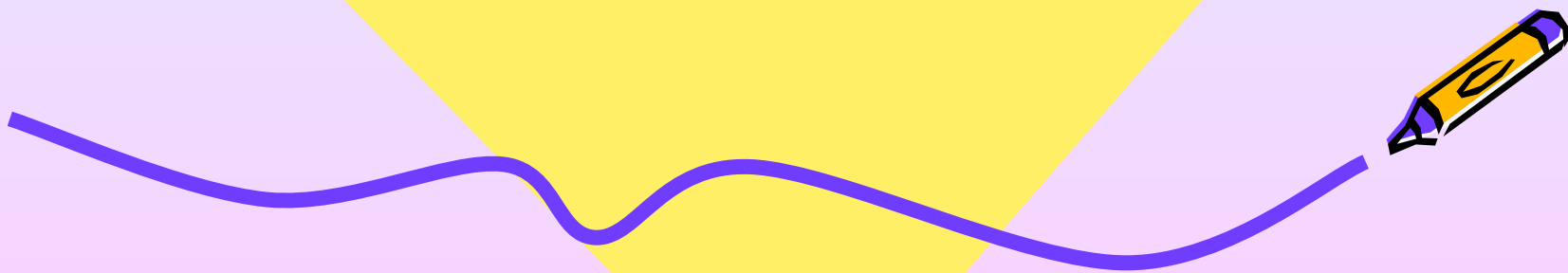


# Объем прямой призмы

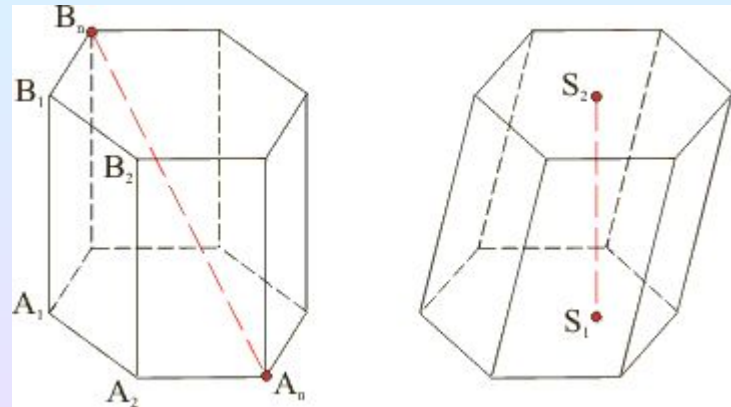


# Цели урока:

- Вспомнить понятие призмы.
- Изучить теорему об объеме призмы.
- Провести доказательство.
- Применить полученные знания на практике.



- **Призма** – многогранник, составленный из двух равных многоугольников  $A_1A_2\dots A_n$  и  $B_1B_2\dots B_n$ , расположенных в параллельных плоскостях, и  $n$  параллелограммов





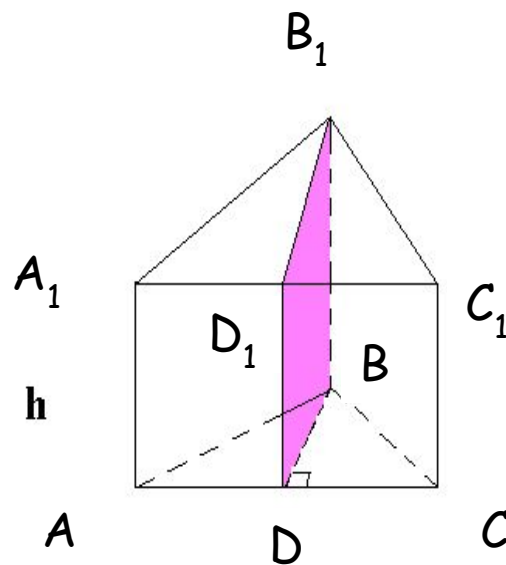
- Если боковые ребра призмы перпендикулярны к основаниям, то призма называется **прямой**.
- Прямая призма называется **правильной**, если её основания - правильные многоугольники.



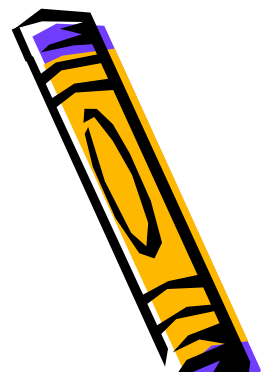
**Теорема:** Объем прямой призмы равен произведению площади основания на высоту

• **Доказательство**

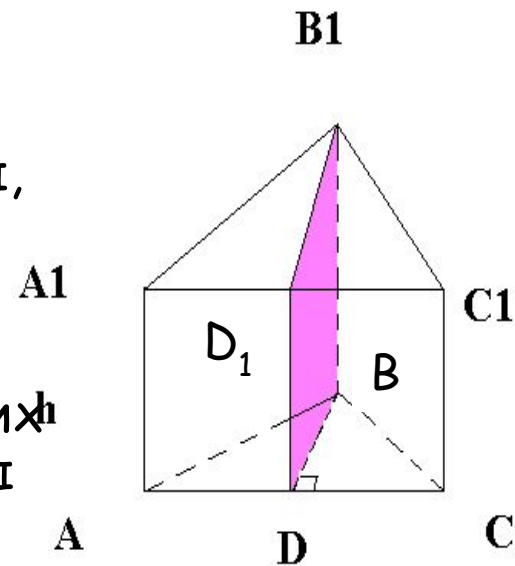
Сначала докажем теорему для прямоугольной призмы, а затем - для произвольной прямой призмы.



- 1) Рассмотрим прямую треугольную призму  $ABCA_1B_1C_1$  с объёмом  $V$  и высотой  $h$ .
- 2) Проведем такую высоту треугольника  $ABC$  (на рис.  $BD$ ), которая разделяет этот треугольник на два треугольника.



- 3) Плоскость  $BB_1D$  разделяет данную призму на 2 призмы, основаниями которых являются прямоугольные треугольники  $ABD$  и  $BDC$ .
- 4) Поэтому объёмы  $V_1$  и  $V_2$  этих призм соответственно равны  $S_{ABD} \cdot h$  и  $S_{BDC} \cdot h$ . По свойству 2° объёмов  $V = V_1 + V_2$ , т.е.  $V = S_{ABD} \cdot h = (S_{ABD} + S_{BDC}) \cdot h$ .

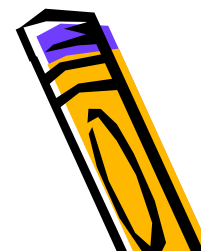


Таким образом,  
 $S_{ABC} \cdot h$ .

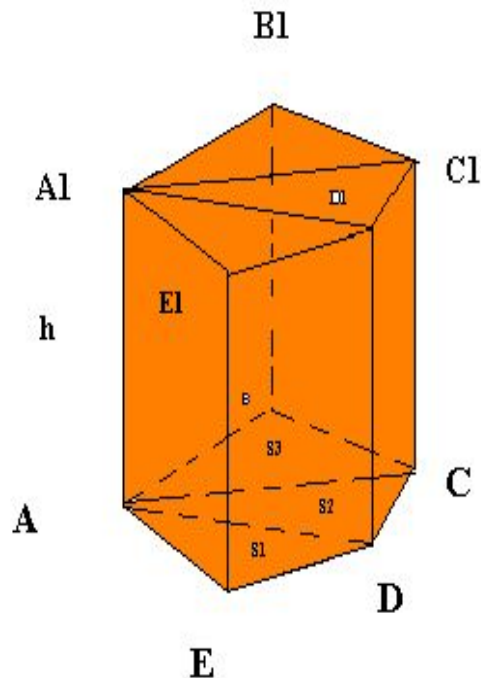
$$V = \boxed{V = S_{ABC} \cdot h}$$



# Теорема для произвольной прямой призмы с высотой $h$ и площадью основания $S$ .



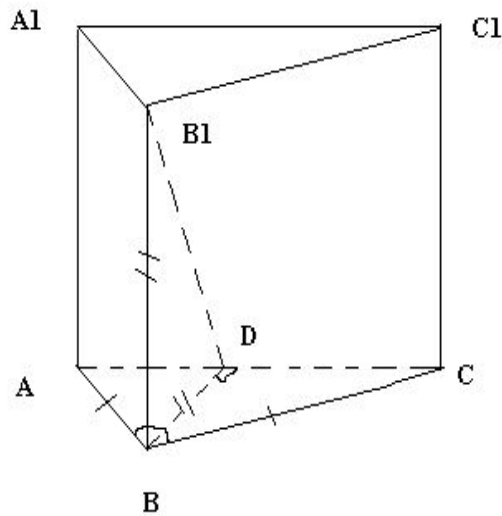
- Таковую призму можно разбить на прямые треугольные призмы с высотой  $h$ . На рис. изображена пятиугольная призма, которая разбита на три прямоугольные призмы.
- Выразим объем каждой прямоугольной призмы по формуле  $V = S_{ABC} \cdot h$  и сложим эти объемы. Мы вынесем за скобки общий множитель  $h$ , потом получим в скобках сумму площадей оснований треугольных призм, т.е. площадь  $S$  основания исходной призмы.



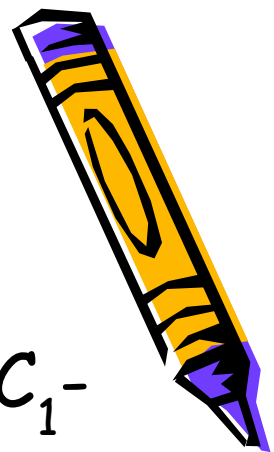
Таким образом, объем исходной призмы равен произведению  $S \cdot h$ .



# Задача



- Дано:  $ABCA_1B_1C_1$  -  
прямая призма.  
 $AB=BC=m; \angle ABC = \varphi$ ,  
 $BD$  - высота в  $\triangle ABC$ ;  
 $BB_1=BD$ .  
Найти:  $V_{ABCA_1B_1C_1}$  -?





# Решение:

- 1)  $S_{ABC} \cdot h, h = BB_1.$
- 2) Рассмотрим  $\Delta ABC$ ;  $\Delta ABC$ - р/б.  $BD$ - высота  $\Delta ABC$ , следовательно медиана и биссектриса.

$$\angle ABD = \angle DBC = \varphi/2$$

- 3) Рассмотрим  $\Delta ABD$ ;  $\Delta ABD$ - прямоугольный. Из соотношения в  $\Delta$ :  $\cos \varphi/2 = BD/AB \Rightarrow BD = \cos \varphi/2 AB$ ,  
 $BD = m \cos \varphi/2$  ( $AB = m$ )

- 4) Т.к.  $BD = BB_1 \Rightarrow BB_1 = m \cdot \cos \varphi / 2$

- 5)  $S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot BC \cdot \sin \varphi$ ;  $S_{ABC} = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \varphi \Rightarrow$

- 6)  $V = \frac{1}{2} m^2 \cdot \sin \varphi \cdot m \cos \varphi/2 = \frac{1}{2} m^3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi/2$

Ответ:  $\frac{1}{2} m^3 \cdot \sin \varphi \cdot \cos \varphi/2$



# Задача 1

Дано:

Правильная n-угольная призма

a — ребро

призмы

а) n = 3

б) n = 4

в) n = 6

г) n = 8

Найти: V

Решение:

а) n = 3

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

б) n = 4

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

в) n = 6

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

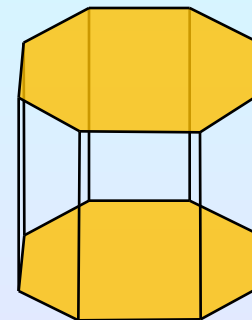
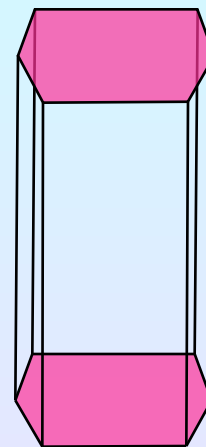
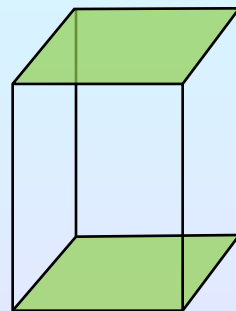
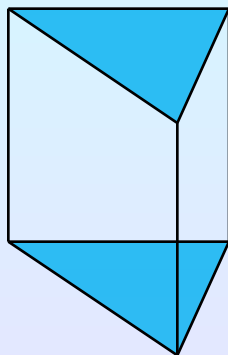
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

г) n = 8

$$V = S_{\text{осн.}} \cdot h$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$



$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

## Задача 2

Дано:

$ABCA_1B_1C_1$  —  
правильная треугольная призма

$a$  — сторона призмы

$(ABC_1)$  — сечение

$(ABC_1) \wedge (ABC) = 60^\circ$

Найти:  $V$

Решение:

$CK \perp AB$

$C_1K \in (AC_1B)$

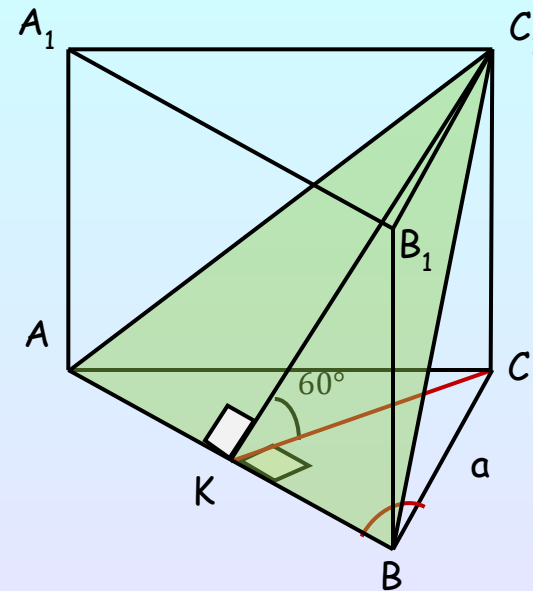
$C_1K \perp AB, \angle C_1KC = 60^\circ$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a \quad V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

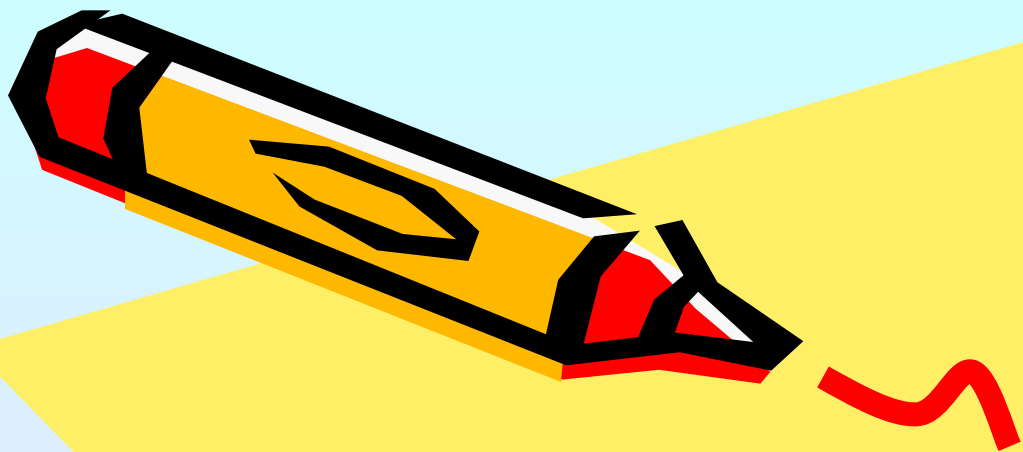
$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$



$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot a$$



СПАСИБО ЗА  
ВНИМАНИЕ =)

