

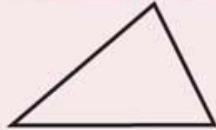


1

ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

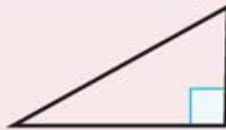
егэша.рф

## ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. РАВНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ



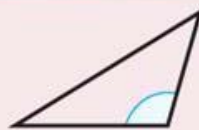
ОСТРОУГОЛЬНЫЙ

все углы острые



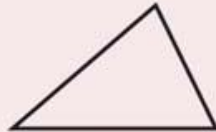
ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ

один угол прямой



ТУПОУГОЛЬНЫЙ

один угол тупой



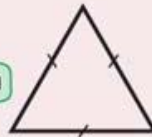
РАЗНОСТОРОННИЙ

все стороны разной длины



РАВНОБЕДРЕННЫЙ

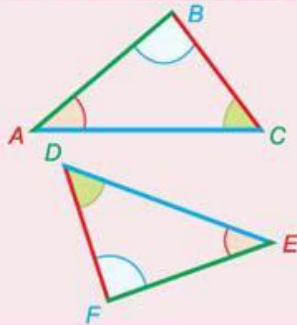
Есть две равные стороны



РАВНОСТОРОННИЙ

все стороны равны

## РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$\triangle ABC = \triangle FED$$



$$\begin{array}{ll} \angle A = \angle E & BC = DF \\ \angle B = \angle F & AC = DE \\ \angle C = \angle D & AB = FE \end{array}$$

соответствующие углы

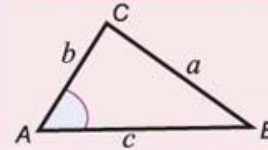
соответствующие стороны

10

ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

егэша.рф

## ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

## СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$$a^2 = b^2 + c^2$$



$$\angle A = 90^\circ$$

$$a^2 > b^2 + c^2$$



$$\angle A > 90^\circ$$

$$a^2 < b^2 + c^2$$

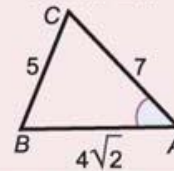


$$\angle A < 90^\circ$$

## ПРИМЕР 1

Дано:  $AB = 4\sqrt{2}$ ,  $BC = 5$ ,  $AC = 7$ .Найти:  $\angle A$ .

Решение:



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$$

$$25 = 32 + 49 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7 \cos A$$

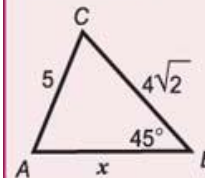
$$56\sqrt{2} \cos A = 56, \quad \cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\angle A = 45^\circ$$

## ПРИМЕР 2

Дано:  $BC = 4\sqrt{2}$ ,  $AC = 5$ ,  $\angle B = 45^\circ$ .Найти:  $AB$ .

Решение:

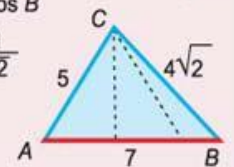
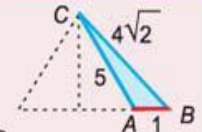


$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2AB \cdot BC \cos B$$

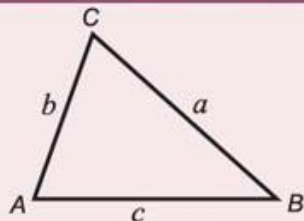
$$25 = x^2 + 32 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x^2 - 8x + 7 = 0$$

$$x = 1 \text{ или } x = 7$$



## ТЕОРЕМА СИНУСОВ



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

(R – радиус описанной окружности)

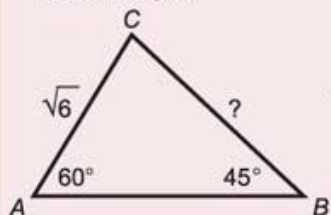
## СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

$$a > b \Leftrightarrow \angle A > \angle B$$

## ПРИМЕР 1

Дано:  $\angle A = 60^\circ$ ,  $\angle B = 45^\circ$ ,  $AC = \sqrt{6}$ .  
Найти: BC, R.

Решение:



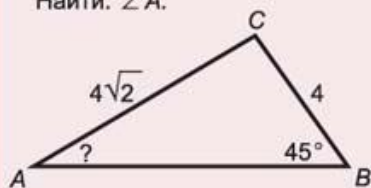
$$1. \frac{BC}{\sin 60^\circ} = \frac{AC}{\sin 45^\circ}; \quad BC = \frac{\sqrt{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$$

$$2. R = \frac{AC}{2\sin 45^\circ} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$$

## ПРИМЕР 2

Дано:  $\angle B = 45^\circ$ ,  $BC = 4$ ,  $AC = 4\sqrt{2}$ .  
Найти:  $\angle A$ .

Решение:



$$1. \frac{4}{\sin A} = \frac{4\sqrt{2}}{\sin 45^\circ}; \quad \sin A = \frac{1}{2}$$

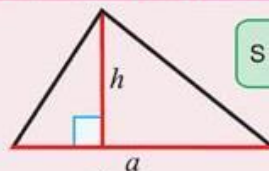
$$\angle A = 30^\circ \text{ или } \angle A = 150^\circ$$

$$2. BC < AC, \text{ значит, } \angle A < \angle B,$$

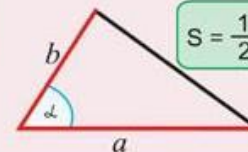
то есть  $\angle A = 30^\circ$

## ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (1)

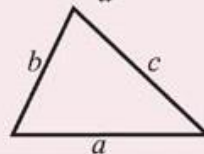
## ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$S = \frac{1}{2}ah$$



$$S = \frac{1}{2}ab \sin \alpha$$



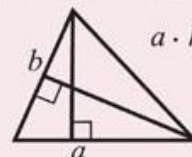
## Формула Герона

$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

p – полупериметр треугольника

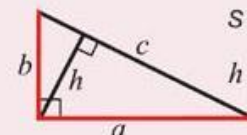
## СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Произвольный треугольник



$$a \cdot h_a = b \cdot h_b$$

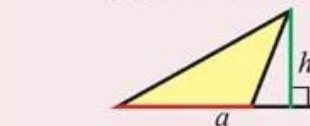
Прямоугольный треугольник



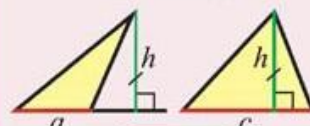
$$S = \frac{1}{2}ab$$

$$h = \frac{ab}{c}$$

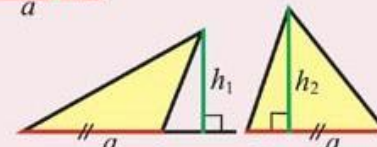
Треугольники с равными высотами или основаниями



$$S_1 = S_2$$

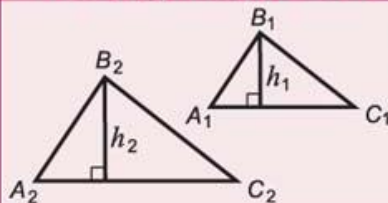


$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{a}{c}$$



$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{h_1}{h_2}$$

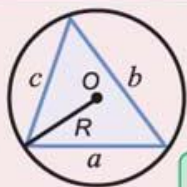
## ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$\Delta A_1B_1C_1 \sim \Delta A_2B_2C_2$$

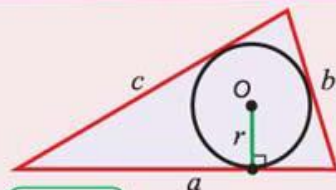
$$\frac{S_1}{S_2} = \left( \frac{A_1C_1}{A_2C_2} \right)^2 = k^2$$

## ПЛОЩАДИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$S = \frac{abc}{4R}$$

$R$  – радиус описанной окружности



$$S = p \cdot r$$

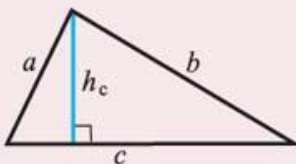
$r$  – радиус вписанной окружности

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

## ПРИМЕР

Дано:  $a = 4$ ,  $b = 13$ ,  $c = 15$ .

Найти:  $R$ ,  $r$ ,  $h_c$ .



Решение:

$$1. p = 0,5(4 + 13 + 15) = 16$$

$$S = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$$

$$2. r = S : p = 24 : 16 = 1,5$$

$$3. R = \frac{abc}{4S} = \frac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \frac{45}{8} = 5,625$$

$$4. h_c = 2S : c = 48 : 15 = 3,2$$

## I ПРИЗНАК

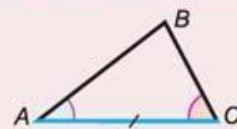


$$\left. \begin{array}{l} AB = DE \\ AC = DF \\ \angle A = \angle D \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Delta ABC = \Delta DEF$   
по двум сторонам  
и углу между ними

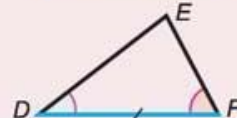


## II ПРИЗНАК

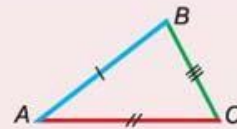


$$\left. \begin{array}{l} AC = DF \\ \angle A = \angle D \\ \angle C = \angle F \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Delta ABC = \Delta DEF$   
по стороне  
и прилежащим к ней  
углам



## III ПРИЗНАК



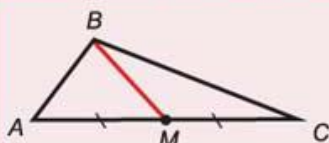
$$\left. \begin{array}{l} AB = DE \\ AC = DF \\ BC = EF \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$\Delta ABC = \Delta DEF$   
по трем сторонам

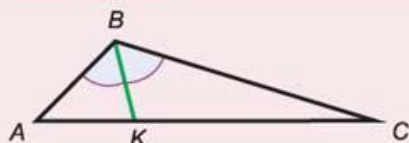


### 3

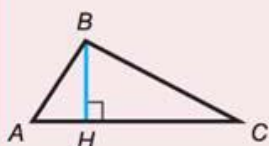
## ОСНОВНЫЕ ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



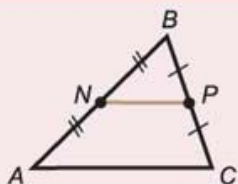
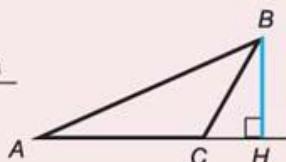
$BM$  – медиана  
 $AM = MC$



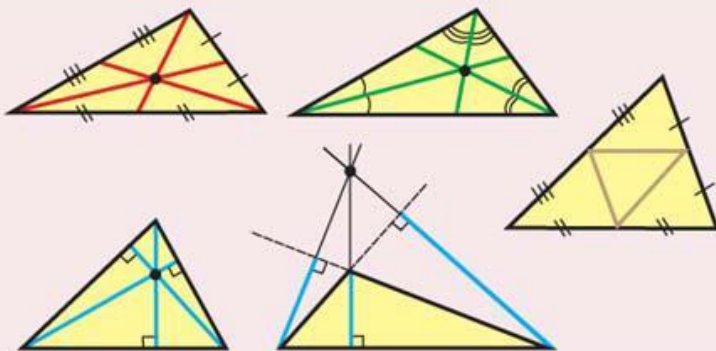
$BK$  – биссектриса  
 $\angle ABK = \angle CBK$



$BH$  – высота  
 $BH \perp AC$



$NP$  – средняя линия  
 $AN = NB$  и  $BP = PC$



### 4

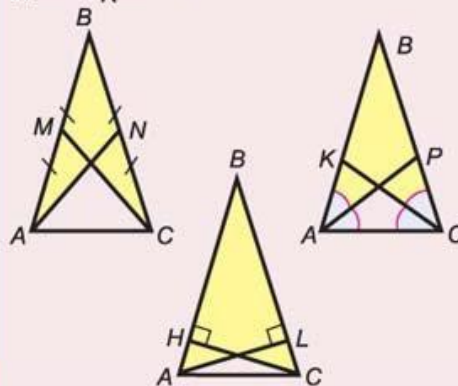
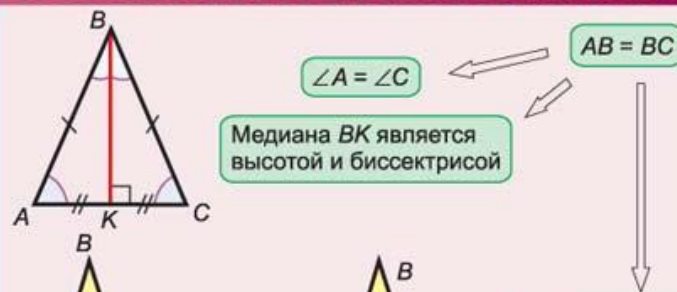
## РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



### ПРИЗНАК РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$$\angle A = \angle C \Rightarrow AB = BC$$

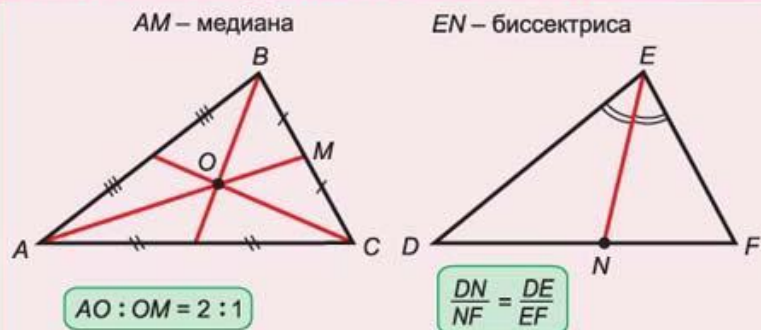
### СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



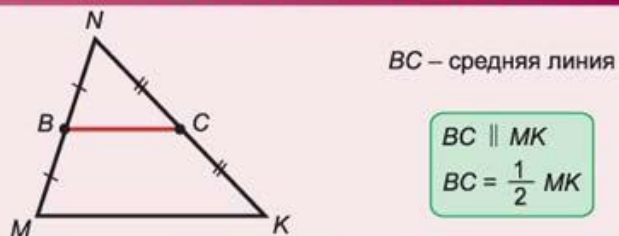
- Медианы  $AN$  и  $CM$  равны
- Биссектрисы  $AP$  и  $CK$  равны
- Высоты  $AL$  и  $CH$  равны

5 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ егэша.рф  
**ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ**

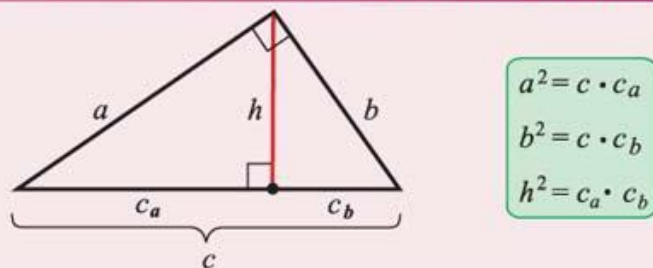
**СВОЙСТВА МЕДИАН И БИСSEKTRИС**



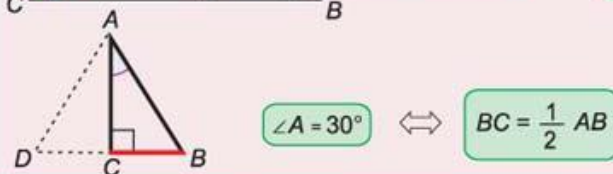
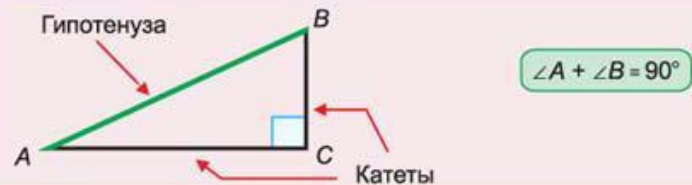
**СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА**



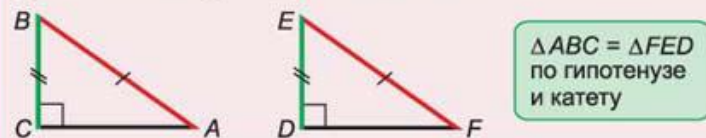
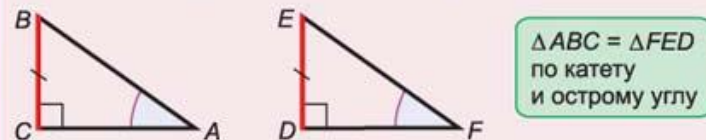
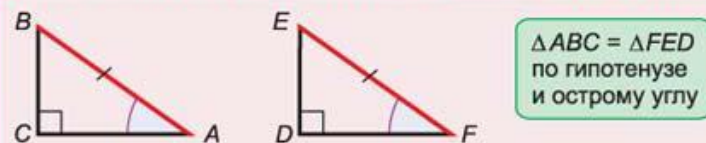
**СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ**



6 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ егэша.рф  
**ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК**

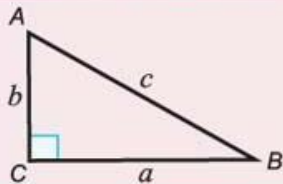


**ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ**



## 7

## ТЕОРЕМА ПИФАГОРА

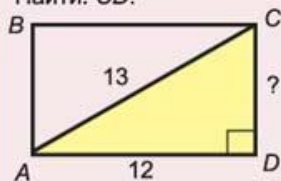


$$\angle C = 90^\circ \Leftrightarrow c^2 = a^2 + b^2$$

## ПРИМЕР

Дано:  $ABCD$  – прямоугольник,  $AC = 13$ ,  $AD = 12$ .  
Найти:  $CD$ .

Решение:



$\triangle ACD$  – прямоугольный,  $\angle D = 90^\circ$

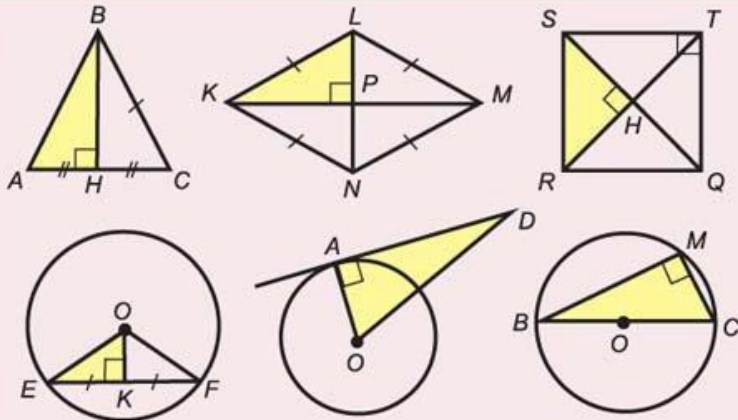
По теореме Пифагора:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2$$

$$13^2 = 12^2 + CD^2$$

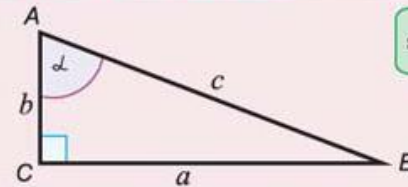
$$CD^2 = 25$$

$$CD = 5$$



## 8

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ



$$\sin \alpha = \frac{a}{c}$$

$$\cos \alpha = \frac{b}{c}$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$$

(Катет  $a$  противолежит углу  $\alpha$ ,  
катет  $b$  прилежит к углу  $\alpha$ )

## ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

При решении задач необходимо:

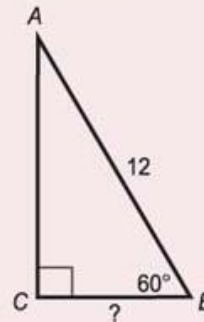
- 1) ВЫБРАТЬ НУЖНУЮ ФОРМУЛУ
- 2) ПОДСТАВИТЬ ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
- 3) ВЫЧИСЛИТЬ НЕИЗВЕСТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

## ПРИМЕР

Дано:  $\triangle ABC$ ,  $\angle C = 90^\circ$ ,  $\angle B = 60^\circ$ ,  $AB = 12$ .

Найти:  $BC$ .

Решение:



1. Так как  $BC$  прилежит к углу  $B$ , то

$$\cos B = \frac{BC}{AB}$$

2. Подставим известные величины:

$$\frac{1}{2} = \frac{BC}{12}$$

3.  $BC = \frac{12}{2} = 6$

Ответ:  $BC = 6$

9 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ  
ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

егэша.рф

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\triangle ABC \sim \triangle DEF$



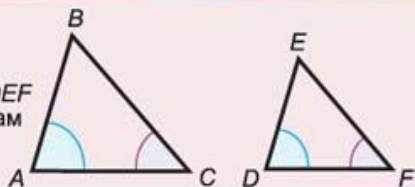
$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle E, \angle C = \angle F$$

$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF} = k$$

$k$  – коэффициент подобия

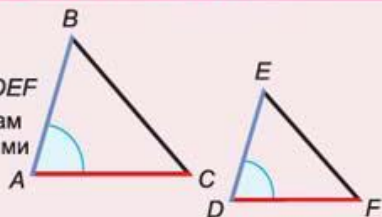
I ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$\left. \begin{matrix} \angle A = \angle D \\ \angle C = \angle F \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ по двум углам}$$

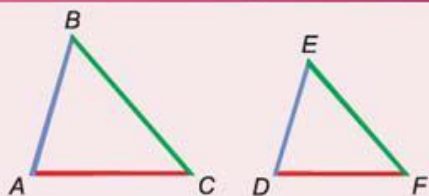


II ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$\left. \begin{matrix} \angle A = \angle D \\ \frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} \end{matrix} \right\} \Rightarrow \triangle ABC \sim \triangle DEF \text{ по двум сторонам и углу между ними}$$



III ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$$\frac{AB}{DE} = \frac{AC}{DF} = \frac{BC}{EF}$$



$\triangle ABC \sim \triangle DEF$   
по трем сторонам

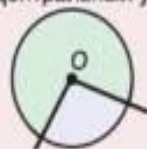
4

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

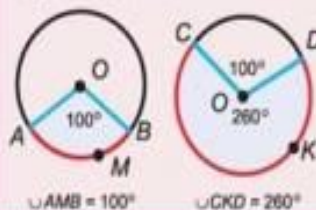
егэша.рф

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

Центральный угол



Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги окружности

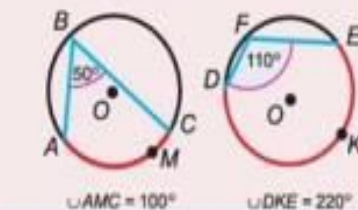


$$\angle AMB = 100^\circ$$

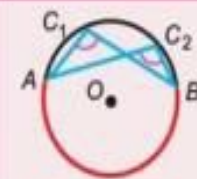
Вписанный угол



Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается



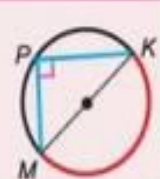
$$\angle AK = 200^\circ$$



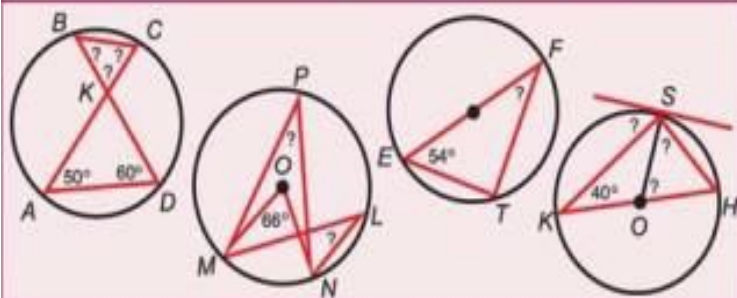
$$\angle C_1 = \angle C_2$$



$$\angle D = \angle E$$



$$\angle MPK = 90^\circ$$



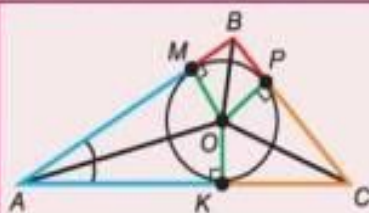


3

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

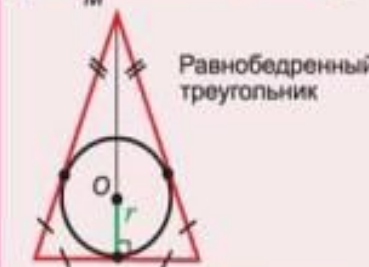
егэша.рф

## ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК



$AB, BC, AC$  – касательные  
 Отрезки касательных равны:  
 $AM = AK, BM = BP, CP = CK$   
 $OM = OK = OP = r$   
 $AO, BO, CO$  – биссектрисы углов

## ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



## ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ

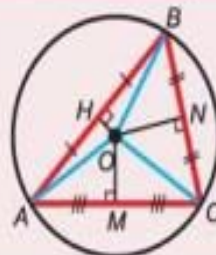


2

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

егэша.рф

## ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА



Стороны  $AB, BC, AC$  – хорды  
 $OA = OB = OC = R$   
 $\angle ABC, \angle BAC, \angle ACB$  – вписанные  
 $OH, OM, ON$  – серединные перпендикуляры к сторонам

## ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ

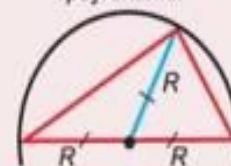
Остроугольный треугольник



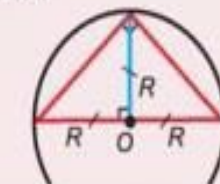
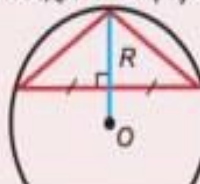
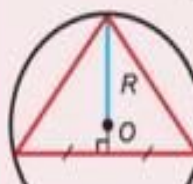
Тупоугольный треугольник



Прямоугольный треугольник



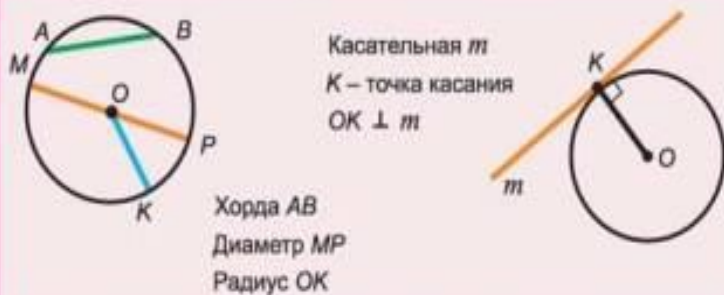
Равнобедренный треугольник



## ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ



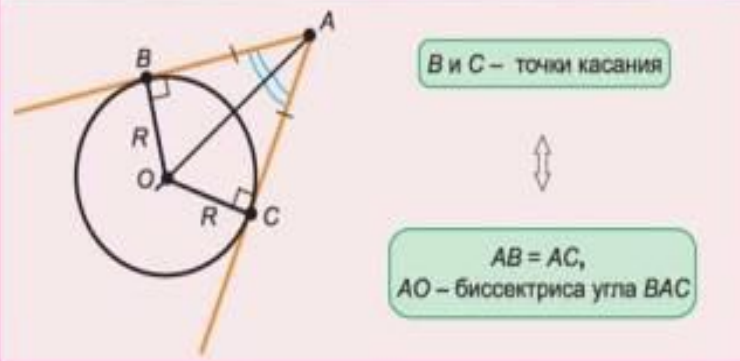
1 ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ **егэша.рф**  
**ОКРУЖНОСТЬ. ХОРДЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ**



**СВОЙСТВО ОТРЕЗКА РАДИУСА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ХОРДЕ**

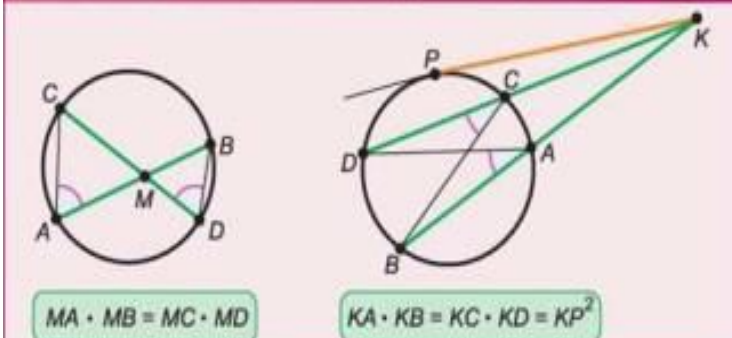


**СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ ИЗ ОБЩЕЙ ТОЧКИ**

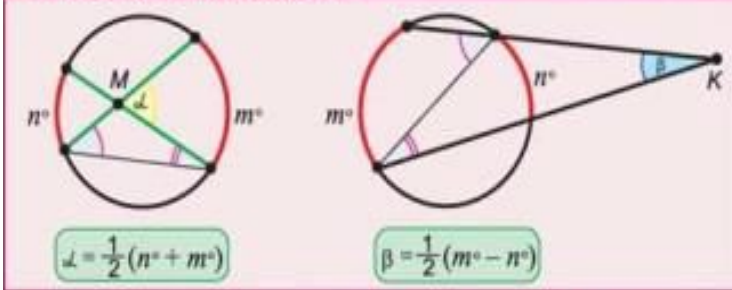


5 ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ **егэша.рф**  
**СВОЙСТВА ХОРД И СЕКУЩИХ**

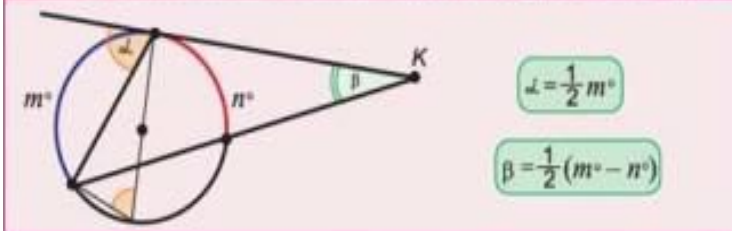
**ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ ОКРУЖНОСТИ**



**УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ХОРДАМИ И СЕКУЩИМИ ОКРУЖНОСТИ**



**УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ КАСАТЕЛЬНОЙ С ХОРДОЙ И СЕКУЩЕЙ**

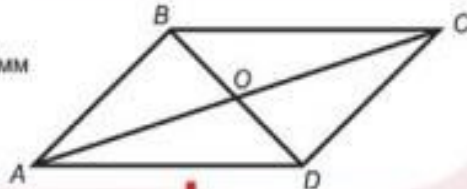


1

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГУГОЛЬНИКИ

## СВОЙСТВА ПАРалЛЕЛОГРАММОВ

егэша.рф

Дано:  $ABCD$  – параллелограмм

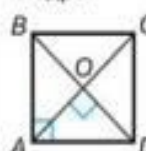
свойства параллелограммов

- $AB \parallel CD, BC \parallel AD$  (противоположные стороны параллельны)  
 $AB = CD, BC = AD$  (противоположные стороны равны)  
 $\angle A = \angle C, \angle B = \angle D$  (противоположные углы попарно равны)  
 $AO = OC, BO = OD$  (диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам)

Дано:  $ABCD$  – прямоугольник

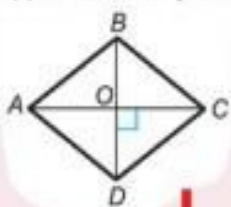
свойства прямоугольника

- $AC = BD$ ,  
 (диагонали равны)  
 $\angle A = \angle B = \angle C = \angle D = 90^\circ$   
 (все углы прямые)

Дано:  $ABCD$  – квадрат

свойства ромба

- $AB = BC = CD = AD$   
 (все стороны равны)  
 $BD \perp AC$   
 (диагонали перпендикулярны)  
 $\angle ABO = \angle CBO$  и т.д.  
 (диагонали – биссектрисы углов)

Дано:  $ABCD$  – ромб

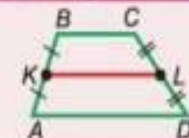
2

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГУГОЛЬНИКИ

## ТРАПЕЦИЯ

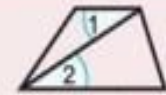
егэша.рф

ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

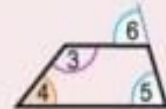


$$KL \parallel BC \parallel AD$$

$$KL = \frac{1}{2}(BC + AD)$$

 $ABCD$  – трапеция  $\Leftrightarrow BC \parallel AD, AB \neq CD$ 


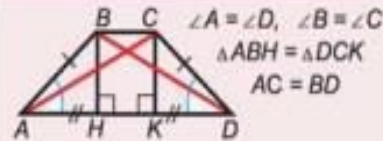
$$\angle 1 = \angle 2$$



$$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$$

$$\angle 5 = \angle 6$$

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

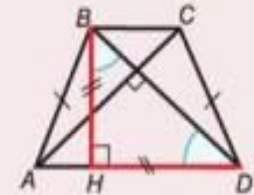


$$\angle A = \angle D, \angle B = \angle C$$

$$\triangle ABH = \triangle DCK$$

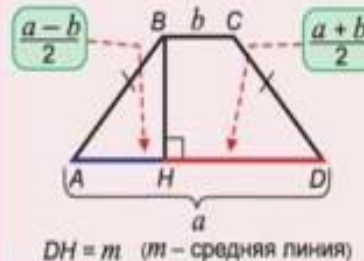
$$AC = BD$$

Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями



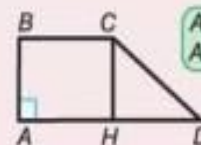
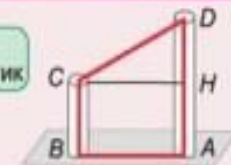
$$DH = h = m$$

( $h$  – высота,  
 $m$  – средняя линия)

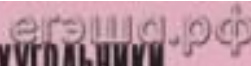


$$DH = m \quad (m \text{ – средняя линия})$$

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ


 $AB$  – высота  
 $ABCH$  – прямоугольник


ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

Четырехугольник, вписанный в окружность

стороны – хорды

углы – вписанные

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$   
 $\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

Четырехугольник, описанный около окружности

стороны лежат на касательных

$AB + CD = BC + AD$

$S_{ABCD} = p \cdot r$   
 $p$  – полупериметр,  
 $r$  – радиус вписанной окружности

ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

Параллелограмм, вписанный в окружность, – прямоугольник

$AC = 2R$

Параллелограмм, описанный около окружности, – ромб

$h = PN = 2r$

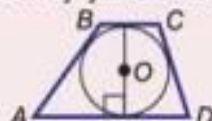
ТРАПЕЦИИ

Трапеция, вписанная в окружность, – равнобедренная трапеция



Центр  $O$  лежит на серединном перпендикуляре к основаниям

В трапеции, описанной около окружности, средняя линия равна полусумме боковых сторон



$P_{ABCD} = 4m$   
( $m$  – средняя линия)

$h = 2r$

ТРАПЕЦИЯ



ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

основания  
боковые стороны

$ABCD$  – трапеция  $\Leftrightarrow$   $BC \parallel AD$ ,  $AB \neq CD$

$KL \parallel BC \parallel AD$   
 $KL = \frac{1}{2}(BC + AD)$

$\angle 1 = \angle 2$   
 $\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$   
 $\angle 5 = \angle 6$

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

$\angle A = \angle D$ ,  $\angle B = \angle C$   
 $\triangle ABH = \triangle DCK$   
 $AC = BD$

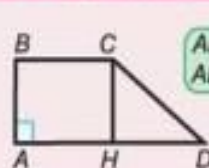
$\frac{a-b}{2}$   $\frac{a+b}{2}$

$DH = h = m$  ( $m$  – средняя линия)

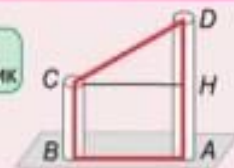
Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями

$DH = h = m$   
( $h$  – высота,  
 $m$  – средняя линия)

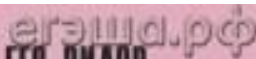
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ



$AB$  – высота  
 $ABCH$  – прямоугольник



ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА И ЕГО ВИДОВ



ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА

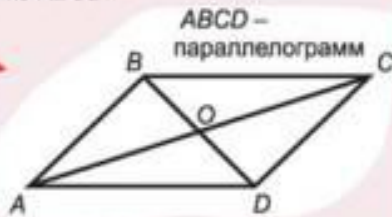
Если в выпуклом четырехугольнике  $ABCD$ :

$AB \parallel CD, BC \parallel AD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

$AB = CD, BC = AD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

$AB \parallel CD, AB = CD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

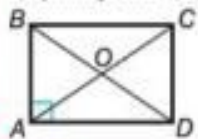
$AO = OC, BO = OD, O \in AC, O \in BD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$



ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА

Если в параллелограмме  $ABCD$ :

$\angle A = 90^\circ$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$   $ABCD$  - прямоугольник



$AC = BD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

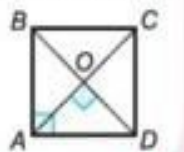
ПРИЗНАКИ КВАДРАТА

Если в прямоугольнике  $ABCD$ :

$\angle ABO = \angle CBO$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$   $AB = BC$

$AC \perp BD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

$ABCD$  - квадрат



Если в ромбе  $ABCD$ :

$AC = BD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

$\angle A = 90^\circ$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

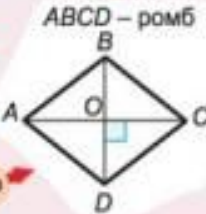
ПРИЗНАКИ РОМБА

Если в четырехугольнике  $ABCD$ :

$AB = BC = CD = AD$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$

Если в параллелограмме  $ABCD$ :

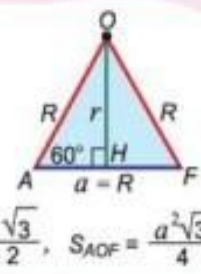
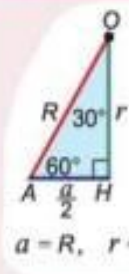
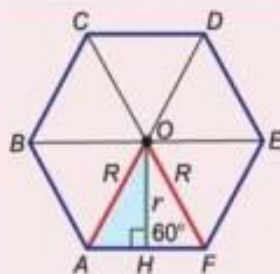
$AB = BC$   $\rightarrow$  TO  $\rightarrow$   $ABCD$  - ромб



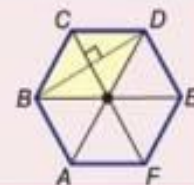
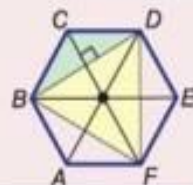
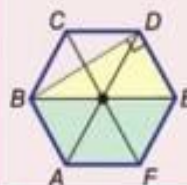
ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК



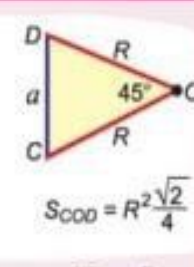
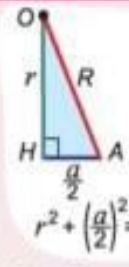
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК



$a = R, r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, S_{AOF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$



ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК



$r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$   
 $S_{AOF} = R^2 \frac{\sqrt{2}}{4}$



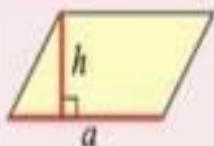
8

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

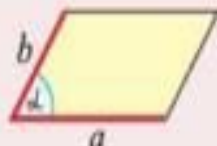
ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (1)

егэша.рф

## ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



$$S = ah$$



$$S = absin\alpha$$

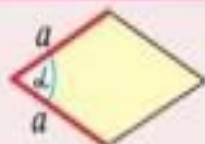

 $d_1$  и  $d_2$  – диагонали

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma$$

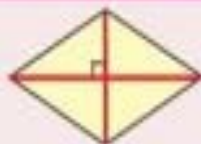
## РОМБ



$$S = ah$$

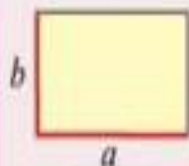


$$S = a^2 \sin\alpha$$



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

## ПРЯМОУГОЛЬНИК И КВАДРАТ



$$S = ab$$



$$S = a^2$$



$$S = \frac{1}{2} d^2 \sin\gamma$$



$$S = \frac{1}{2} d^2$$

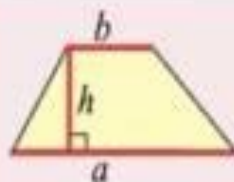
9

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (2)

егэша.рф

## ТРАПЕЦИЯ


 $a$  и  $b$  – основания

$$S = \frac{1}{2} (a + b) \cdot h$$


 $m$  – средняя линия

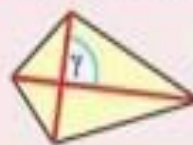
 $h$  – высота

$$S = m \cdot h$$

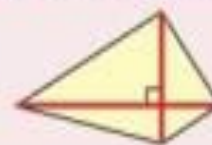

 $d_1$  и  $d_2$  – диагонали

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma$$

## ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2 \sin\gamma$$


 $d_1 \perp d_2$ 

$$S = \frac{1}{2} d_1 d_2$$

## МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильный  $n$ -угольник

$$S = \frac{n}{2} R^2 \sin\alpha$$

 $R$  – радиус описанной окружности

Выпуклый многоугольник, описанный около окружности



$$S = p \cdot r$$

 $p$  – половина периметра  
 $r$  – радиус вписанной окружности

## ПРИЗНАКИ ПАРALLELЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

## УГЛЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ



Внутренние  
накрест лежащие  
углы



Внутренние  
односторонние  
углы



Соответственные  
углы

## ПРИЗНАКИ ПАРALLELЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Пусть даны прямые  $m$  и  $n$  и секущая  $\ell$ ,  
 $\alpha$  и  $\beta$  – углы, образованные этими прямыми

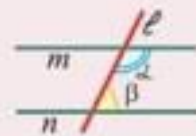
$\alpha, \beta$  – внутренние накрест лежащие,  
 $\alpha = \beta$

$\Rightarrow m \parallel n$



$\alpha, \beta$  – внутренние односторонние,  
 $\alpha + \beta = 180^\circ$

$\Rightarrow m \parallel n$



$\alpha, \beta$  – соответственные,  
 $\alpha = \beta$

$\Rightarrow m \parallel n$



$m \parallel \ell, n \parallel \ell \Rightarrow m \parallel n$



$m \perp \ell, n \perp \ell \Rightarrow m \parallel n$

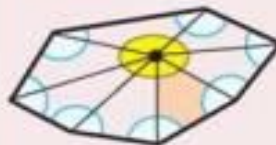


## СВОЙСТВА МНОГУГОЛЬНИКОВ

## ВЫПУКЛЫЙ МНОГУГОЛЬНИК

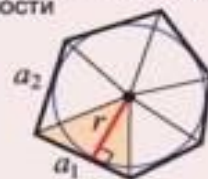
Сумма внутренних углов  
 $n$ -угольника

$$180^\circ \cdot (n - 2)$$



Площадь  $n$ -угольника, описанная  
около окружности

$$S = p \cdot r$$



$r$  – радиус вписанной окружности  
 $p$  – половина периметра  
многоугольника

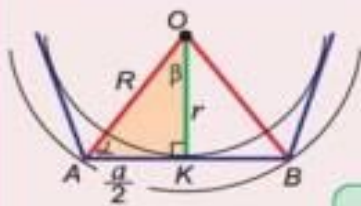
## ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГУГОЛЬНИК

$\triangle AOK$ :

$AK$  – половина стороны

$\alpha = \angle OAK$  – половина внутреннего угла

$\beta = \angle AOK$  – половина центрального угла



$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2, \quad \sin \alpha = \frac{r}{R}, \quad \sin \beta = \frac{a}{2R}$$

## ЗАДАЧА

Найти внутренний, внешний и центральный углы правильного  
пятиугольника.

Решение:

- $n = 5$ , сумма внутренних углов равна  
 $180^\circ \cdot (5 - 2) = 540^\circ$
- внутренний угол:  $\angle 1 = 540^\circ : 5 = 108^\circ$
- внешний угол:  $\angle 2 = 180^\circ - 108^\circ = 72^\circ$
- центральный угол:  $\angle 3 = 360^\circ : 5 = 72^\circ$



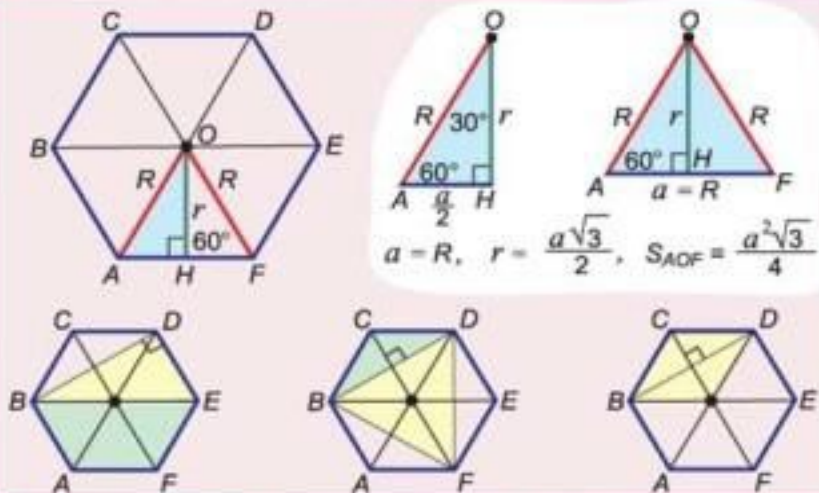
7

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

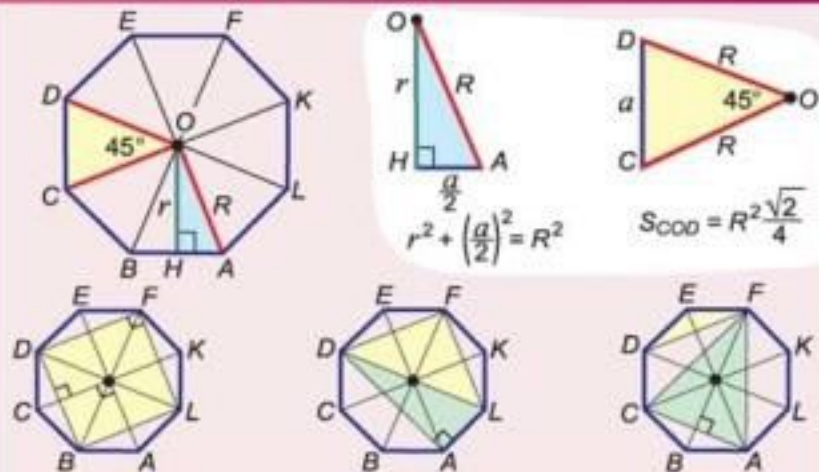
егэша.рф

## ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК

## ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК



## ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК



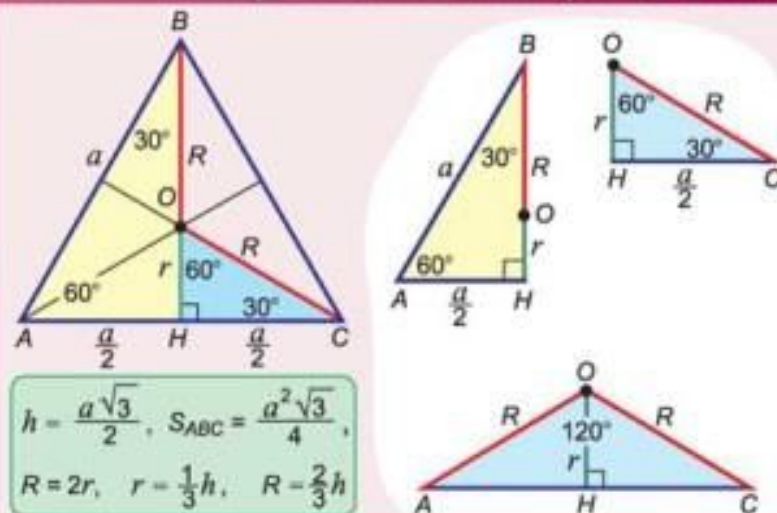
6

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

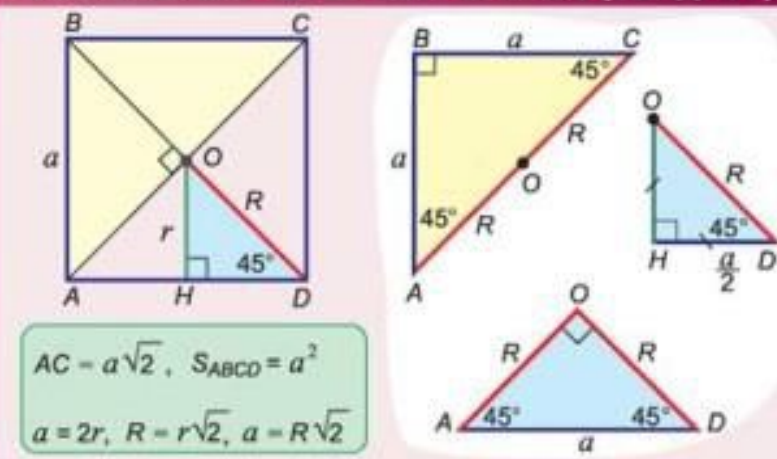
егэша.рф

## ПРАВИЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИК И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК

## ПРАВИЛЬНЫЙ (РАВНОСТОРОННИЙ) ТРЕУГОЛЬНИК



## ПРАВИЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК (КВАДРАТ)





2

ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

егэша.рф

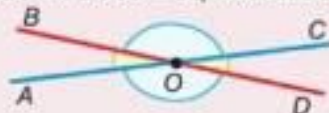
## СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

## ОПРЕДЕЛЕНИЯ

 $\angle AOB$  и  $\angle BOC$  – смежные углы

OB – общая сторона

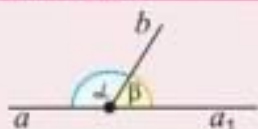
OA, OC – дополнительные лучи

 $\angle AOB$  и  $\angle COD$  – вертикальные углы

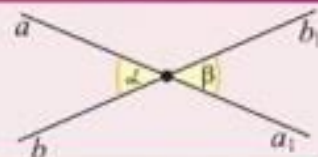
OA, OC – дополнительные лучи

OB, OD – дополнительные лучи

## СВОЙСТВА

 $\alpha$  и  $\beta$  – смежные углы

$$\alpha + \beta = 180^\circ$$

 $\alpha$  и  $\beta$  – вертикальные углы

$$\alpha = \beta$$

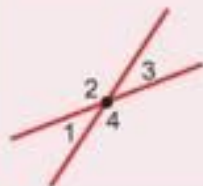


## ЗАДАЧА

Найти углы, образующиеся при пересечении двух прямых, если один из них равен  $32^\circ$ .

Решение:

- 1) Пусть  $\angle 1 = 32^\circ$ .
  - 2)  $\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ$  как смежные углы, тогда  $\angle 2 = 180^\circ - 32^\circ = 148^\circ$ .
  - 3)  $\angle 1 = \angle 3$ ,  $\angle 2 = \angle 4$  как вертикальные углы, тогда  $\angle 3 = 32^\circ$ ,  $\angle 4 = 148^\circ$ .
- Ответ:  $32^\circ$ ,  $148^\circ$ ,  $32^\circ$ ,  $148^\circ$ .



3

ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

егэша.рф

## БИССЕКТРИСА УГЛА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

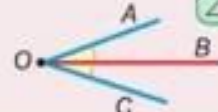
## СЕРЕДИНА ОТРЕЗКА, БИССЕКТРИСА УГЛА

Точка B – середина отрезка AC

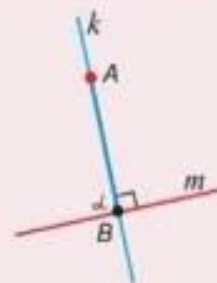
Луч OB – биссектриса угла AOC



AB = BC

 $\angle AOB = \angle BOC$ 

## ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ

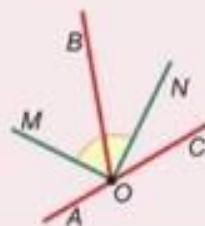
Прямые  $k$  и  $m$  перпендикулярны, если  $\sphericalangle = 90^\circ$ AB – перпендикуляр к прямой  $m$ , если AB – отрезок прямой  $k$ ,  $k \perp m$ ,  $B \in m$ Расстояние от точки A до прямой  $m$  – длина перпендикуляра AB

## ЗАДАЧА

Дано: OM – биссектриса угла AOB, ON – биссектриса угла BOC,  $\angle AOB$  и  $\angle BOC$  – смежные.Найти:  $\angle MON$ .

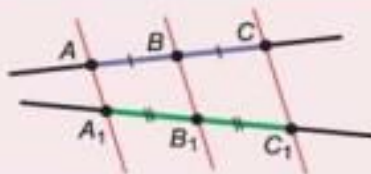
Решение:

- 1) Пусть  $\angle AOB = \alpha$ ,  $\angle BOC = \beta$ .  
Т.к.  $\alpha$  и  $\beta$  – смежные, то  $\alpha + \beta = 180^\circ$ .
- 2) Т.к. OM и ON – биссектрисы углов  $\alpha$  и  $\beta$ ,  
то  $\angle MOB = \frac{\alpha}{2}$ ,  $\angle BON = \frac{\beta}{2}$ .
- 3)  $\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90^\circ$ .

Ответ:  $\angle MON = 90^\circ$ ,  $OM \perp ON$ .

## ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

## ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$$

$$AB = BC$$



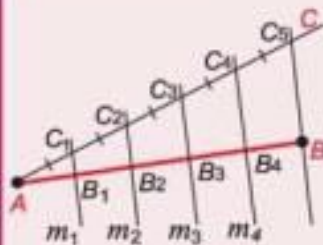
$$A_1B_1 = B_1C_1$$

## ЗАДАЧА 1

Дано: отрезок  $AB$ .

Разделить отрезок  $AB$  на 5 равных частей.

Решение:



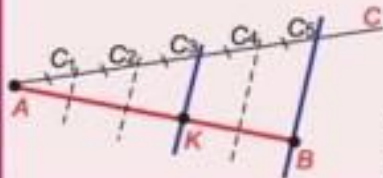
1. На произвольном луче  $AC$  отложить  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести  $C_5B$ , затем прямые  $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3 \parallel m_4 \parallel C_5B$   
 $B_1, B_2, B_3, B_4$  – точки пересечения прямых  $m_i$  с прямой  $AB$
3.  $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = \frac{1}{5}AB$

## ЗАДАЧА 2

Дано: отрезок  $AB$ .

Разделить отрезок  $AB$  в отношении  $3 : 2$ .

Решение:



1. На луче  $AC$  отложить  $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести  $C_5B$  и  $C_3K \parallel C_5B$
3.  $AK : KB = 3 : 2$