Теория вероятностей

9.1. Событие и вероятность: основные понятия, определение вероятности

9.1.1. Понятие о случайном событии

Опыт, эксперимент, наблюдение явления называются *испытанием*. Испытаниями, например, являются: бросание монеты, выстрел из винтовки, бросание игральной кости (кубика с нанесенным на каждую грань числом очков — от одного до шести).

Результат (исход) испытания называется *событием*. Событиями являются: выпадение герба или выпадение цифры, попадание в цель или промах, появление того или иного числа очков на брошенной игральной кости.

Для обозначения событий используются большие буквы латинского алфавита: A, B, C и т. д.

Ответ на вопрос, считать ли данное событие случайным, зависит от имеющейся информации. Например, появление поезда на станции в промежутке времени от 18.00 до 18.10 — событие случайное с точки зрения пассажира, не знающего расписания, и неслучайное для пассажира, знающего расписание. В опыте с бросанием монеты, если знать с достаточной точностью массу, начальные координаты и скорость монеты, можно (в принципе) рассчитать ее траекторию и, следовательно, предсказать, которой из двух сторон она упадет на стол.

Виды событий		
Достоверные	Случайные	Невозможные

О п р е д е л е н и е. Два события называются *совместимыми*, если появление одного из них не исключает появления другого в одном и том же испытании.

П р и м е р . Испытание: однократное бросание игральной кости. Событие A — появление трех очков, событие B — появление нечетного числа очков. События A и B совместимые.

О п р е д е л е н и е . Два события называются *несовместимыми*, если появление одного из них исключает появление другого в одном и том же испытании.

П р и м е р . Испытание: однократное бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события несовместимы, так как появление одного из них исключает появление другого.

Или, например, при одном бросании кости появление не менее трех очков и при этом появление четной грани — события совместные, а появление цифры 3 и при этом появление четной грани — события несовместные.

О п р е д е л е н и е . Два события A и B называются *противоположными*, если в данном испытании они несовместимы и одно из них обязательно происходит.

Событие, противоположное событию A, обозначают через $\neg A$.

П р и м е р . Испытание: бросание монеты. Событие A — выпадение герба, событие B — выпадение цифры. Эти события противоположны, так как исходами бросания могут быть лишь они и появление одного из них исключает появление другого, т. е. $A=\neg B$ или $\neg A=B$.

О п р е д е л е н и е . Событие называется *достоверным*, если в данном испытании оно является единственно возможным его исходом, и *невозможным*, если в данном испытании оно заведомо не может произойти.

П р и м е р . Испытание: извлечение шара из урны, в которой все шары белые. Событие A — вынут белый шар — достоверное событие; событие B — вынут черный шар — невозможное событие.

Следует отметить, что достоверное и невозможное события в данном испытании являются противоположными.

Достоверное событие не может не произойти (например, выпадение не менее одного очка при бросании кости); невозможное событие не может произойти (например, выпадение семи очков).

О п р е д е л е н и е . Событие A называется *случайным*, если оно объективно может наступить или не наступить в данном испытании.

П р и м е р . Событие A_4 — выпадение четырех очков при бросании игральной кости — случайное. Оно может наступить, но оно может и не наступить в данном испытании.

9.1.2. Определение вероятности

С понятием вероятности случайных событий мы встречаемся в своей повседневной деятельности, когда оцениваем шансы появления такого рода событий.

Вероятность события A — число $P(A)$, характеризующее возможность появления этого события. По определению, $\mathbf{0 \le P(A) \le 1}$. Вероятность невозможного события равна нулю, вероятность достоверного события равна единице. Иногда вероятность выражают в процентах.

В некоторых простейших ситуациях вероятность случайного события можно указать сразу: при бросании (симметричной!) монеты естественно считать оба возможных исхода (герб или цифра) имеющими равную вероятность, т. е. 0,5, или 50 %. При бросании игральной кости появление любой цифры от 1 до 6 — равновероятные события, с вероятностью 1/6 каждое.

Вообще, если данный опыт может иметь n исходов и нет оснований считать появление какого-либо исхода более вероятным, чем другие, полагают вероятность каждого исхода равной $1/n$. Если событие A происходит в результате одного из m равновероятных исходов, то Đ(À)= ´m/n.

Например, появление нечетной грани при бросании кости (событие A) происходит при выпадении 1, или 3, или 5, т.е. здесь $m = 3$, поэтому Đ(À)= 3/6 = 1/2. Рассчитанную таким образом вероятность называют *априорной.* В более сложных ситуациях расчет вероятностей каких-либо случайных событий может производиться на основании предположений о законах, управляющих деталями соответствующих процессов.

Определения вероятности		
$\Downarrow$	$\Downarrow$	$\Downarrow$
Классическое	Статистическое	Геометрическое
$P(A)=\dfrac{M}{N}$	$P(A)=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{m}{n}$	$P(A)=\dfrac{\text{мера } A}{\text{мера } \Omega}$

П р и м е р . Из колоды карт наудачу выбирают одну карту. Найти вероятность того, что это карта пиковой масти.

Считая, что в колоде 36 карт, м ы имеем общее число исходов n=36. Всего карт пиковой масти 9, поэтому $m = 9$.

Итак, $P(A) = m/n = 9/36 = 1/4$.

Наряду с классическим определением, используется так называемое статистическое определение вероятности. Отношение $p = m/n$ числа m появлений события A при n испытаниях называется *частотой* этого события. С ростом n частота события в определенном смысле приближается к вероятности P этого события. Пусть производятся независимые испытания, при каждом из которых вероятность события A неизменна. Справедливо утверждение, называемое *законом больших чисел* или *теоремой Бернулли*. Оно означает, что если число испытаний достаточно велико, то с вероятностью, сколь угодно близкой к единице, отличие частоты события A от его вероятности меньше любого наперед заданной положительного числа. Так, много раз бросая монету, мы «почти наверняка» будем получать примерно равные частоты выпадений герба и цифры.

Увеличение неопределённости события | *Увеличение определённости события*

$$P = 0 \quad \longleftarrow \quad P = 0{,}5 \quad \longrightarrow \quad P = 1$$

Невозможность | Определённость

9.1.3. Алгебра событий

О п р е д е л е н и е . *Суммой* событий A и B называется событие $C = A + B$, состоящее в наступлении по крайней мере одного из событий A или B. Аналогично определяется сумма большего числа событий. Например, появление четной грани кости есть сумма трех событий: выпадения 2, или 4, или 6.

Теорема с л о ж е н и я вероятностей

Для <u>несовместных</u> событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B)$$

Для <u>совместных</u> событий

$$P(A \text{ или } B) = P(A) + P(B) - P(AB)$$

П р и м е р . Испытание: стрельба двух стрелков (каждый делает по выстрелу). Событие A — попадание в мишень первым стрелком, событие B — попадание в мишень вторым стрелком. Суммой событий A и B будет событие $C = A + B$, состоящее в попадании в мишень по крайней мере одним стрелком.

О п р е д е л е н и е . *Произведением* событий A и B называется событие $C = AB$, состоящее в том, что в результате испытания произошли и событие A, и событие B.

Аналогично произведением конечного числа событий $A_1, A_2, \ldots, A_k$ называется событие $A = A_1 A_2 \ldots A_k$, состоящее в том, что в результате испытания произошли все указанные события.

Теорема у м н о ж е н и я вероятностей

Для <u>независимых</u> событий

$$P(A \text{ и } B) = P(AB) = P(A) \times P(B)$$

Для <u>зависимых</u> событий

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = P(B) \times P_B(A)$$

В условиях предыдущего примера произведением событий A и B будет событие $C = AB$, состоящее в попадании в мишень двух стрелков.

Произведение несовместных событий — событие невозможное. Сумма и произведение событий аналогичны соответственно объединению и пересечению множеств (см. гл. 2). Вероятность суммы $A + B$ несовместных событий A и B равна сумме вероятностей событий A и B:

$$P(A + B) = P(A) + P(B).$$

В общем случае

$$P(A + B) = P(A) + P(B) - P(AB).$$

П р и м е р . Два стрелка стреляют в одну и ту же цель, причем вероятность поражения цели первым стрелком 0,8, а вторым стрелком 0,5. Оба стрелка стреляют по команде (т.е. одновременно) один раз. Какова вероятность, что цель будет поражена хотя бы одним из стрелков?

Пусть A — попадание в цель первым стрелком, B — вторым стрелком, $A + B$ — поражение цели хотя бы одним стрелком, AB — поражение цели обоими стрелками. По формуле имеем

$$P(A + B) = 0{,}8 + 0{,}5 - P(AB).$$

В данном примере можно считать события A и B независимыми, поэтому

$\text{Đ}(\text{À}B) = P(A)\times P(B) = 0{,}8\times 0{,}5 = 0{,}4.$ Тогда $\text{Đ}(\text{À} + B) = 0{,}9.$

Условная вероятность — вероятность появления события A при условии, что произошло событие B, обозначается $\text{Đ}_B(\text{À})$. Вероятность произведения событий вычисляется с помощью условных вероятностей по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A)\times P_A(B) = P(B)\times P_B(A).$$

П р и м е р . В ящике имеются 7 белых и 5 черных шаров, отличающихся лишь цветом. Опыт состоит в том, что сначала вынимают (не глядя) один шар и, не опуская его обратно, вынимают еще один шар. Какова вероятность, что оба вынутых шара черные?

Появление первого черного шара (событие A) имеет, очевидно, вероятность Ð(À) = 5/12. Если первый шар оказался черным, то условная вероятность события B — появления второго черного шара (при условии, что первый шар был черным) — равна $P_1(B) = 4/11$, так как перед выниманием второго шара осталось 11 шаров, из них 4 черных. Вероятность вынуть два черных шара подряд можно подсчитать по формуле

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P_A(B) = \frac{5}{12} \cdot \frac{4}{11} = \frac{5}{33} \approx 0{,}152.$$

События A и B называются *независимыми* если условная вероятность $P_B(A)$ равна вероятности Ð(À). Другими словами, для независимых событий появление одного из них не влияет на вероятность появления другого. Так, в предыдущем примере вероятность появления второго черного шара не зависела бы от цвета вынутого первого шара, если, вынув первый шар, мы положили бы его обратно в ящик. Вероятность произведения независимых событий равна произведению вероятностей этих событий:

$$P(A \text{ и } B) = P(A) \times P(B).$$

На практике независимые события встречаются очень часто, так как причинная связь явлений во многих случаях отсутствует или несущественна.

П р и м е р . Производят n бросаний монеты. Результат каждого бросания — случайное событие, вероятность которого естественно считать не зависящей от результатов других бросаний, поэтому результаты этих n испытаний можно считать независимыми событиями.

Формула полной вероятности	$P(A)=\sum_{i=1}^{n} P(H_i)P_{H_i}(A)$	$\sum_{i=1}^{n} P(H_i)=1$
Формула Байеса (теорема гипотез)	$P_A(H_i)=\dfrac{P(H_i)P_{H_i}(A)}{P(A)}$	

Упражнения

А. ЭЛЕМЕНТАРНЫЙ ПОДСЧЕТ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Игральная кость подбрасывается три раза. Какова вероятность того, что: а) шестерка не появится ни разу; б) шестерка появится хотя бы 1 раз?

Ответ. а) 0,579; б) 0,421.

2. Из 40 экзаменационных вопросов студент выучил 30. Какова вероятность того, что он ответит: а) на три заданных вопроса; б) на 2 из 3 заданных вопросов?

Ответ. а) 0,411; б) 0,440.

3. Из урны с 5 белыми и 7 черными шарами наугад берут 4 шара. Найти вероятности событий: а) взято 2 белых шара; б) взято белых шаров больше, чем черных.

Ответ. а) 0,424; б) 0,~~1~~62. 0,1514

4. Из колоды в 36 карт наугад берут 4 карты. Найти вероятности следующих событий: а) все карты имеют одну масть; б) все карты красные; в) все карты — тузы.

Ответ. а) 0,00856; б) 0,0519, в) 0,0000170.

5. В коробке находятся 6 новых и 2 израсходованные батарейки. Какова вероятность того, что две вынутые из коробки наудачу батарейки окажутся новыми?

Ответ. 15/28.

Б. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ И УМНОЖЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТЕЙ.

1. Из урны с 8 белыми и 4 черными шарами последовательно вынимают 3 шара. Какова вероятность вынуть три белых шара?

Ответ. 0,255.

2. В первой урне 4 белых и 6 синих шаров, во второй 5 белых и 3 синих. Наугад из каждой урны берут по 2 шара. Найти вероятности событий: а) все шары белые; б) все шары одного цвета; в) два шара белые.

Ответ. а) 0,0476. Б 0,0833; в) 0,419.

3. Двое поочередно подбрасывают монету. Выигрывает тот, у кого раньше выпадет герб. Какова вероятность выигрыша для каждого из игроков?

Ответ. 2/3 — для начинающего; 1/3 — для второго.

4. Вероятность поражения мишени при одном выстреле равна 0,75. Сколько независимых выстрелов необходимо назначить, чтобы вероятность поражения мишени была больше: а) 0,95; б) 0,99; в) 0,999?

Ответ. а) 3; б) 4; в) 5.