ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ

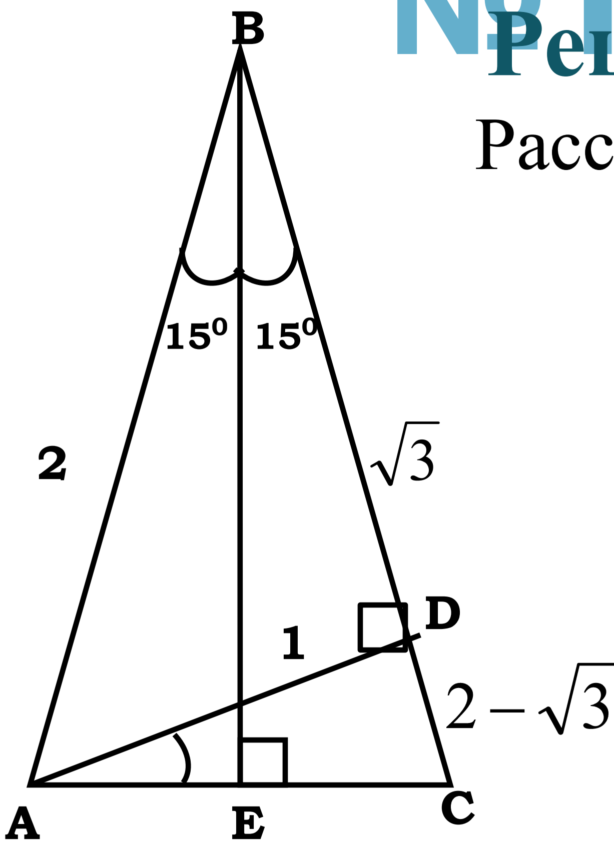
Шишкина Елена Павловна,
учитель математики МБОУ г Мурманска гимназии №2

«АРИФМЕТИЧЕСКИЕ ЗНАКИ – ЭТО ЗАПИСАННЫЕ ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ, А ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ФИГУРЫ – ЭТО НАРИСОВАННЫЕ ФОРМУЛЫ.»

Д. ГИЛБЕРТ

ЗАДАНИЕ №1:

Вычислите $tg15^0.$



Решение:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ΔABC ($AB=BC$), $\angle ABC=30^0$.

AD и BE – высоты.

$\angle CAD=15^0$ $tg15^0 = \dfrac{CD}{AD}.$

Пусть $AD=1$, тогда $AB=2$ и $BD=\sqrt{3}.$

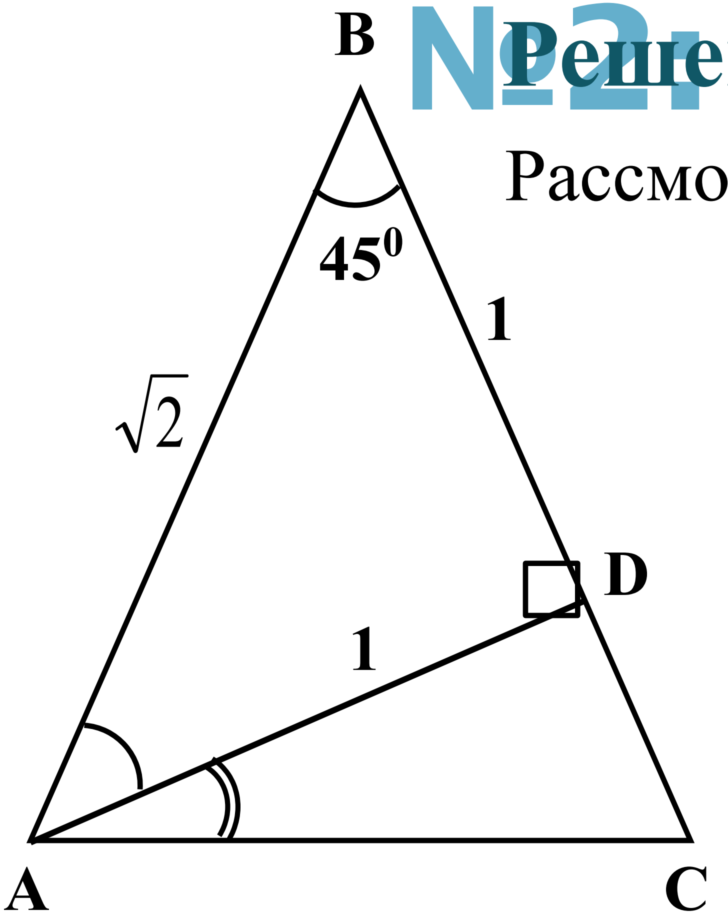
Значит, $CD=2-\sqrt{3}.$

Ответ: $2-\sqrt{3}.$

ЗАДАНИЕ №2:

Вычислите $tg\,22^0 30'$.

Решение:



Рассмотрим равнобедренный треугольник ΔABC $(AB=BC)$, $\angle ABC=45^0$.

Так как $\angle BCA=67^0 30'$, то $\angle CAD=22^0 30'$.

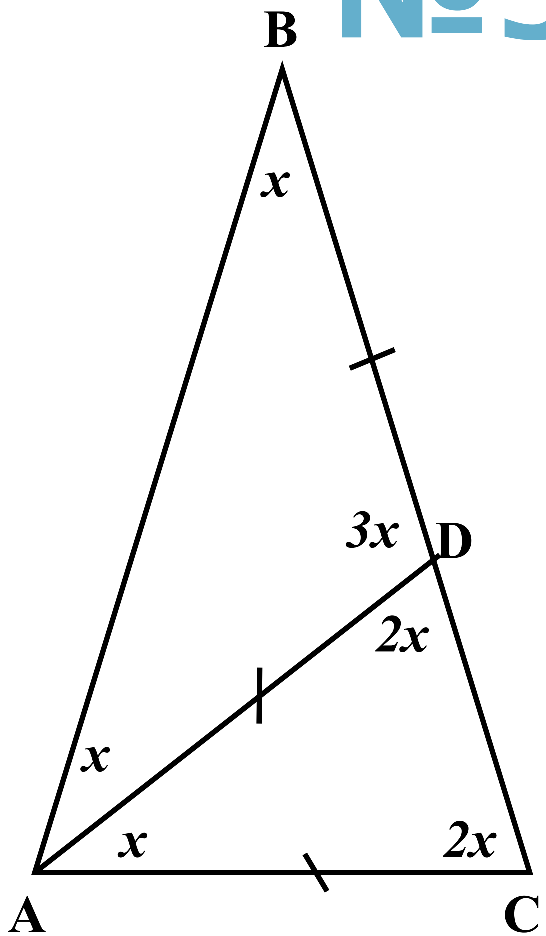
Пусть $AD=1$, $tg\,22^0 30' = \dfrac{CD}{AD}$,

$$CD = BC - BD = AB - AD = \sqrt{2AD^2} - AD = \sqrt{2} - 1.$$

Ответ: $\sqrt{2} - 1.$

ЗАДАНИЕ №3:

Докажите тождество $\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{1}{2}$



Доказательство:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ΔABC ($AB=BC$), точку D ($D \in BC$ и $AD=BD=AC$).

Пусть $\angle ABC=x$, тогда $\angle BAD=x$, $\angle ADC=2x$, $\angle ACD=2x$ $\angle DAC=x$, $\angle ADB=3x$.

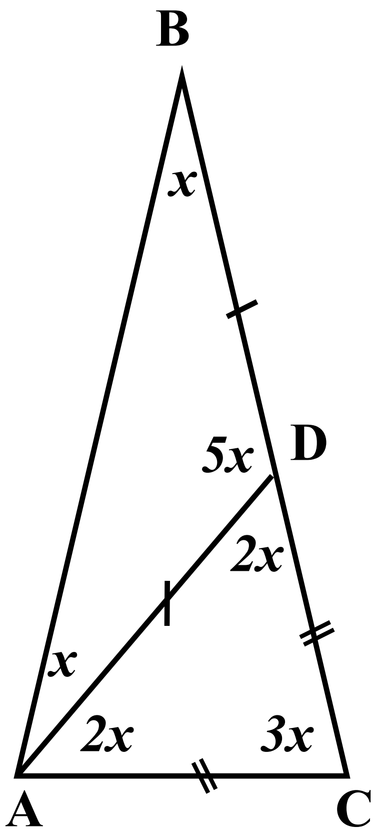
Суммы внутренних углов треугольников ABD, ACD и ABC равны по $5x$, т.е. $x=36^0$.

Итак, $\angle ABC=36^0$ и $\angle ADC=72^0$.
Так как $D \in BC$, то $BC=BD+DC$.
Пусть $BD=1$, тогда $AB=2\cos 36^0$ и $CD=2\cos 72^0$.
Так как $AB=BC$,
то $2\cos 36^0=1+2\cos 72^0$.

Значит, $\cos 36^0 - \cos 72^0 = \frac{1}{2}.$

ЗАДАНИЕ №4:

Докажите тождество $$\frac{1}{\sin\left(25\frac{5}{7}\right)^0}=\frac{1}{\sin\left(51\frac{3}{7}\right)^0}+\frac{1}{\sin\left(77\frac{1}{7}\right)^0}$$



Доказательство:

1. Так как треугольники ABD, ADC и ABC равнобедренные, то $7x=180^0$,

   т.е. $x=\left(25\frac{5}{7}\right)^0$.

2. $BC = BD + DC$.

Пусть длина общей высоты, проведенной из вершины A в треугольниках ABD, ADC и ABC, равна 1 ($H \in BC$, $AH \perp BC$, $AH=1$), то:

из ΔABH $(AH \perp BH)$ $BC = AB = \dfrac{AH}{\sin \angle ABH} = \dfrac{1}{\sin\left(25\dfrac{5}{7}\right)^0}$;

из ΔADH $(AH \perp DH)$ $BD = AD = \dfrac{AH}{\sin \angle ADH} = \dfrac{1}{\sin\left(51\dfrac{3}{7}\right)^0}$;

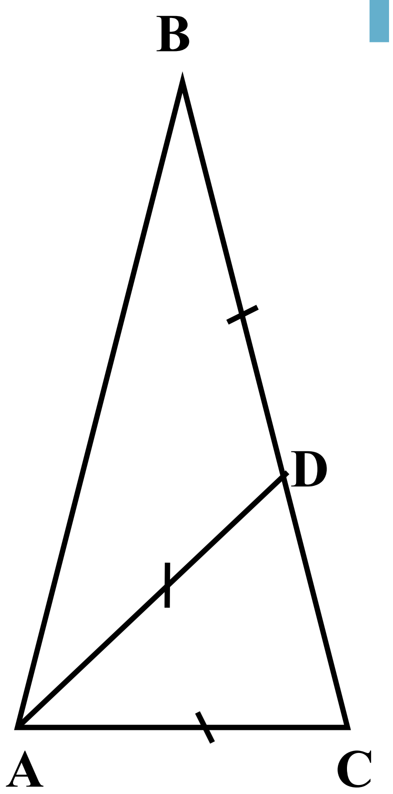
из ΔACH $(AH \perp CH)$ $DC = AC = \dfrac{AH}{\sin \angle ACH} = \dfrac{1}{\sin\left(77\dfrac{1}{7}\right)^0}$;

Значит, $$\frac{1}{\sin\left(25\dfrac{5}{7}\right)^0} = \frac{1}{\sin\left(51\dfrac{3}{7}\right)^0} + \frac{1}{\sin\left(77\dfrac{1}{7}\right)^0}.$$

ЗАДАНИЕ №5:

Вычислите $\sin 18°$

Решение:



В задаче 3 были определены величины углов с вершинами в точках *A*, *B*, *C* и *D*.

$\Delta ABC \sim \Delta CAD$, так как оба они равнобедренные с общим углом при основаниях ($\angle ACB = \angle ACD$).

Значит, $\dfrac{AC}{AB} = \dfrac{CD}{AC}$, т.е. $AC^2 = AB \cdot CD$.

Если $AC=a$ и $AB=b$ ($a<b$, так как $\angle ABC=36^0$ и $\angle ACB=72^0$), то $CD=b-a$ и $a^2=b^2-ab$.

Отсюда $\dfrac{a}{b} = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Это число называют ***золотым сечением*** *или числом Фидия (Фидий – отец Архимеда).*

Так как $\sin 18^0 = \cos 72^0$, а $\cos 72^0 = \dfrac{{}^1\!/_2\, CD}{AC} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{a}{b}$,

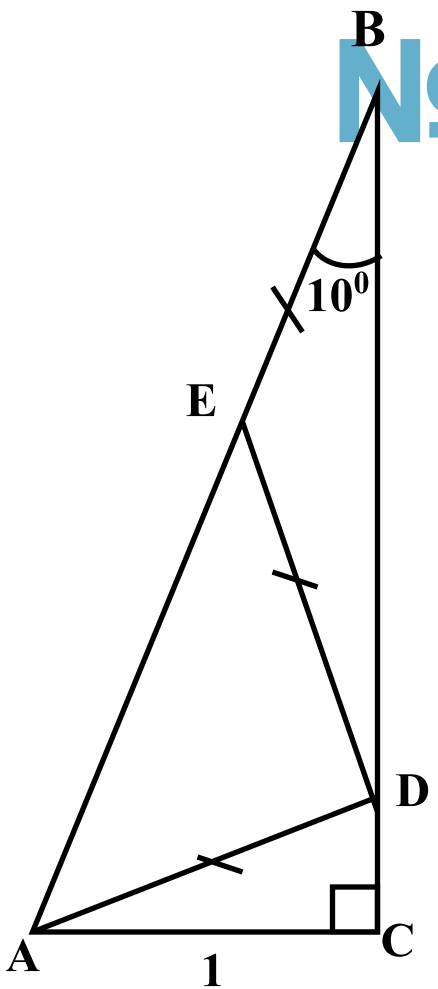
то $\sin 18^0 = \dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{5}-1}{4}$

ЗАДАНИЕ №6:

Вычислите

$$\operatorname{ctg}10^\circ - 4\cos 10^\circ.$$



Решение:

Рассмотрим прямоугольный треугольник ΔABC, в котором $\angle ABC=10^0$, $\angle ACB=90^0$, $D\in BC$, $E\in AB$ и $AD=DE=BE$.

Пусть $AC=1$.

Определив величины углов, замечаем:

$BC=\operatorname{ctg}10^0$, $BD=4\cos10^0$, $CD=\operatorname{tg}60^0$.

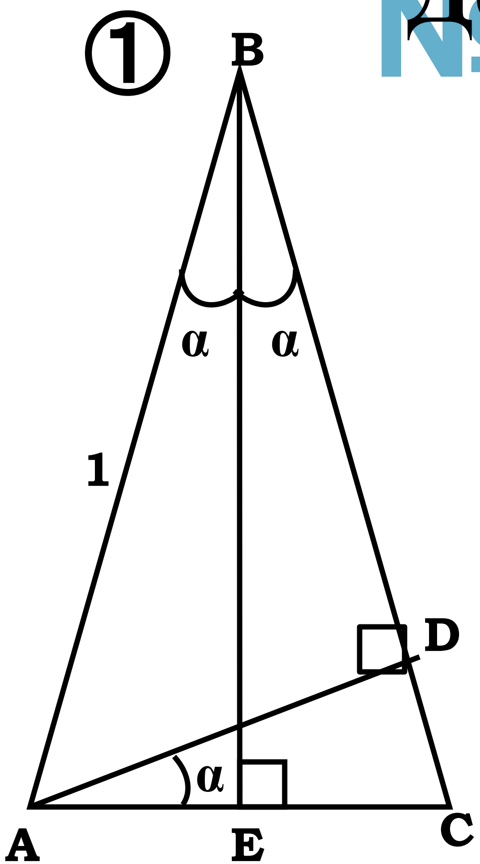
Так как $BC=BD+DC$, то

$\operatorname{ctg}10^0=4\cos10^0+\operatorname{tg}60^0$.

Ответ: $\sqrt{3}.$

ЗАДАНИЕ №7:

Докажите, что $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$



Доказательство:

Рассмотрим равнобедренный треугольник ΔABC ($AB = BC = 1$), $\angle ABC = 2\alpha$, AD и BE – высоты.

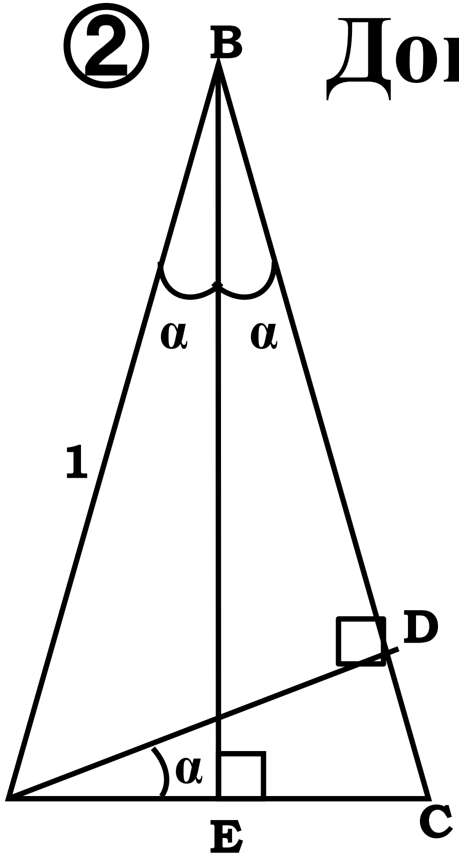
По рисунку $AD = \sin 2\alpha$, $AE = EC = \sin\alpha$, $BE = \cos\alpha$.

Так как $\Delta ABE \sim \Delta CAD$, то $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{BE}{AD}$,

т.е. $\dfrac{1}{2\sin\alpha} = \dfrac{\cos\alpha}{\sin 2\alpha}$.

Значит, $\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$.

② Докажите, что $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$



Доказательство:

$AE = EC = \sin\alpha$, $BD = \cos 2\alpha$, $CD = 1 - \cos 2\alpha$

$$\Delta ABE \sim \Delta CAD$$

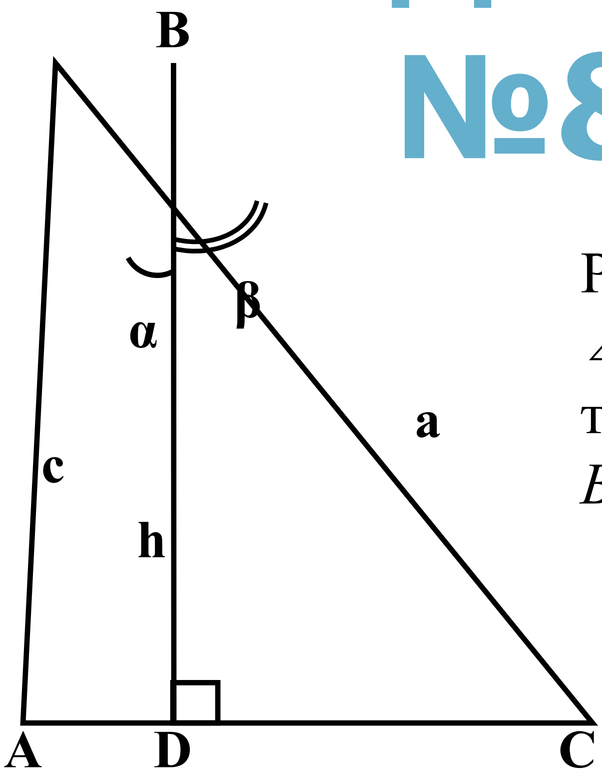
Тогда, $\dfrac{AB}{AC} = \dfrac{AE}{CD}$, *т.е.* $\dfrac{1}{2\sin\alpha} = \dfrac{\sin\alpha}{1 - \cos 2\alpha}$

Значит, $1 - \cos 2\alpha = 2\sin^2\alpha$

ЗАДАНИЕ №8:

Докажите, что

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$



Доказательство:

Рассмотрим ΔABC, в котором $BD \perp AC$, $\angle ABD=\alpha$, $\angle CBD=\beta$. Точка D – внутренняя точка отрезка AC, так как по условию α и β – острые углы. Пусть $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$ и $BD=h$.

$$S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}ac\sin(\alpha+\beta),$$

$$S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta CBD}.$$

$$S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}ch\sin\alpha = \frac{1}{2}c\sin\alpha \cdot a\cos\beta = \frac{1}{2}ac\sin\alpha\cos\beta.$$

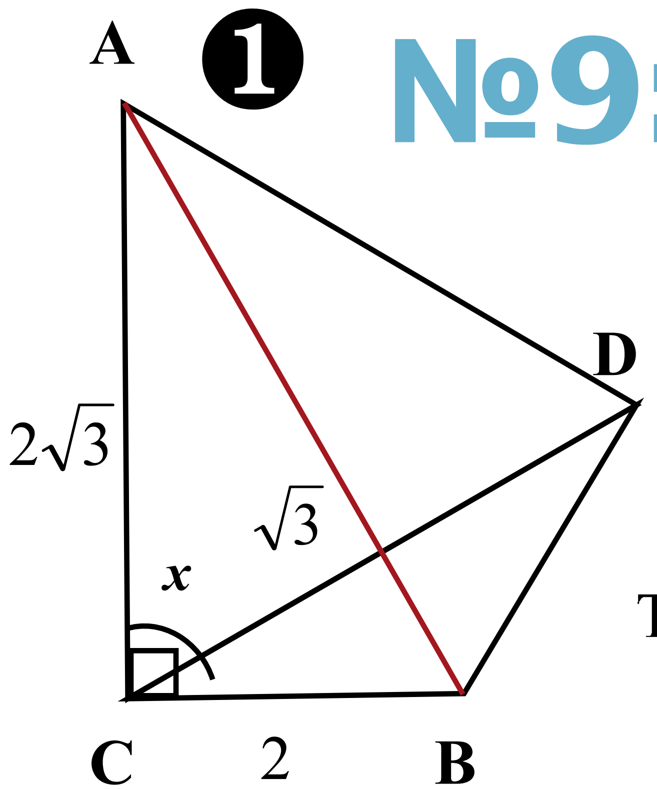
$$S_{\Delta CBD} = \frac{1}{2}ah\sin\beta = \frac{1}{2}a\sin\beta \cdot c\cos\alpha = \frac{1}{2}ac\cos\alpha\sin\beta.$$

Значит, $\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta.$

ЗАДАНИЕ №9:

Каким должен быть острый угол *x*, если

$$\sqrt{15-12\cos x}+\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}=4$$



Решение:

Рассмотрим рисунок ❶

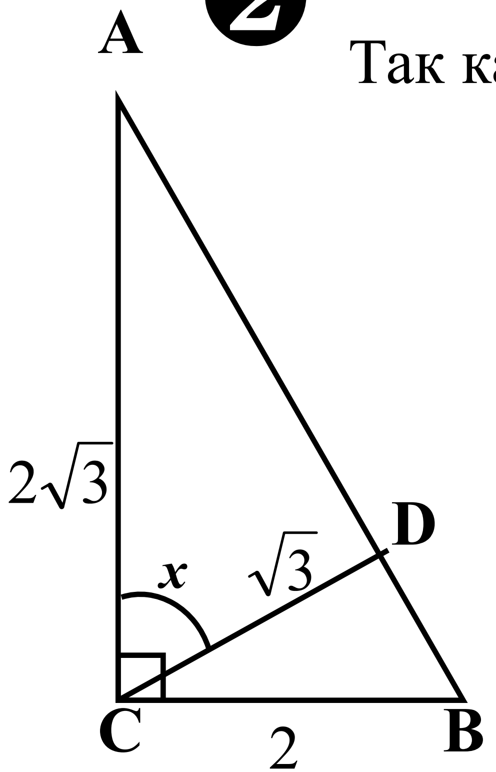
$$AC=2\sqrt{3},CD=\sqrt{3},CB=2.$$

Тогда $AD=\sqrt{15-12\cos x}$ и $BD=\sqrt{7-4\sqrt{3}\sin x}$

по теореме косинусов,

а AB=4 по теореме Пифагора.

Значит, D$\in$AB.



❷

Так как ΔABC прямоугольный и $\sin\angle A = \frac{1}{2}$, то $\angle A = 30°$.

По теореме косинусов из ΔACD следует, что

$$CD^2 = AC^2 + AD^2 - 2AC \cdot AD\cos 30°,$$

т.е. $3 = 12 + y^2 - 6y$,

где буквой y обозначена длина стороны AD.

Имеем $y^2 - 6y + 9 = 0,\ \ y = 3.$

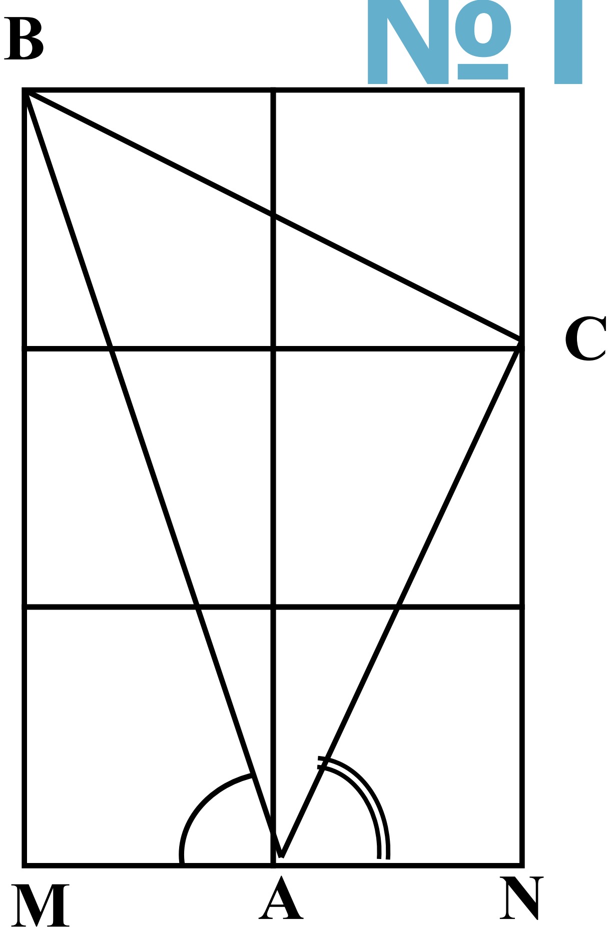
Итак, $AD = 3$. Так как $3^2 + (\sqrt{3})^2 = (2\sqrt{3})^2$,
то в $\Delta\, ACD\ \ \angle ADC = 90^0$.

Тогда $x = 60^0$.

Ответ: 60^0.

ЗАДАНИЕ №10:

Вычислите arctg 1 + arctg 2 + arctg 3.



Решение:

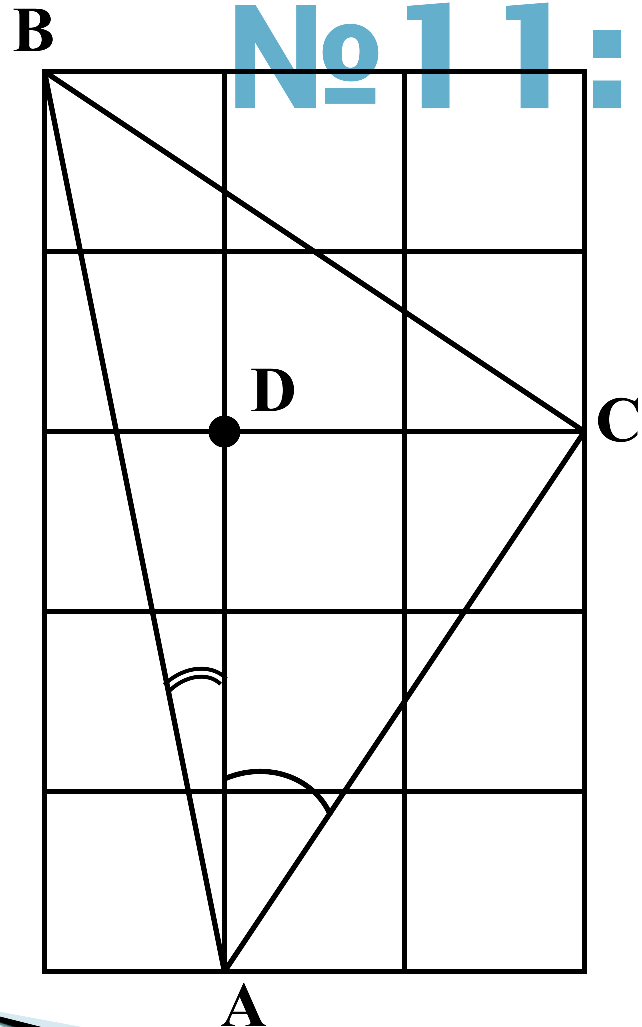
arctg 3 = $\angle BAM$,
arctg 2 = $\angle CAN$,
arctg 1 = $\angle BAC$
($\angle BAC$ – острый угол прямоугольного равнобедренного треугольника ABC).

Итак, arctg 1 + arctg 2 + arctg 3 = π.

ЗАДАНИЕ №11:

Вычислите

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arcctg}5.$$



Решение:

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{3}=\angle CAD,$$

$$\operatorname{arcctg}5=\angle \mathrm{BAD},$$

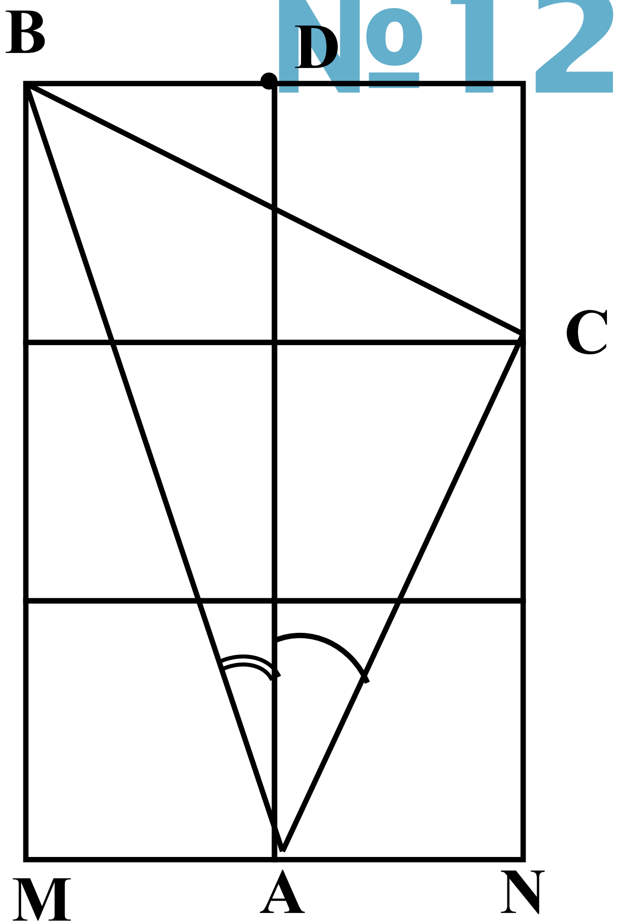
$$\angle \mathrm{BAC}=45^\circ.$$

$$\operatorname{arctg}\frac{2}{3}+\operatorname{arcctg}5=\frac{\pi}{4}$$

Ответ: $\frac{\pi}{4}.$

ЗАДАНИЕ №12:

Вычислите $\cos(\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5)$.



Решение:

$\operatorname{ctg} \angle DAB = 3$ и $\operatorname{tg} \angle DAC = 0{,}5$.

ΔABC – равнобедренный,

$\angle ABC = 90^0$.

Значит, $\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5 = \dfrac{\pi}{4}$,

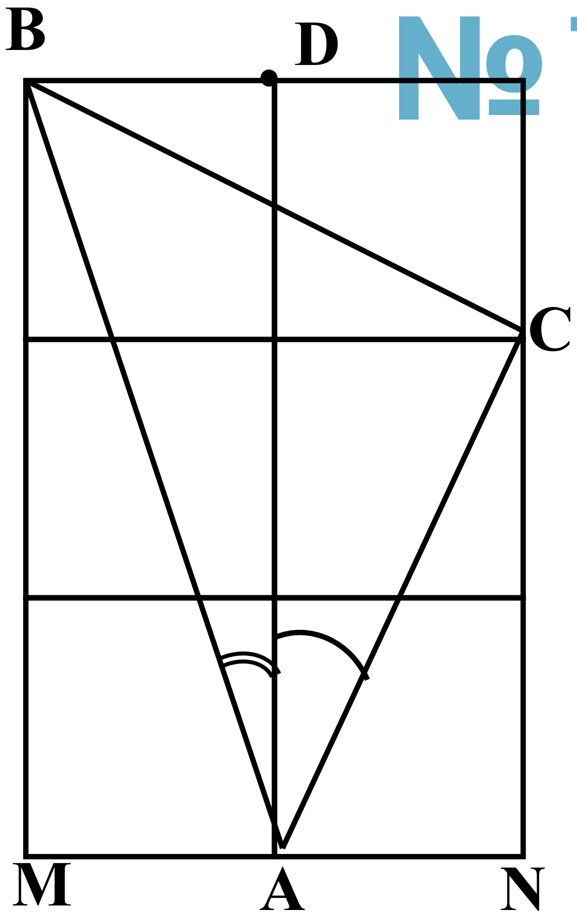
$$\cos(\operatorname{arcctg} 3 + \operatorname{arctg} 0{,}5) = \frac{\sqrt{2}}{2.}$$

Ответ: $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

ЗАДАНИЕ №13:

Вычислите

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right).$$



Решение:

Так как $\frac{2}{\sqrt{5}} \rangle 0$, то можно считать, что $\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}$ - это угол прямоугольного треугольника, у которого отношение катетов равно 1 : 2. Тогда величину этого угла можно рассматривать как arctg 2. Аналогично рассуждая, получим

$$\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}=\operatorname{arctg}3.$$

Далее, по рисунку $\angle$MAB=arctg3 и $\angle$NAC=arctg 2, а их сумма равна $\pi-\frac{\pi}{4}$.

Итак,

$$\operatorname{tg}\left(\arcsin\frac{2}{\sqrt{5}}+\arccos\frac{1}{\sqrt{10}}\right)=\operatorname{tg}\left(\pi-\frac{\pi}{4}\right)=-1.$$

«Пока алгебра и геометрия развивались врозь, их прогресс был медленным, применение – ограниченным; когда же эти две науки были соединены, они стали помогать друг другу и быстро шагать к совершенству».

Ж.Л. Лагранж