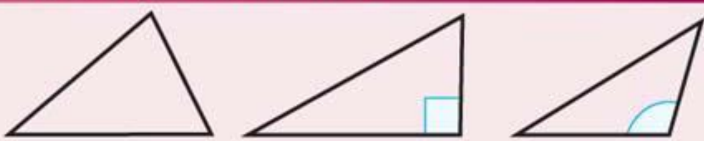
1

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. РАВНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

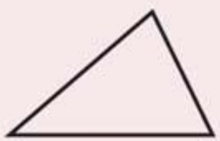
ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



ОСТРОУГОЛЬНЫЙ — все углы острые

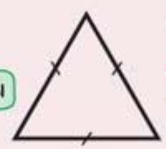
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ — один угол прямой

ТУПОУГОЛЬНЫЙ — один угол тупой



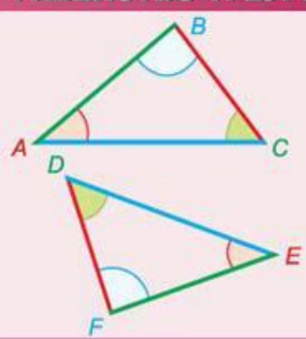
РАЗНОСТОРОННИЙ — все стороны разной длины

РАВНОБЕДРЕННЫЙ — Есть две равные стороны



РАВНОСТОРОННИЙ — все стороны равны

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



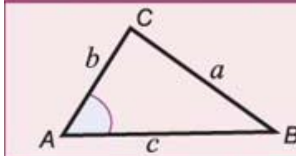
$\Delta ABC = \Delta EFD$

$\Updownarrow$

$\angle A = \angle E$	$BC = DF$
$\angle B = \angle F$	$AC = DE$
$\angle C = \angle D$	$AB = FE$
соответствующие углы	соответствующие стороны

10

ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

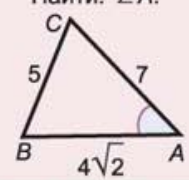
СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$	$a^2 < b^2 + c^2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\angle A = 90^\circ$	$\angle A > 90^\circ$	$\angle A < 90^\circ$

ПРИМЕР 1

Дано: $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 5$, $AC = 7$.

Найти: $\angle A$.



Решение:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$

$25 = 32 + 49 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7\cos A$

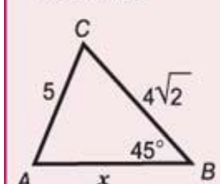
$56\sqrt{2} \cos A = 56, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\angle A = 45^\circ$

ПРИМЕР 2

Дано: $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 5$, $\angle B = 45^\circ$.

Найти: AB.



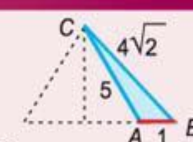
Решение:

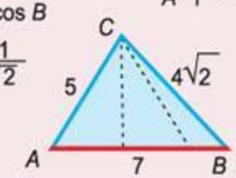
$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, AB \cdot BC \cos B$

$25 = x^2 + 32 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

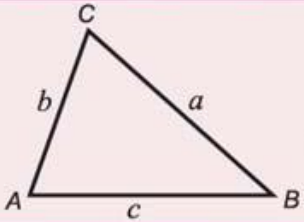
$x^2 - 8x + 7 = 0$

$x = 1$ или $x = 7$





11 ТЕОРЕМА СИНУСОВ



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

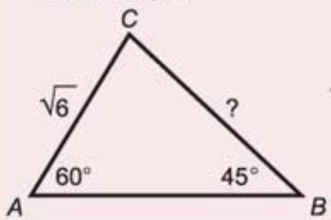
(R – радиус описанной окружности)

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

$\boxed{a > b}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\angle A > \angle B}$

ПРИМЕР 1

Дано: $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $AC = \sqrt{6}$.
Найти: BC, R.



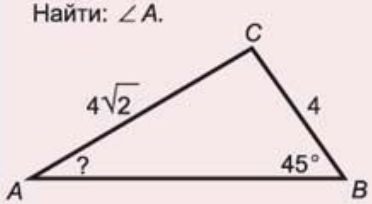
Решение:

1. $\frac{BC}{\sin 60°} = \frac{AC}{\sin 45°}$; $BC = \frac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$

2. $R = \frac{AC}{2\sin 45°} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

ПРИМЕР 2

Дано: $\angle B = 45°$, $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{2}$.
Найти: $\angle A$.



Решение:

1. $\frac{4}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}$; $\sin A = \frac{1}{2}$

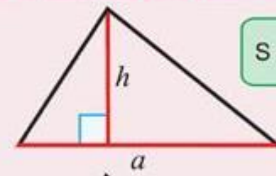
$\angle A = 30°$ или $\angle A = 150°$

2. $BC < AC$, значит, $\angle A < \angle B$,

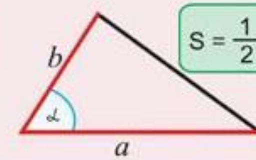
то есть $\angle A = 30°$

12 ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (1)

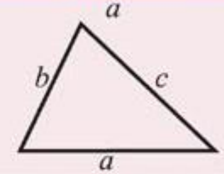
ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$\boxed{S = \frac{1}{2}ah}$



$\boxed{S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha}$



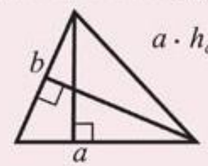
Формула Герона

$S = \sqrt{p\,(p-a)\,(p-b)\,(p-c)}$

p – полупериметр треугольника

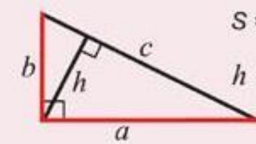
СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Произвольный треугольник



$a \cdot h_a = b \cdot h_b$

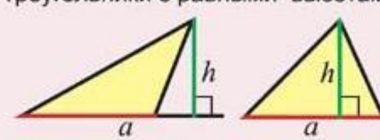
Прямоугольный треугольник



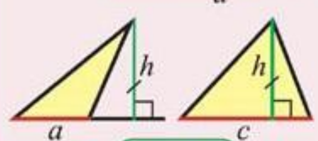
$S = \frac{1}{2}ab$

$h = \frac{ab}{c}$

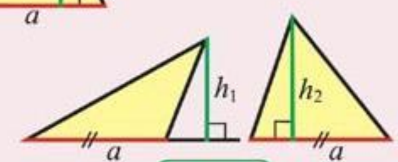
Треугольники с равными высотами или основаниями



$\boxed{S_1 = S_2}$



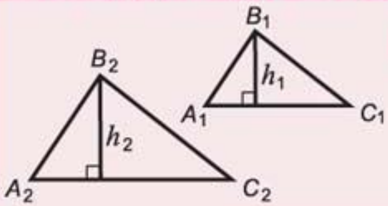
$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{c}}$



$\boxed{\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}}$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (2)

ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$

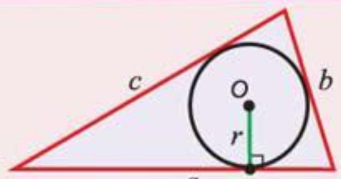
$\Downarrow$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{A_1C_1}{A_2C_2}\right)^2 = k^2$$

ПЛОЩАДИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$S = \frac{abc}{4R}$$

R – радиус описанной окружности



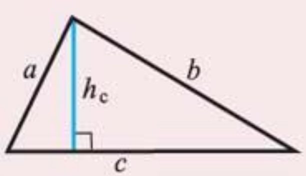
$$S = p \cdot r$$

r – радиус вписанной окружности

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

ПРИМЕР

Дано: $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$.
Найти: R, r, h_c.



Решение:

1. $p = 0{,}5(4 + 13 + 15) = 16$

$S = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$

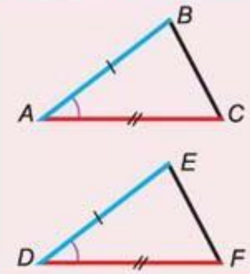
2. $r = S : p = 24 : 16 = 1{,}5$

3. $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \dfrac{45}{8} = 5{,}625$

4. $h_c = 2S : c = 48 : 15 = 3{,}2$

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

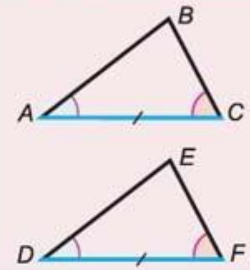
I ПРИЗНАК



$$\left.\begin{aligned} AB &= DE \\ AC &= DF \\ \angle A &= \angle D \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ *по двум сторонам и углу между ними*

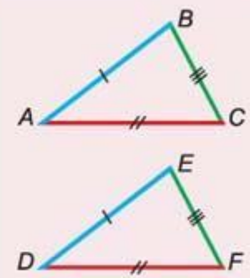
II ПРИЗНАК



$$\left.\begin{aligned} AC &= DF \\ \angle A &= \angle D \\ \angle C &= \angle F \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$\Delta ABC = \Delta DEF$ *по стороне и прилежащим к ней углам*

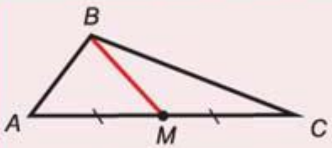
III ПРИЗНАК



$$\left.\begin{aligned} AB &= DE \\ AC &= DF \\ BC &= EF \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

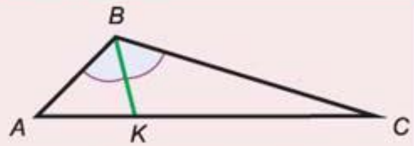
$\Delta ABC = \Delta DEF$ *по трем сторонам*

3 ОСНОВНЫЕ ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



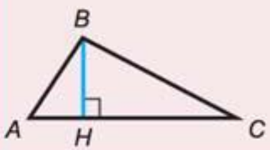
BM – медиана

$AM = MC$



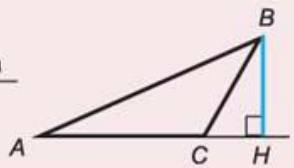
BK – биссектриса

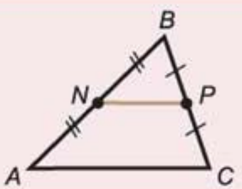
$\angle ABK = \angle CBK$



BH – высота

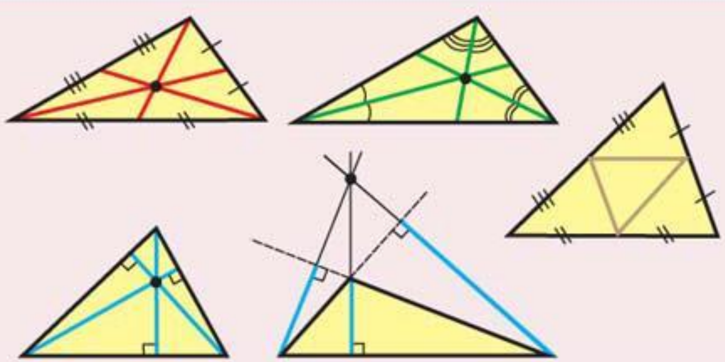
$BH \perp AC$





NP – средняя линия

$AN = NB$ и $BP = PC$

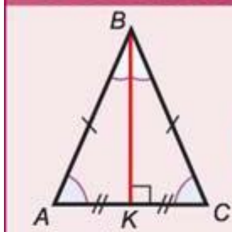


4 РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ПРИЗНАК РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$\angle A = \angle C \Rightarrow AB = BC$

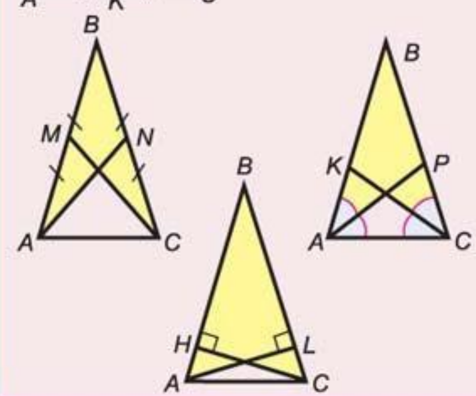
СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$AB = BC$

$\angle A = \angle C$

Медиана BK является высотой и биссектрисой



– Медианы AN и CM равны

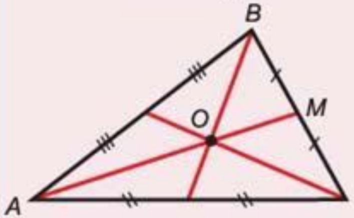
– Биссектрисы AP и CK равны

– Высоты AL и CH равны

5 ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

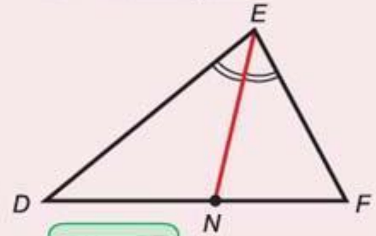
СВОЙСТВА МЕДИАН И БИССЕКТРИС

AM – медиана



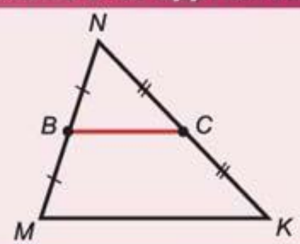
$AO : OM = 2 : 1$

EN – биссектриса



$$\frac{DN}{NF} = \frac{DE}{EF}$$

СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

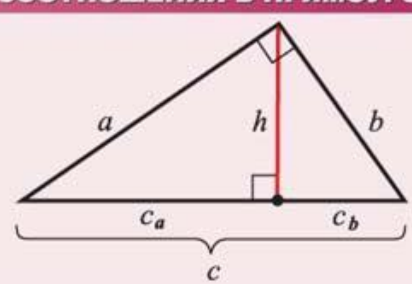


BC – средняя линия

$BC \parallel MK$

$$BC = \frac{1}{2}MK$$

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ

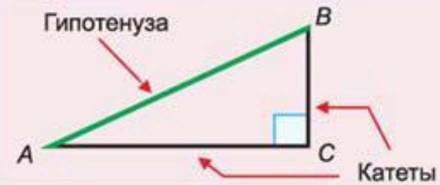


$$a^2 = c \cdot c_a$$

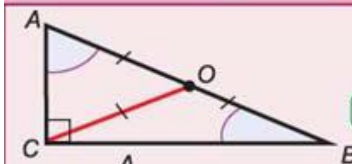
$$b^2 = c \cdot c_b$$

$$h^2 = c_a \cdot c_b$$

6 ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

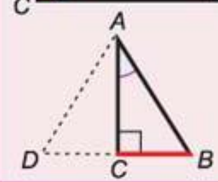


$\angle A + \angle B = 90°$



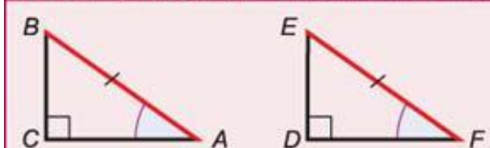
В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB:

CO – медиана $\Rightarrow$ $CO = \frac{1}{2}AB$

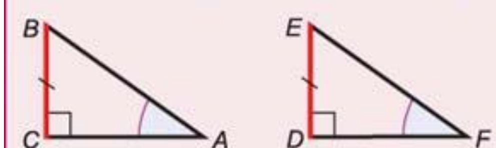


$\angle A = 30° \Leftrightarrow BC = \frac{1}{2}AB$

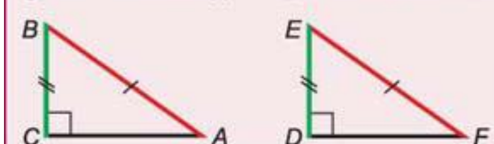
ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\Delta ABC = \Delta FED$
по гипотенузе
и острому углу

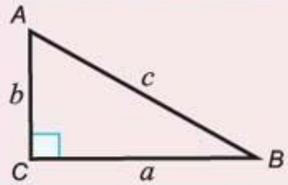


$\Delta ABC = \Delta FED$
по катету
и острому углу



$\Delta ABC = \Delta FED$
по гипотенузе
и катету

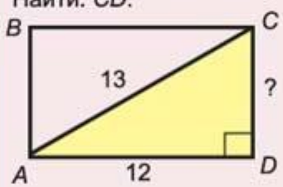
7 ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$

ПРИМЕР

Дано: *ABCD* – прямоугольник, *AC* = 13, *AD* = 12.
Найти: *CD*.



Решение:

ΔACD – прямоугольный, $\angle D = 90^\circ$

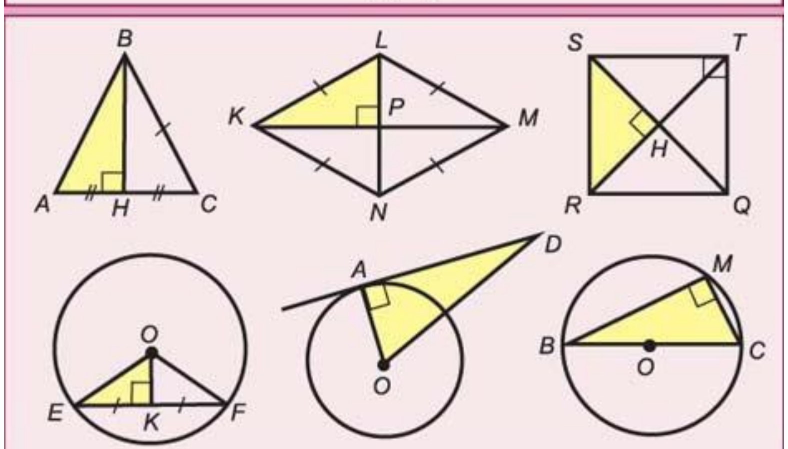
По теореме Пифагора:

$AC^2 = AD^2 + CD^2$

$13^2 = 12^2 + CD^2$

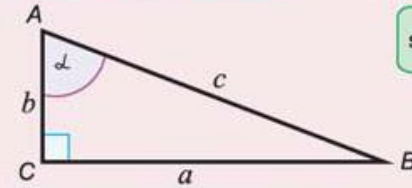
$CD^2 = 25$

$CD = 5$



8 СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

ОПРЕДЕЛЕНИЯ



(Катет a противолежит углу α, катет b прилежит к углу α)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

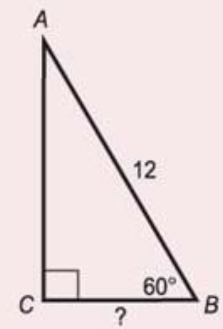
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

При решении задач необходимо:

1) ВЫБРАТЬ НУЖНУЮ ФОРМУЛУ
2) ПОДСТАВИТЬ ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
3) ВЫЧИСЛИТЬ НЕИЗВЕСТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

ПРИМЕР

Дано: ΔABC, $\angle C = 90^\circ$, $\angle B = 60^\circ$, $AB = 12$.
Найти: *BC*.



Решение:

1. Так как *BC* прилежит к углу *B*, то

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

2. Подставим известные величины:

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{12}$$

3. $BC = \frac{12}{2} = 6$

Ответ: *BC* = 6

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ⇒ $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$ ⇒ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k$

k – коэффициент подобия

I ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

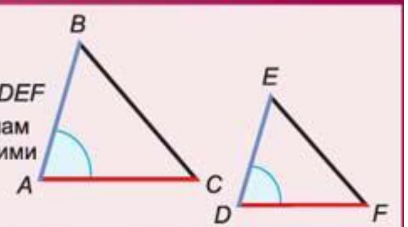
$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \angle C = \angle F\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle DEF$

по двум углам

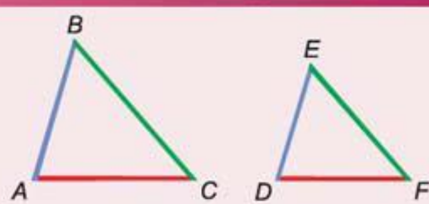
II ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D \\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}\end{array}\right\} \Rightarrow \triangle ABC \backsim \triangle DEF$

по двум сторонам и углу между ними



III ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$

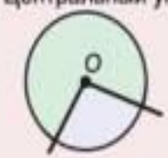
$\Downarrow$

$\triangle ABC \backsim \triangle DEF$

по трем сторонам

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

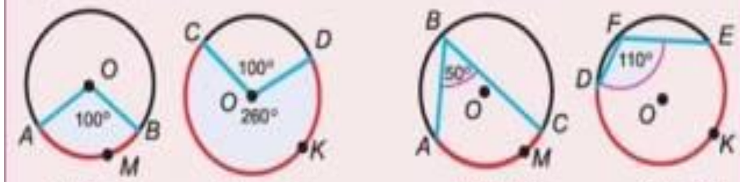
Центральный угол



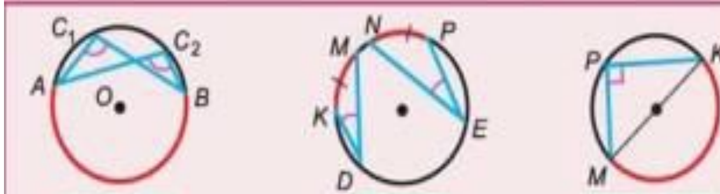
Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги окружности

Вписанный угол

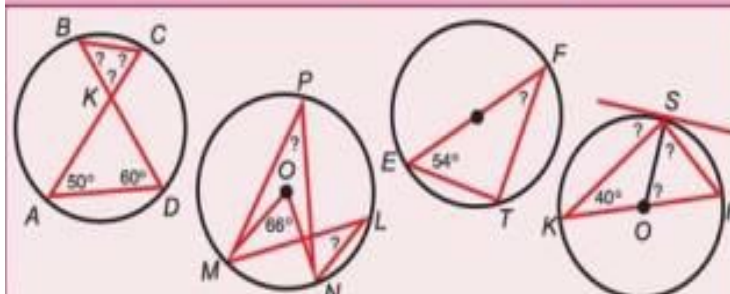
Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается



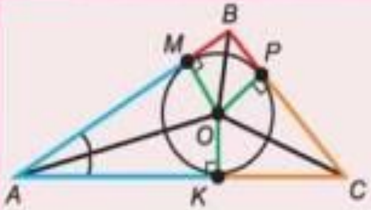
$\cup AMB = 100°$ $\cup CKD = 260°$ $\cup AMC = 100°$ $\cup DKE = 220°$



$\angle C_1 = \angle C_2$ $\angle D = \angle E$ $\angle MPK = 90°$



3 ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



AB, BC, AC – касательные

Отрезки касательных равны:

AM = AK, BM = BP, CP = CK

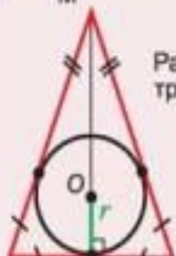
OM = OK = OP = r

AO, BO, CO – биссектрисы углов

ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

Произвольный треугольник

Прямоугольный треугольник

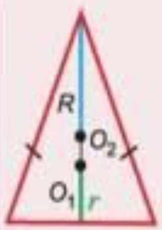


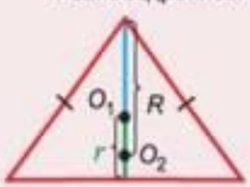
Равнобедренный треугольник

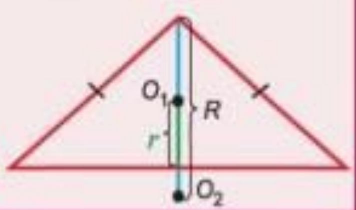
Равнобедренный прямоугольный треугольник

ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

Равнобедренный треугольник







2 ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА

Стороны AB, BC, AC – хорды

OA = OB = OC = R

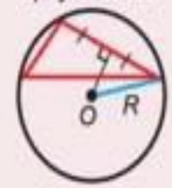
∠ABC, ∠BAC, ∠ACB – вписанные

OH, OM, ON – серединные перпендикуляры к сторонам

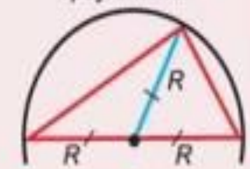
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

Остроугольный треугольник

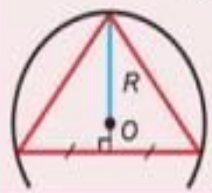
Тупоугольный треугольник

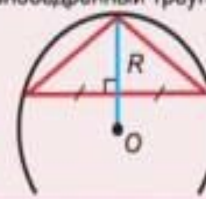


Прямоугольный треугольник

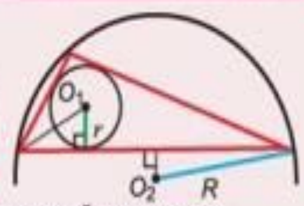


Равнобедренный треугольник



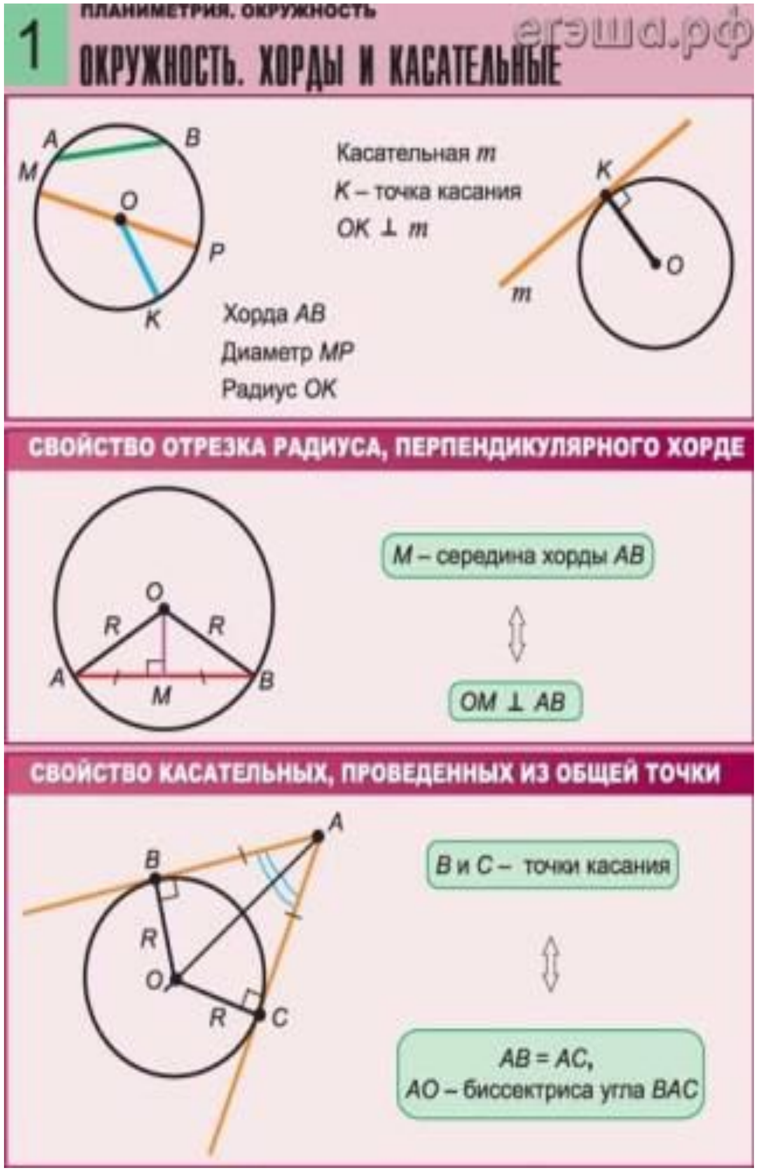


ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

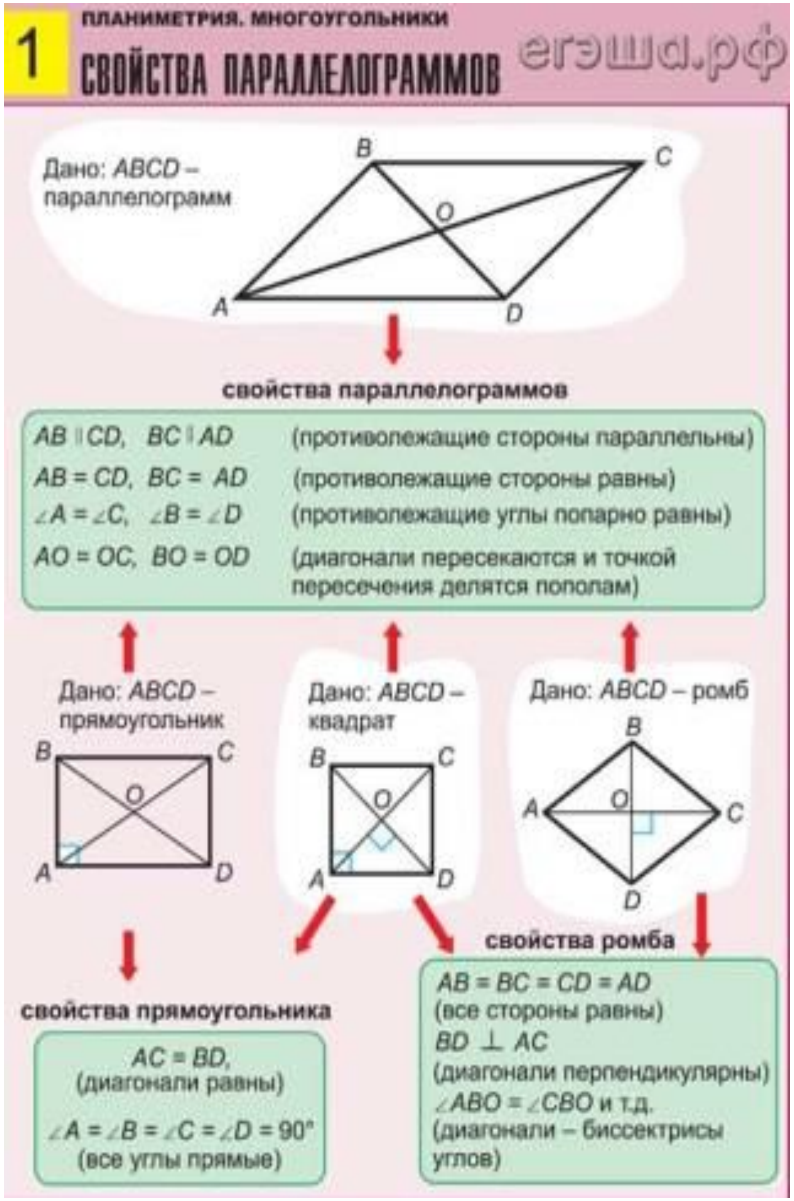


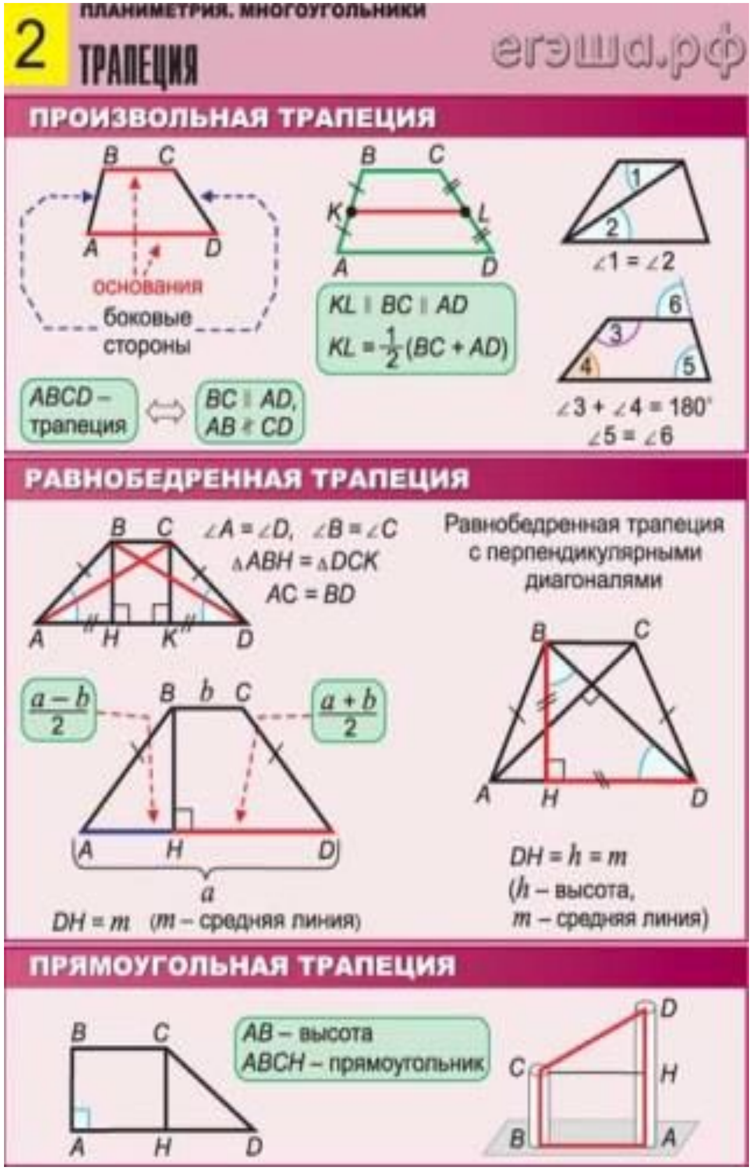
Разносторонний треугольник

Равносторонний треугольник


ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ
1
ОКРУЖНОСТЬ. ХОРДЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ
егэша.рф
A
B
M
O
P
K
Касательная m
K – точка касания
OK ⊥ m
Хорда AB
Диаметр MP
Радиус OK
СВОЙСТВО ОТРЕЗКА РАДИУСА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ХОРДЕ
M – середина хорды AB
OM ⊥ AB
СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ ИЗ ОБЩЕЙ ТОЧКИ
B и C – точки касания
AB = AC,
AO – биссектриса угла BAC


ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ
5
СВОЙСТВА ХОРД И СЕКУЩИХ
егэша.рф
ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ ОКРУЖНОСТИ
MA · MB = MC · MD
KA · KB = KC · KD = KP²
УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ХОРДАМИ
И СЕКУЩИМИ ОКРУЖНОСТИ
∠ = ½(n° + m°)
β = ½(m° – n°)
УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ КАСАТЕЛЬНОЙ С ХОРДОЙ И СЕКУЩЕЙ
∠ = ½ m°
β = ½(m° – n°)


ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
1
СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ
егэша.рф
Дано: ABCD – параллелограмм
свойства параллелограммов
AB ∥ CD, BC ∥ AD (противолежащие стороны параллельны)
AB = CD, BC = AD (противолежащие стороны равны)
∠A = ∠C, ∠B = ∠D (противолежащие углы попарно равны)
AO = OC, BO = OD (диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам)
Дано: ABCD – прямоугольник
Дано: ABCD – квадрат
Дано: ABCD – ромб
свойства прямоугольника
AC = BD, (диагонали равны)
∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90° (все углы прямые)
свойства ромба
AB = BC = CD = AD (все стороны равны)
BD ⊥ AC (диагонали перпендикулярны)
∠ABO = ∠CBO и т.д. (диагонали – биссектрисы углов)


ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
2
ТРАПЕЦИЯ
егэша.рф
ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ
основания
боковые стороны
ABCD – трапеция ⇔ BC ∥ AD, AB ∦ CD
KL ∥ BC ∥ AD
KL = 1/2 (BC + AD)
∠1 = ∠2
∠3 + ∠4 = 180°
∠5 = ∠6
РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ
∠A = ∠D, ∠B = ∠C
△ABH = △DCK
AC = BD
(a − b)/2
(a + b)/2
DH = m (m – средняя линия)
Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями
DH = h = m
(h – высота, m – средняя линия)
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ
AB – высота
ABCH – прямоугольник

ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

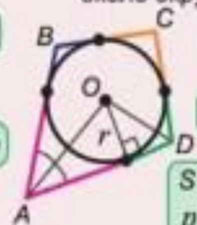
Четырехугольник, вписанный в окружность

стороны – хорды

углы – вписанные

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$
$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

Четырехугольник, описанный около окружности



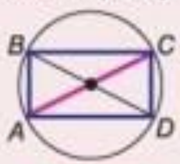
стороны лежат на касательных

$AB + CD = BC + AD$

$S_{ABCD} = p \cdot r$,
p – полупериметр,
r – радиус вписанной окружности

ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

Параллелограмм, вписанный в окружность, – прямоугольник



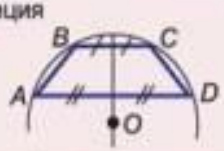
$AC = 2R$

Параллелограмм, описанный около окружности, – ромб

$h = PN = 2r$

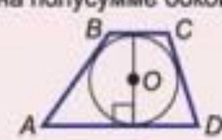
ТРАПЕЦИИ

Трапеция, вписанная в окружность, – равнобедренная трапеция



Центр O лежит на серединном перпендикуляре к основаниям

В трапеции, описанной около окружности, средняя линия равна полусумме боковых сторон



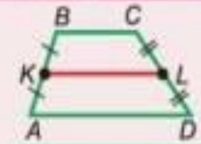
$P_{ABCD} = 4m$ (m – средняя линия)

$h = 2r$

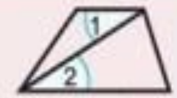
ТРАПЕЦИЯ

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

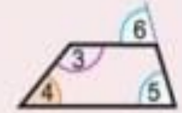
$ABCD$ – трапеция $\Leftrightarrow$ $BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$



$KL \parallel BC \parallel AD$
$KL = \frac{1}{2}(BC + AD)$

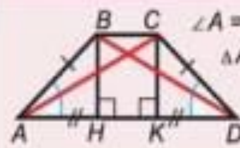


$\angle 1 = \angle 2$

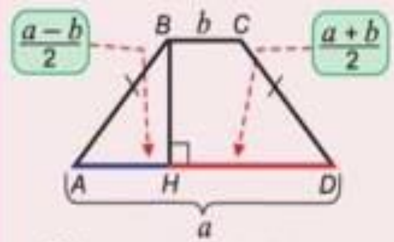


$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$
$\angle 5 = \angle 6$

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

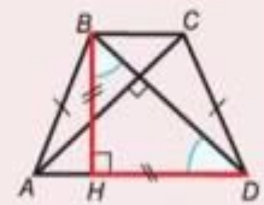


$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$
$\triangle ABH = \triangle DCK$
$AC = BD$



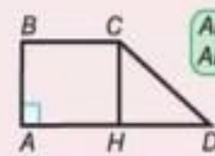
$DH = m$ (m – средняя линия)

Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями

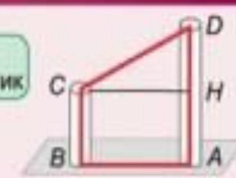


$DH = h = m$
(h – высота,
m – средняя линия)

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

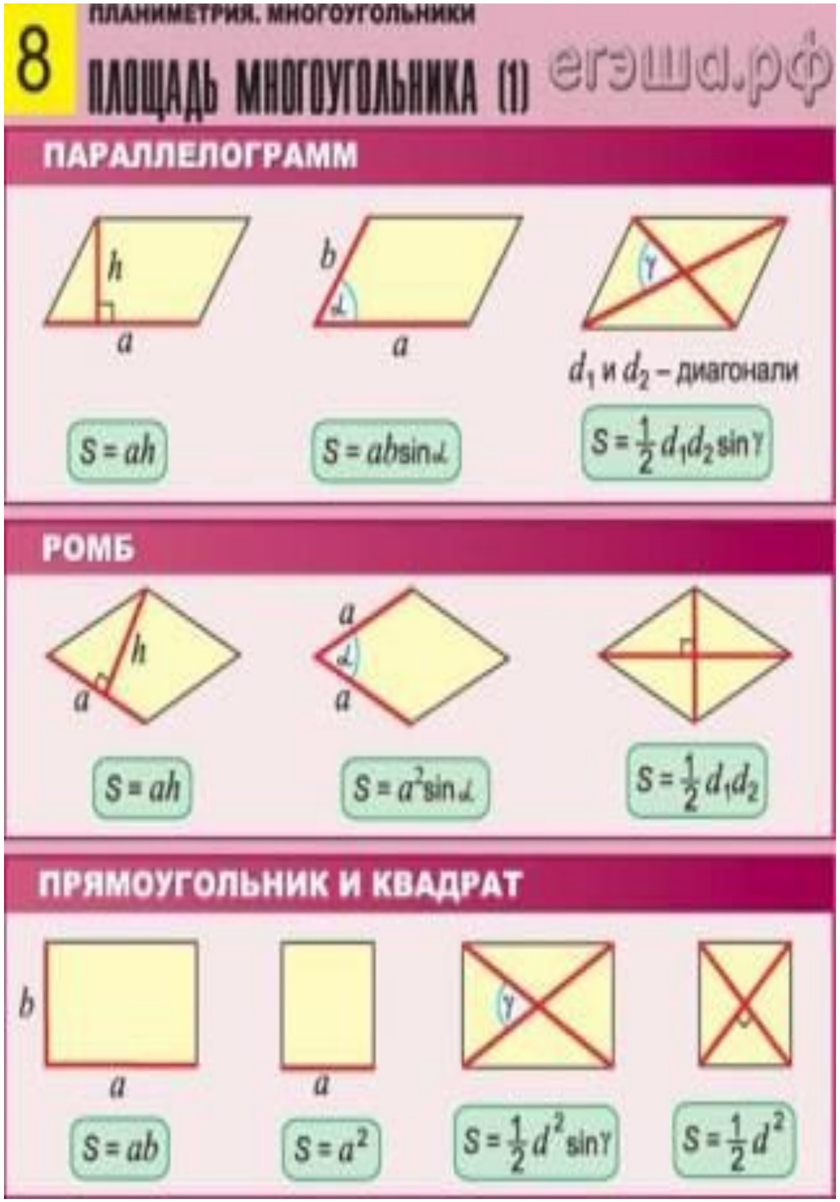


AB – высота
$ABCH$ – прямоугольник




3
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА И ЕГО ВИДОВ
егэша.рф
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
Если в выпуклом четырехугольнике ABCD:
AB ∥ CD, BC ∥ AD — то
AB = CD, BC = AD — то
AB ∥ CD, AB = CD — то
AO = OC, BO = OD, O ∈ AC, O ∈ BD — то
ABCD – параллелограмм
ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА
Если в параллелограмме ABCD:
∠A = 90° — то
AC = BD — то
ABCD – прямоугольник
ПРИЗНАКИ КВАДРАТА
Если в прямоугольнике ABCD:
AB = BC
∠ABO = ∠CBO
AC ⊥ BD
то
ABCD – квадрат
Если в ромбе ABCD:
AC = BD
∠A = 90°
то
ПРИЗНАКИ РОМБА
Если в четырехугольнике ABCD:
AB = BC = CD = AD — то
Если в параллелограмме ABCD:
AB = BC — то
AC ⊥ BD — то
∠ABO = ∠CBO — то
ABCD – ромб


7
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК
егэша.рф
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК
a = R, r = a√3/2, S_AOF = a²√3/4
ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК
r² + (a/2)² = R²
S_COD = R²·√2/4


8
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (1)
егэша.рф
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ
h
a
b
α
a
γ
d_1 и d_2 – диагонали
$S = ah$
$S = ab\sin\alpha$
$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$
РОМБ
h
a
a
α
a
$S = ah$
$S = a^2\sin\alpha$
$S = \frac{1}{2}d_1d_2$
ПРЯМОУГОЛЬНИК И КВАДРАТ
b
a
a
γ
$S = ab$
$S = a^2$
$S = \frac{1}{2}d^2\sin\gamma$
$S = \frac{1}{2}d^2$


9
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (2)
егэша.рф
ТРАПЕЦИЯ
b
h
a
m
γ
a и b – основания
m – средняя линия
h – высота
d_1 и d_2 – диагонали
$S = \frac{1}{2}(a + b) \cdot h$
$S = m \cdot h$
$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$
ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК
γ
$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$
$d_1 \perp d_2$
$S = \frac{1}{2}d_1d_2$
МНОГОУГОЛЬНИКИ
Правильный n-угольник
$S = \frac{n}{2}R^2\sin\alpha$
R
α
R – радиус описанной окружности
Выпуклый многоугольник, описанный около окружности
$S = p \cdot r$
r
p – половина периметра
r – радиус вписанной окружности

4

ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

УГЛЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Внутренние накрест лежащие углы

Внутренние односторонние углы

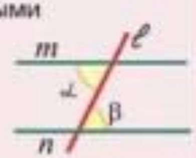
Соответственные углы

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

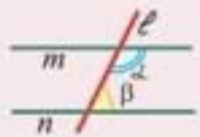
Пусть даны прямые m и n и секущая ℓ,

$\angle$ и β – углы, образованные этими прямыми

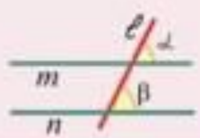
$\angle, \beta$ – внутренние накрест лежащие, $\angle = \beta$ ⇨ $m \parallel n$



$\angle, \beta$ – внутренние односторонние, $\angle + \beta = 180°$ ⇨ $m \parallel n$



$\angle, \beta$ – соответственные, $\angle = \beta$ ⇨ $m \parallel n$



$m \parallel \ell,\ n \parallel \ell$ ⇨ $m \parallel n$

$m \perp \ell,\ n \perp \ell$ ⇨ $m \parallel n$

4

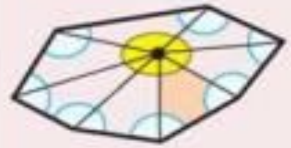
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Сумма внутренних углов n-угольника

$180° \cdot (n-2)$



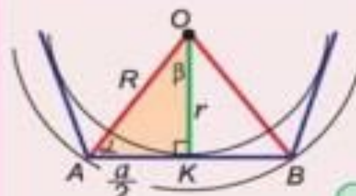
Площадь n-угольника, описанная около окружности

$S = p \cdot r$

r – радиус вписанной окружности

p – половина периметра многоугольника

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК



$\triangle AOK$:

AK – половина стороны

$\angle = \angle OAK$ – половина внутреннего угла

$\beta = \angle AOK$ – половина центрального угла

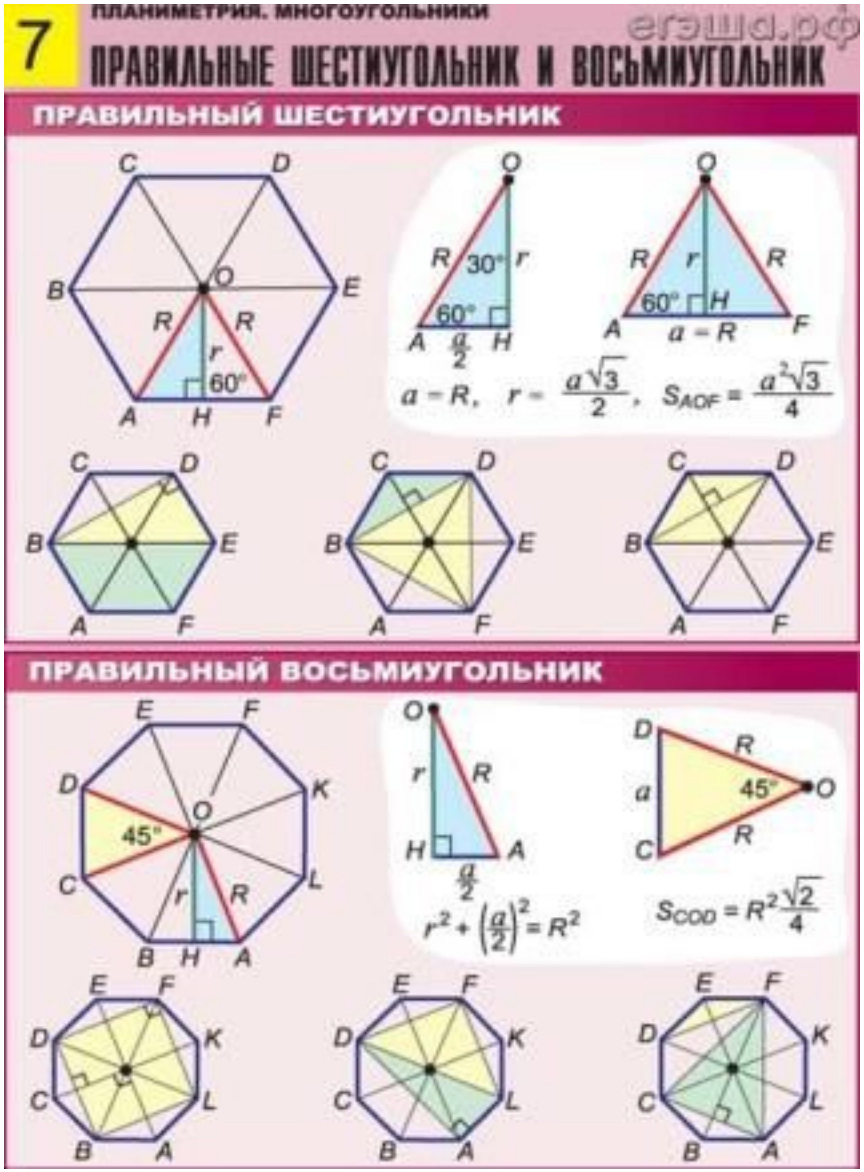
$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2, \quad \sin\angle = \frac{r}{R}, \quad \sin\beta = \frac{a}{2R}$$

ЗАДАЧА

Найти внутренний, внешний и центральный углы правильного пятиугольника.

Решение:

1. $n = 5$, сумма внутренних углов равна $180° \cdot (5-2) = 540°$
2. внутренний угол: $\angle 1 = 540° : 5 = 108°$
3. внешний угол: $\angle 2 = 180° - 108° = 72°$
4. центральный угол: $\angle 3 = 360° : 5 = 72°$

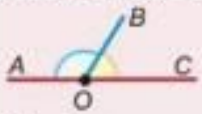

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
7
ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК
$a = R$, $r = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{AOF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК
$r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$
$S_{COD} = R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$


ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
6
ПРАВИЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИК И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК
ПРАВИЛЬНЫЙ (РАВНОСТОРОННИЙ) ТРЕУГОЛЬНИК
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, $S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$,
$R = 2r$, $r = \frac{1}{3}h$, $R = \frac{2}{3}h$
ПРАВИЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК (КВАДРАТ)
$AC = a\sqrt{2}$, $S_{ABCD} = a^2$
$a = 2r$, $R = r\sqrt{2}$, $a = R\sqrt{2}$

СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

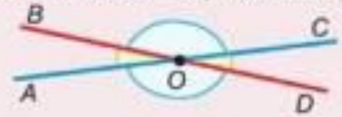
$\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные углы



OB – общая сторона

OA, OC – дополнительные лучи

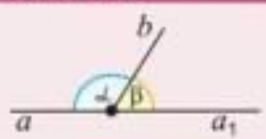
$\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные углы



OA, OC – дополнительные лучи

OB, OD – дополнительные лучи

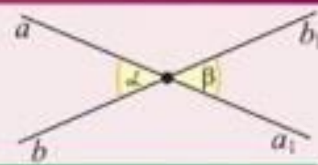
СВОЙСТВА



α и β – смежные углы

⇩

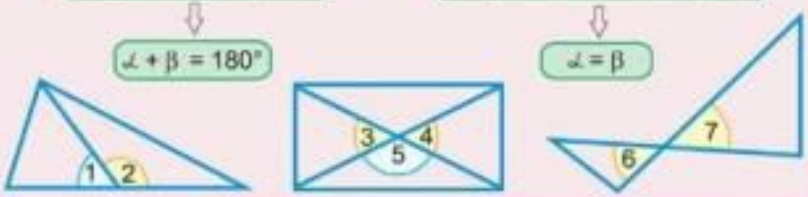
$\alpha + \beta = 180°$



α и β – вертикальные углы

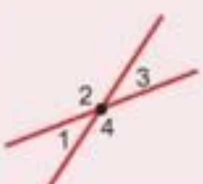
⇩

$\alpha = \beta$



ЗАДАЧА

Найти углы, образующиеся при пересечении двух прямых, если один из них равен 32°.



Решение:

1) Пусть $\angle 1 = 32°$.

2) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ как смежные углы, тогда $\angle 2 = 180° - 32° = 148°$.

3) $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные углы, тогда $\angle 3 = 32°$, $\angle 4 = 148°$.

Ответ: 32°, 148°, 32°, 148°.

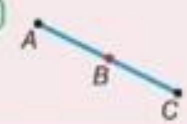
БИССЕКТРИСА УГЛА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

СЕРЕДИНА ОТРЕЗКА, БИССЕКТРИСА УГЛА

Точка B – середина отрезка AC

⇩

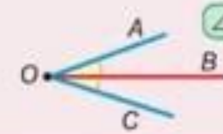
$AB = BC$



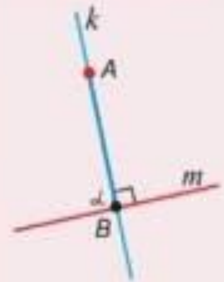
Луч OB – биссектриса угла AOC

⇩

$\angle AOB = \angle BOC$



ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ



Прямые k и m перпендикулярны, если $\alpha = 90°$

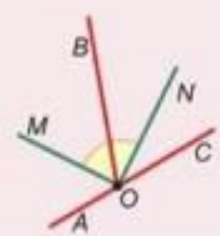
AB – перпендикуляр к прямой m, если AB – отрезок прямой k, $k \perp m$, $B \in m$

Расстояние от точки A до прямой m – длина перпендикуляра AB

ЗАДАЧА

Дано: OM – биссектриса угла AOB, ON – биссектриса угла BOC, $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные.

Найти: $\angle MON$.



Решение:

1) Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$.
Т.к. α и β – смежные, то $\alpha + \beta = 180°$.

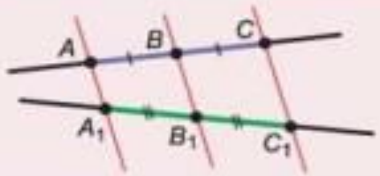
2) Т.к. OM и ON – биссектрисы углов α и β, то $\angle MOB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BON = \frac{\beta}{2}$.

3) $\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$.

Ответ: $\angle MON = 90°$, $OM \perp ON$.

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



$$\boxed{\begin{matrix} AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \\ AB = BC \end{matrix}}$$

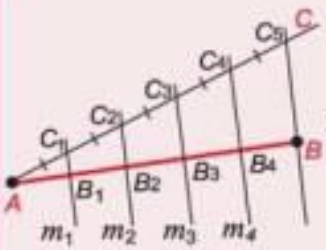
$$\Updownarrow$$

$$\boxed{A_1B_1 = B_1C_1}$$

ЗАДАЧА 1

Дано: отрезок AB.

Разделить отрезок AB на 5 равных частей.



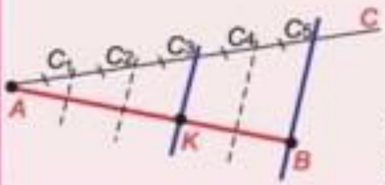
Решение:

1. На произвольном луче AC отложить $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести C_5B, затем прямые $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3 \parallel m_4 \parallel C_5B$ B_1, B_2, B_3, B_4 – точки пересечения прямых m_i с прямой AB
3. $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = \frac{1}{5}AB$

ЗАДАЧА 2

Дано: отрезок AB.

Разделить отрезок AB в отношени 3 : 2.



Решение:

1. На луче AC отложить $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести C_5B и $C_3K \parallel C_5B$
3. $AK : KB = 3 : 2$