. $EK = EN \Rightarrow EE_1$ — высота, биссектриса и медиана $\Rightarrow KE_1 = E_1N$, EE_1 — общая сторона и $\angle KE_1E = \angle EE_1N$, т.к. $180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$


$\Rightarrow \triangle KEE_1 = \triangle EE_1N$ по 1 признаку; рассмотрим $\triangle KLE$ и $\triangle KEE_1$: $\angle LEK = \angle EKE_1$, т.к. противолежащие по свойству параллельных прямых, KE — общий, и $\angle KEE_1 = \angle LKE \Rightarrow \triangle KLE = \triangle KEE_1$

по 2 признаку, аналогично с $\triangle EE_1N$ и $\triangle EMN \Rightarrow \triangle EE_1N = \triangle EMN \Rightarrow \angle L = \angle E = \angle M = \angle E_1 =$

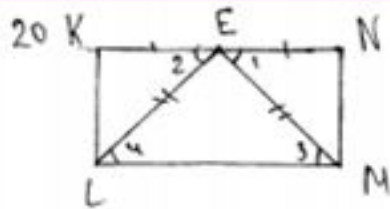
$= 90^\circ \Rightarrow \angle L = \angle M = \angle N = \angle K = 90^\circ \Rightarrow KLMN$ — прямоугольник.

За задание выставляется 0 баллов, т.к. отсутствует доказательство равенства углов $\angle KEE_1$ и $\angle LKE$, что является существенным моментом предложенного доказательства.

Комментарий. Учащийся был введен в заблуждение своим рисунком: если бы он изобразил параллелограмм, а не прямоугольник, этого бы не случилось.



2. В параллелограмме $KLMN$ точка E — середина стороны LM . Известно, что $EK = EN$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.



Дано: $KLMN$ - параллелограмм,
 $KE = EN$, $EL = EM$
 Д! $KLMN$ - прямоугольник

Рассмотрим $\triangle KLE$ и $\triangle MNE$, они равны по двум сторонам и углу между ними: 1) $EL = EM$ (по усл.); 2) $KE = EN$ (по усл.) 3) $\angle KEL = \angle NEM$, т.к. $\angle 1 = \angle 3$ и $\angle 2 = \angle 4$ (накр. лежащие \angle при парал. прямых), а $\angle 3 = \angle 4$, т.к. $\triangle ELM$ - равнобедр. (видно по рисунку)

Теперь докажем, что $\angle L = \angle M$

1) $\angle KLE = \angle NME$ (следует из равенства \triangle)
 2) $\angle ELM = \angle EML$ ($\triangle ELM$ - равнобедр., $\angle 3 = \angle 4$) } $\Rightarrow \angle L = \angle M$

Значит, $\angle K = \angle N$, $\angle L = \angle M$

Так как данный четырехугольник — параллелограмм, то его противоположные стороны равны, тогда $\angle K = \angle M$, $\angle L = \angle N \Rightarrow \angle K = \angle M = \angle L = \angle N = 90^\circ$ (сумма \angle в четырех \angle равна 360°). А поскольку все углы в параллелограмме равны 90° , то этот параллелограмм является прямоугольником. Что и требовалось доказать!

Доказательство логично, хорошо структурировано, не содержит пробелов, утверждения аргументированы.

Комментарий. 1) Фразу в приведенном доказательстве «видно по рисунку» следует трактовать, как неуклюжее выражение очевидной мысли о том, что заданное в условии задачи условие равенства отрезков EL и EM отмечено на рисунке, в треугольнике ELM стороны EL и EM равны, следовательно, треугольник ELM является равнобедренным.

2) Фразу «его противоположные стороны равны» следует считать опиской, так как далее речь идет об углах параллелограмма.

2. В параллелограмме $KLMN$ точка E — середина стороны LM . Известно, что $EK = EN$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

2. В параллелограмме $KLMN$ точка E — середина стороны LM . Известно, что $EK = EN$. Докажите, что данный параллелограмм — прямоугольник.

Решение.

Доказательство.

Треугольники KLE и MEN равны по трём сторонам.

Значит, углы KLE и NME равны. Так как их сумма равна 180° , то углы равны 90° . Такой параллелограмм — прямоугольник.

