

ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

Шидкина Елена Павловна,
учитель математики МБОУ г.
Мурманска гимназии №2

**«АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ – ЭТО
ЗАПИСАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ФИГУРЫ, А ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ
ФИГУРЫ – ЭТО НАРИСОВАННЫЕ
ФОРМУЛЫ.»**

Д. ГИЛБЕРТ



ЗАДАНИЕ

№1:

Вычислите
 $tg15^{\circ}$.

Решение:

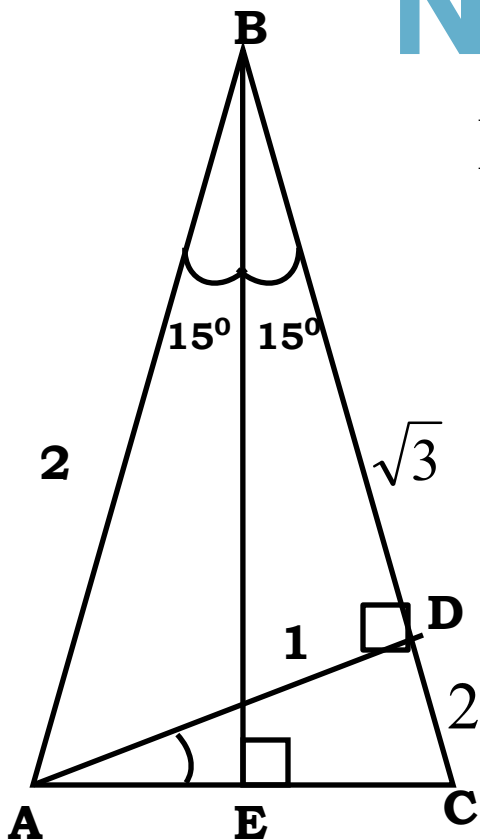
Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB=BC$), $\angle ABC=30^{\circ}$.

AD и BE – высоты.

$$\angle CAD=15^{\circ} \quad tg15^{\circ} = \frac{CD}{AD}.$$

Пусть $AD=1$, тогда $AB=2$ и $BD = \sqrt{3}$.

Значит, $CD = 2 - \sqrt{3}$.

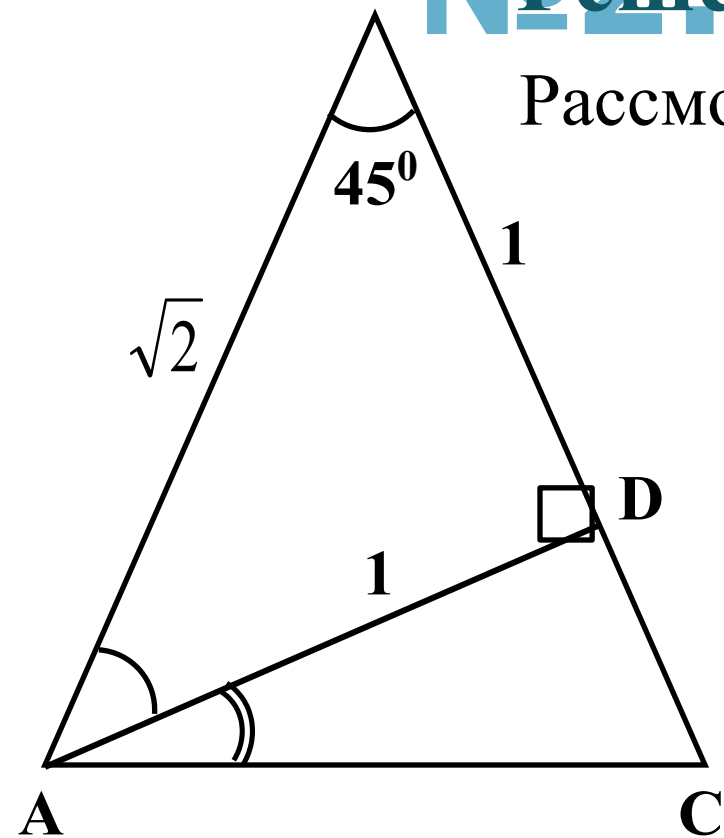


Ответ: $2 - \sqrt{3}$.

ЗАДАНИЕ

Вычислите
 $\operatorname{tg} 22^{\circ} 30'$.

В **№21** Решение:



Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB=BC$), $\angle ABC=45^{\circ}$.

Так как $\angle BCA=67^{\circ} 30'$, то

Пусть $AD=1$, $\operatorname{tg} 22^{\circ} 30' = \frac{CD}{AD}$,

$$CD = BC - BD = AB - AD = \sqrt{2AD^2} - AD = \sqrt{2} - 1.$$

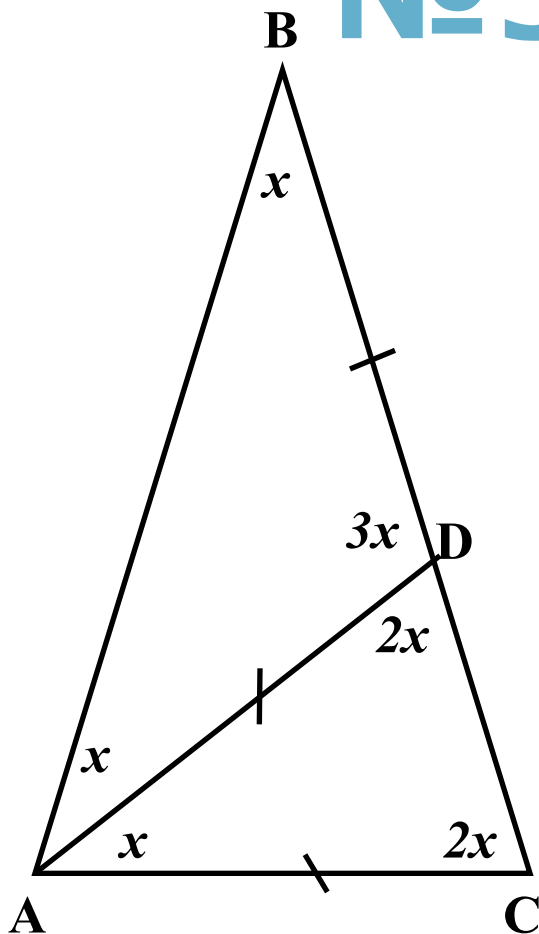
Ответ: $\sqrt{2} - 1$.

ЗАДАНИЕ

Докажите тождество

$$\cos 36^{\circ} - \cos 72^{\circ} = \frac{1}{2}$$

№3:



Доказательство:

Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB=BC$), точку D ($D \in BC$ и $AD=BD=AC$).

Пусть $\angle ABC=x$, тогда $\angle BAD=x$,
 $\angle ADC=2x$, $\angle ACD=2x$ $\angle DAC=x$,

Суммы внутренних углов треугольников ABD , ACD и ABC равны по $5x$, т.е. $x=36^{\circ}$.

Итак, $\angle ABC=36^{\circ}$ и $\angle ADC=72^{\circ}$.

Так как $D \in BC$, то $BC=BD+DC$.

Пусть $BD=1$, тогда $AB=2\cos 36^{\circ}$ и $CD=2\cos 72^{\circ}$.

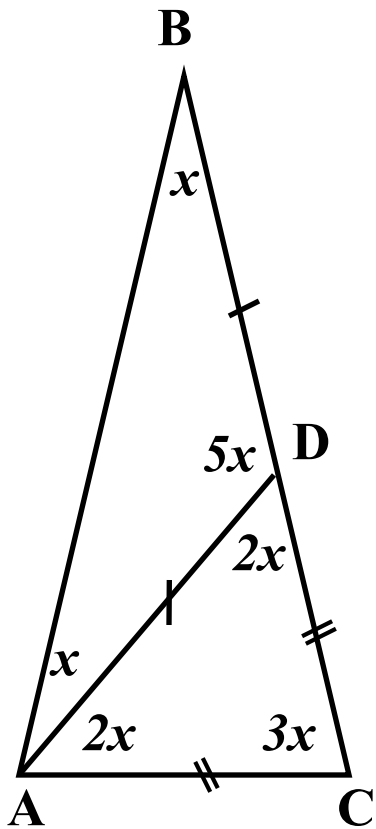
Так как $AB=BC$,
то $2\cos 36^{\circ}=1+2\cos 72^{\circ}$.

Значит, $\cos 36^{\circ} - \cos 72^{\circ} = \frac{1}{2}$.

ЗАДАНИЕ

Докажите тождество

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^{\circ}} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^{\circ}}$$



Доказательство:

1. Так как треугольники ABD , ADC и ABC равнобедренные, то $7x=180^{\circ}$,

т.е. $x = \left(25\frac{5}{7}\right)^{\circ}$.

2. $BC = BD + DC$.

Пусть длина общей высоты, проведенной из вершины A в треугольниках ABD , ADC и ABC , равна 1 ($H \in BC$, $AH \perp BC$, $AH=1$), то:

$$\text{из } \triangle ABH \text{ (} AH \perp BH \text{)} \quad BC = AB = \frac{AH}{\sin \angle ABH} = \frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^0};$$

$$\text{из } \triangle ADH \text{ (} AH \perp DH \text{)} \quad BD = AD = \frac{AH}{\sin \angle ADH} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^0};$$

$$\text{из } \triangle ACH \text{ (} AH \perp CH \text{)} \quad DC = AC = \frac{AH}{\sin \angle ACH} = \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^0};$$

Значит,

$$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^0} = \frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^0} + \frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^0}.$$

ЗАДАНИЕ

№5:

Вычислите $\sin 18^\circ$

Решение:

В задаче 3 были определены величины углов с вершинами в точках A , B , C и D .

$\triangle ABC \sim \triangle CAD$, так как оба они равнобедренные с общим углом при основаниях ($\angle ACB = \angle ACD$).

$$\text{Значит, } \frac{AC}{AB} = \frac{CD}{AC}, \text{ т.е. } AC^2 = AB \cdot CD.$$

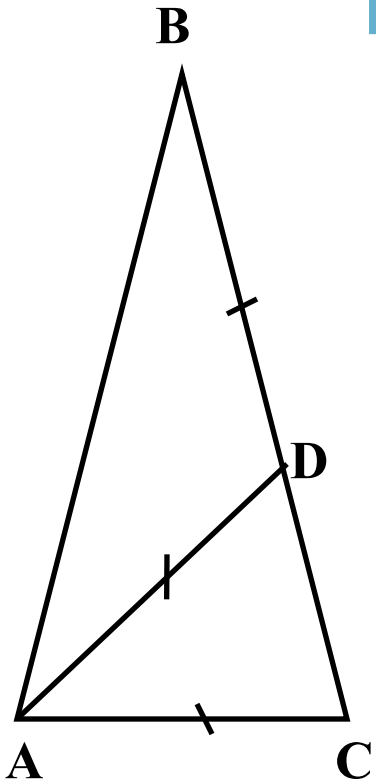
Если $AC = a$ и $AB = b$ ($a < b$, так как $\angle ABC = 36^\circ$ и $\angle ACB = 72^\circ$), то $CD = b - a$ и $a^2 = b^2 - ab$.

$$\text{Отсюда } \frac{a}{b} = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}.$$

Это число называют золотым сечением или числом Фидия (Фидий – отец Архимеда).

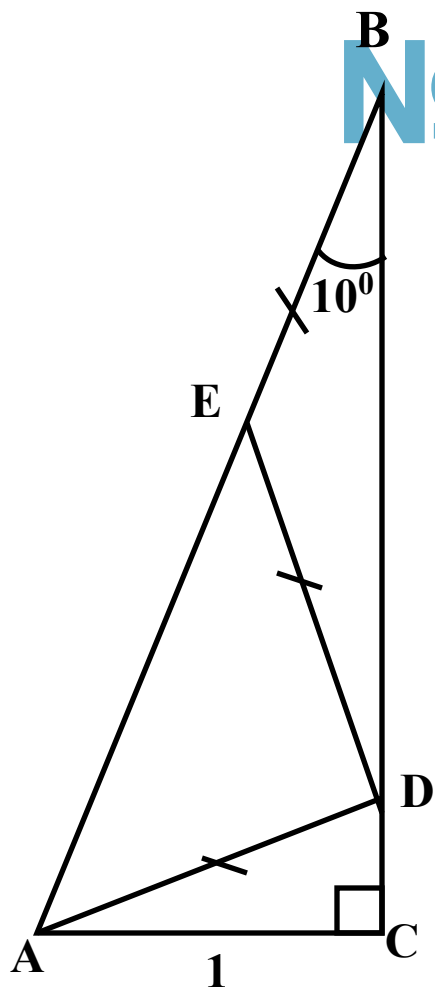
$$\text{Так как } \sin 18^\circ = \cos 72^\circ, \text{ а } \cos 72^\circ = \frac{\frac{1}{2}CD}{AC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{AC}{AB} = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b},$$
$$\text{то } \sin 18^\circ = \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$

$$\text{Ответ: } \frac{\sqrt{5} - 1}{4}$$



ЗАДАНИЕ

№6:



Вычислите
 $\operatorname{ctg} 10^\circ - 4 \cos 10^\circ$.

Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник $\triangle ABC$, в котором $\angle ABC = 10^\circ$, $\angle ACB = 90^\circ$, $D \in BC$, $E \in AB$ и $AD = DE = BE$.

Пусть $AC = 1$.

Определив величины углов, замечаем:

$$BC = \operatorname{ctg} 10^\circ, \quad BD = 4 \cos 10^\circ, \quad CD = \operatorname{tg} 60^\circ.$$

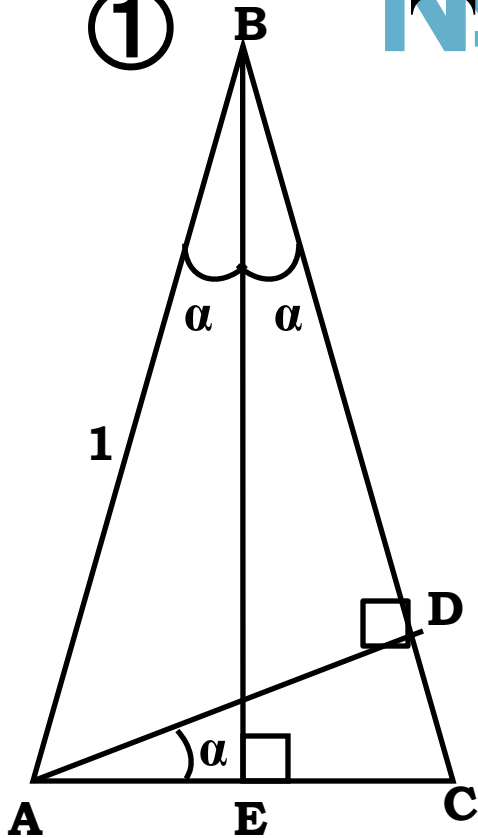
Так как $BC = BD + DC$, то
 $\operatorname{ctg} 10^\circ = 4 \cos 10^\circ + \operatorname{tg} 60^\circ$.

Ответ: $\sqrt{3}$.

ЗАДАНИЕ

Докажите, что $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$

①



Доказательство:

Рассмотрим равнобедренный треугольник $\triangle ABC$ ($AB=BC=1$), $\angle ABC=2\alpha$, AD и BE – высоты.

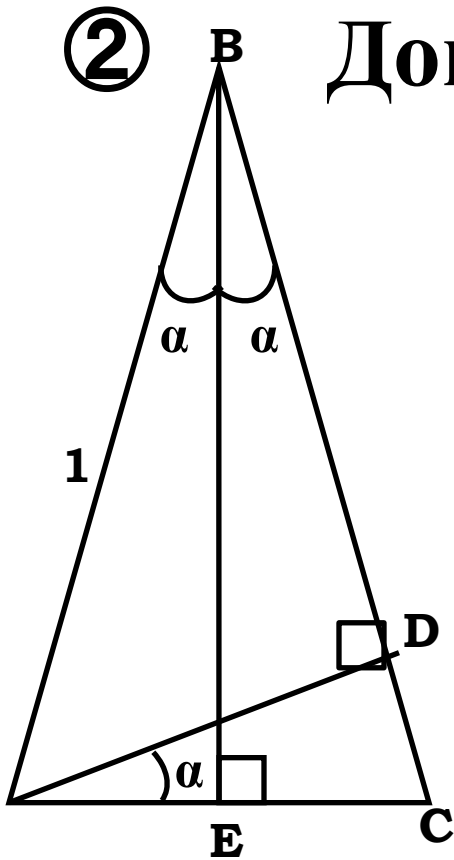
По рисунку $AD=\sin 2\alpha$, $AE=EC=\sin \alpha$, $BE=\cos \alpha$.

Так как $\triangle ABE \sim \triangle CAD$, то $\frac{AB}{AC} = \frac{BE}{AD}$,

$$\text{т.е. } \frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{\cos \alpha}{\sin 2\alpha}.$$

Значит, $\sin 2\alpha = 2 \sin \alpha \cos \alpha$.

② Докажите, что $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$



Доказательство:

$$AE = EC = \sin \alpha, \quad BD = \cos 2\alpha, \quad CD = 1 - \cos 2\alpha$$

$$\triangle ABE \sim \triangle CAD$$

$$\text{Тогда, } \frac{AB}{AC} = \frac{AE}{CD}, \text{ т.е. } \frac{1}{2 \sin \alpha} = \frac{\sin \alpha}{1 - \cos 2\alpha}$$

Значит, $1 - \cos 2\alpha = 2 \sin^2 \alpha$

ЗАДАНИЕ

№8:

Докажите, что

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$$

Доказательство:

Рассмотрим $\triangle ABC$, в котором $BD \perp AC$, $\angle ABD = \alpha$, $\angle CBD = \beta$. Точка D – внутренняя точка отрезка AC , так как по условию α и β – острые углы. Пусть $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ и $BD = h$.

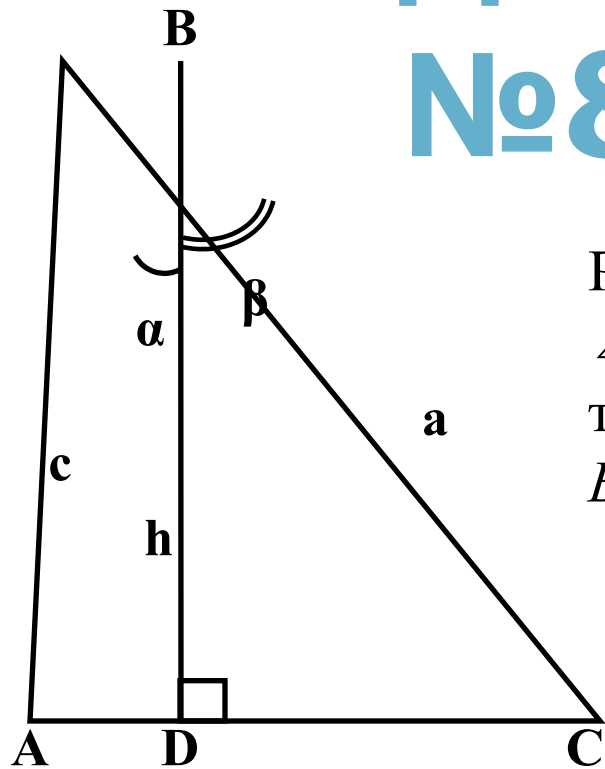
$$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} ac \sin(\alpha + \beta),$$

$$S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD}.$$

$$S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} ch \sin \alpha = \frac{1}{2} c \sin \alpha \cdot a \cos \beta = \frac{1}{2} ac \sin \alpha \cos \beta.$$

$$S_{\triangle CBD} = \frac{1}{2} ah \sin \beta = \frac{1}{2} a \sin \beta \cdot c \cos \alpha = \frac{1}{2} ac \cos \alpha \sin \beta.$$

Значит, $\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta$.



ЗАДАНИЕ

1 №9:

Каким должен быть острый угол x , если

$$\sqrt{15 - 12 \cos x} + \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x} = 4$$

Решение:

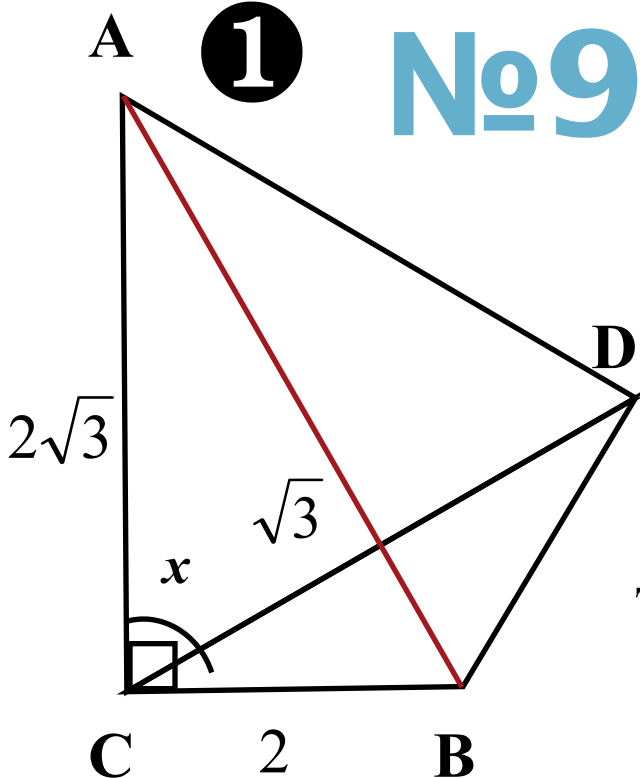
Рассмотрим рисунок **1**

$$AC = 2\sqrt{3}, CD = \sqrt{3}, CB = 2.$$

Тогда $AD = \sqrt{15 - 12 \cos x}$ и $BD = \sqrt{7 - 4\sqrt{3} \sin x}$
по теореме косинусов,

а $AB = 4$ по теореме Пифагора.

Значит, $D \in AB$.



2

Так как $\triangle ABC$ прямоугольный и $\sin \angle A = \frac{1}{2}$, то $\angle A = 30^\circ$.

По теореме косинусов из $\triangle ACD$ следует, что

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD \cos 30^\circ,$$

$$\text{т.е. } 3 = 12 + y^2 - 6y,$$

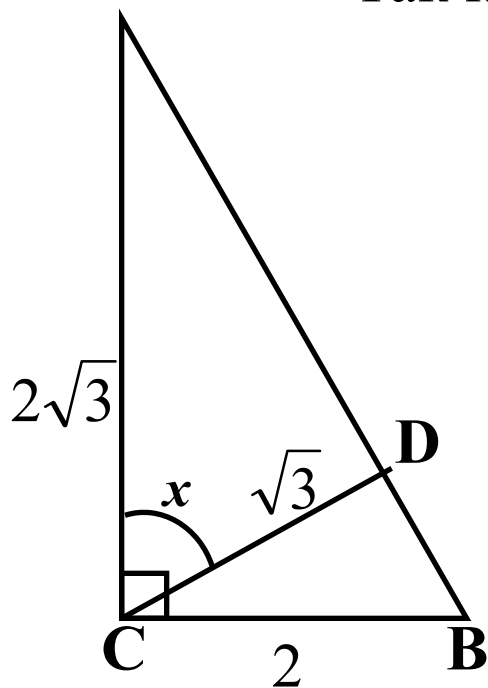
где буквой y обозначена длина стороны AD .

$$\text{Имеем } y^2 - 6y + 9 = 0, \quad y = 3.$$

Итак, $AD = 3$. Так как $3^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$,
то в $\triangle ACD$ $\angle ADC = 90^\circ$.

Тогда $x = 60^\circ$.

Ответ: 60° .



ЗАДАНИЕ

Вычислите $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3$.

№10:

Решение:

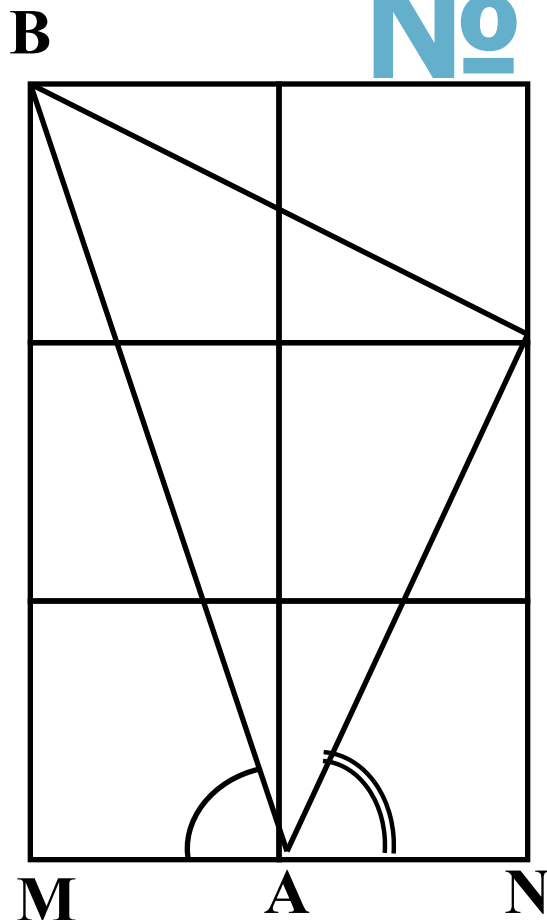
$$\operatorname{arctg} 3 = \angle BAM,$$

$$\operatorname{arctg} 2 = \angle CAN,$$

$$\operatorname{arctg} 1 = \angle BAC$$

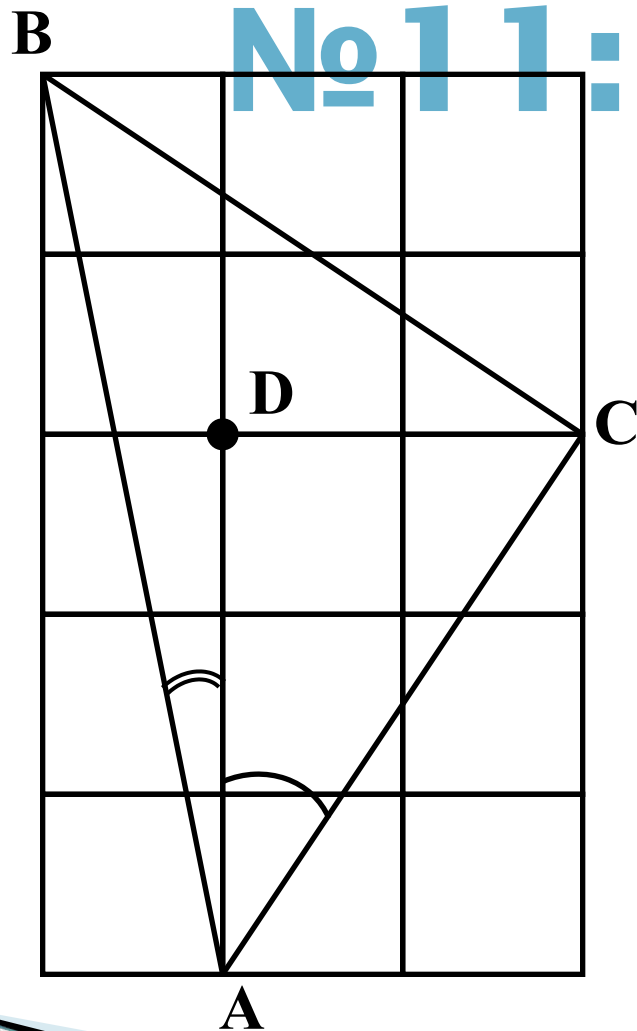
($\angle BAC$ – острый угол
прямоугольного равнобедренного
треугольника ABC).

Итак, $\operatorname{arctg} 1 + \operatorname{arctg} 2 + \operatorname{arctg} 3 = \pi$.



ЗАДАНИЕ

№ 11:



Вычислите
 $\arctg \frac{2}{3} + \text{arcctg } 5$.

Решение:

$$\arctg \frac{2}{3} = \angle CAD,$$

$$\text{arcctg } 5 = \angle BAD,$$

$$\angle BAC = 45^\circ.$$

$$\arctg \frac{2}{3} + \text{arcctg } 5 = \frac{\pi}{4}$$

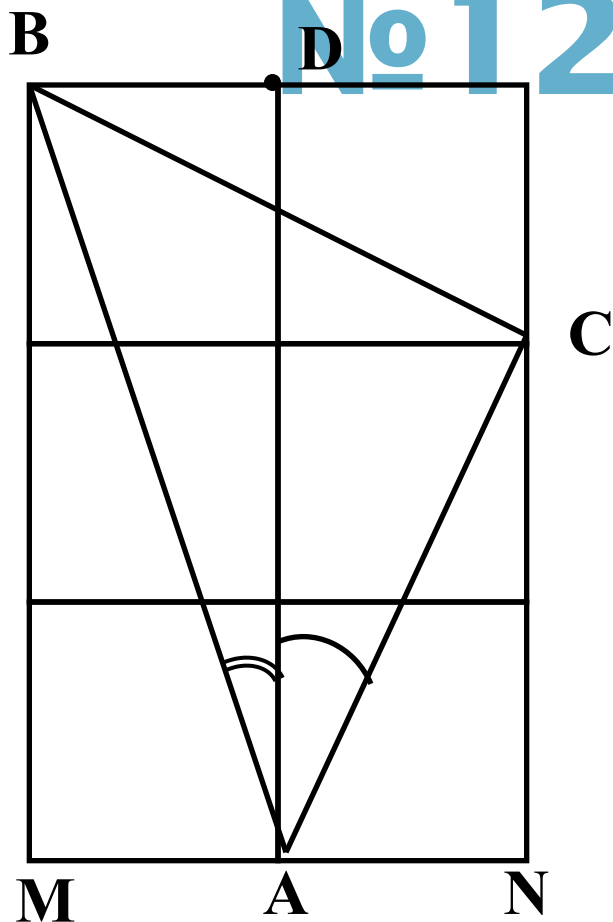
Ответ: $\frac{\pi}{4}$.

ЗАДАНИЕ

№12:

Вычислите

$$\cos(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 0,5).$$



Решение:

$$\operatorname{ctg} \angle DAB = 3 \text{ и } \operatorname{tg} \angle DAC = 0,5.$$

$\triangle ABC$ – равнобедренный,
 $\angle ABC = 90^\circ$.

$$\text{Значит, } \operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 0,5 = \frac{\pi}{4},$$

$$\cos(\operatorname{arctg} 3 + \operatorname{arctg} 0,5) = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{2}}{2}$.

ЗАДАНИЕ

№ 13:

Вычислите

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \right).$$

Решение:

Так как $\frac{2}{\sqrt{5}} > 0$, то можно считать, что $\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}}$

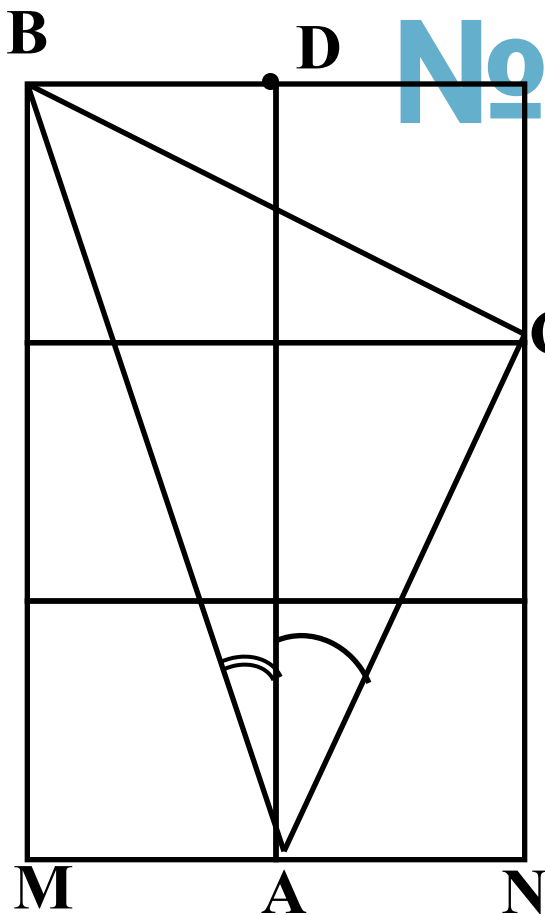
- это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов равно 1 : 2. Тогда величину этого угла можно рассматривать как $\operatorname{arctg} 2$. Аналогично рассуждая, получим

$$\arccos \frac{1}{\sqrt{10}} = \operatorname{arctg} 3.$$

Далее, по рисунку $\angle MAB = \operatorname{arctg} 3$ и $\angle NAC = \operatorname{arctg} 2$, а их сумма равна $\pi - \frac{\pi}{4}$.

Итак,

$$\operatorname{tg} \left(\arcsin \frac{2}{\sqrt{5}} + \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \right) = \operatorname{tg} \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = -1.$$



«Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение – ограниченным; когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству».

Ж.Л. Лагранж