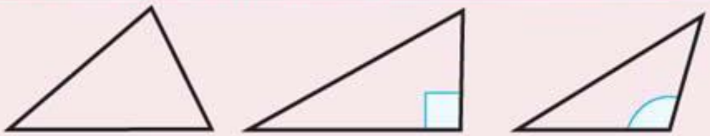
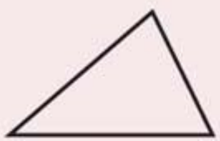
1 ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ. РАВНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

ВИДЫ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



ОСТРОУГОЛЬНЫЙ	ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ	ТУПОУГОЛЬНЫЙ
все углы острые	один угол прямой	один угол тупой

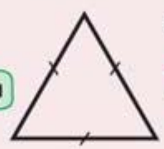


РАЗНОСТОРОННИЙ

все стороны разной длины

РАВНОБЕДРЕННЫЙ

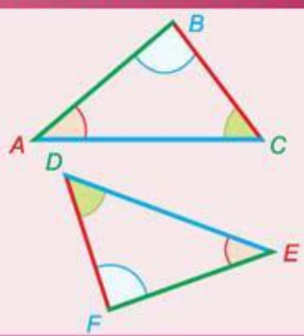
Есть две равные стороны



РАВНОСТОРОННИЙ

все стороны равны

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

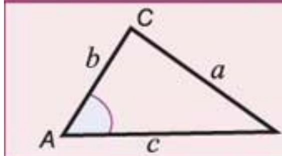


$\Delta ABC = \Delta EFD$

$\Updownarrow$

$\angle A = \angle E$	$BC = DF$
$\angle B = \angle F$	$AC = DE$
$\angle C = \angle D$	$AB = FE$
соответствующие углы	соответствующие стороны

10 ТЕОРЕМА КОСИНУСОВ



$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos A$$

СЛЕДСТВИЯ ИЗ ТЕОРЕМЫ КОСИНУСОВ

$a^2 = b^2 + c^2$	$a^2 > b^2 + c^2$	$a^2 < b^2 + c^2$
$\Updownarrow$	$\Updownarrow$	$\Updownarrow$
$\angle A = 90^\circ$	$\angle A > 90^\circ$	$\angle A < 90^\circ$

ПРИМЕР 1

Дано: $AB = 4\sqrt{2}$, $BC = 5$, $AC = 7$.

Найти: $\angle A$.

Решение:

$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \cdot AC \cos A$

$25 = 32 + 49 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot 7 \cos A$

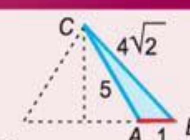
$56\sqrt{2} \cos A = 56$, $\cos A = \frac{1}{\sqrt{2}}$

$\angle A = 45^\circ$

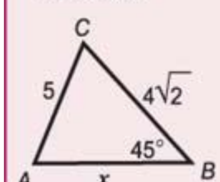
ПРИМЕР 2

Дано: $BC = 4\sqrt{2}$, $AC = 5$, $\angle B = 45^\circ$.

Найти: AB.



Решение:

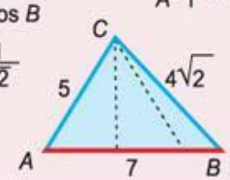


$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\, AB \cdot BC \cos B$

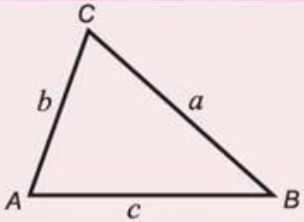
$25 = x^2 + 32 - 2 \cdot 4\sqrt{2} \cdot x \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$

$x^2 - 8x + 7 = 0$

$x = 1$ или $x = 7$



ТЕОРЕМА СИНУСОВ



$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$$

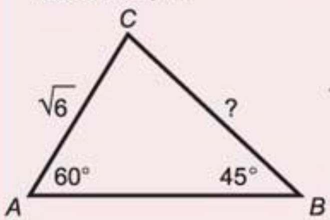
(R – радиус описанной окружности)

СЛЕДСТВИЕ ИЗ ТЕОРЕМЫ СИНУСОВ

$\boxed{a > b} \Leftrightarrow \boxed{\angle A > \angle B}$

ПРИМЕР 1

Дано: $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$, $AC = \sqrt{6}$.
Найти: BC, R.



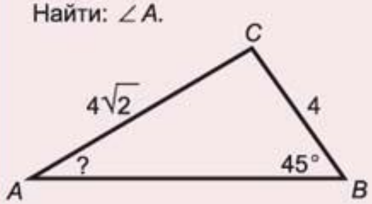
Решение:

1. $\dfrac{BC}{\sin 60°} = \dfrac{AC}{\sin 45°}$; $BC = \dfrac{\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}} = 3$

2. $R = \dfrac{AC}{2\sin 45°} = \dfrac{\sqrt{6}}{\sqrt{2}} = \sqrt{3}$

ПРИМЕР 2

Дано: $\angle B = 45°$, $BC = 4$, $AC = 4\sqrt{2}$.
Найти: $\angle A$.



Решение:

1. $\dfrac{4}{\sin A} = \dfrac{4\sqrt{2}}{\sin 45°}$; $\sin A = \dfrac{1}{2}$

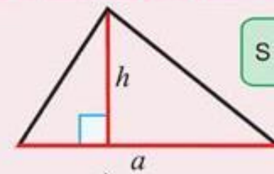
$\angle A = 30°$ или $\angle A = 150°$

2. $BC < AC$, значит, $\angle A < \angle B$,

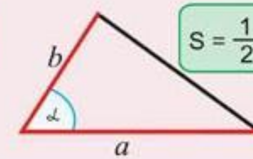
то есть $\angle A = 30°$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (1)

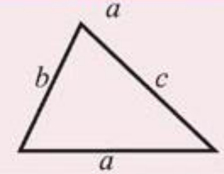
ФОРМУЛЫ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА



$S = \frac{1}{2}ah$



$S = \frac{1}{2}ab\sin\alpha$



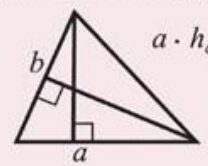
Формула Герона

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

p – полупериметр треугольника

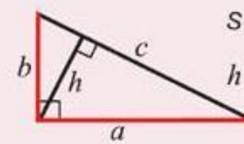
СЛЕДСТВИЯ ИЗ ФОРМУЛ ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКА

Произвольный треугольник



$a \cdot h_a = b \cdot h_b$

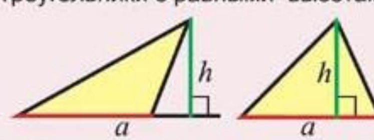
Прямоугольный треугольник



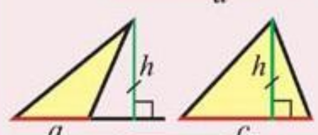
$S = \frac{1}{2}ab$

$h = \frac{ab}{c}$

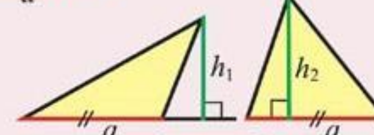
Треугольники с равными высотами или основаниями



$S_1 = S_2$



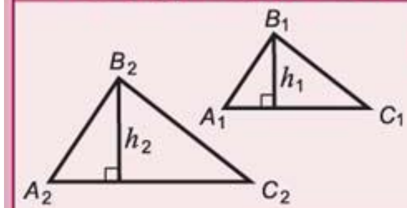
$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{a}{c}$



$\dfrac{S_1}{S_2} = \dfrac{h_1}{h_2}$

ПЛОЩАДЬ ТРЕУГОЛЬНИКА (2)

ПЛОЩАДИ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\Delta A_1B_1C_1 \backsim \Delta A_2B_2C_2$

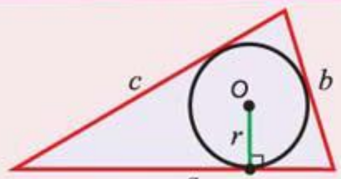
$\Downarrow$

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{A_1C_1}{A_2C_2}\right)^2 = k^2$$

ПЛОЩАДИ ВПИСАННЫХ И ОПИСАННЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$$S = \frac{abc}{4R}$$

R – радиус описанной окружности



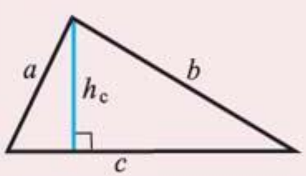
$$S = p \cdot r$$

r – радиус вписанной окружности

$$p = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

ПРИМЕР

Дано: $a = 4$, $b = 13$, $c = 15$.
Найти: R, r, h_c.



Решение:

1. $p = 0{,}5(4 + 13 + 15) = 16$

$S = \sqrt{16 \cdot 12 \cdot 3 \cdot 1} = 24$

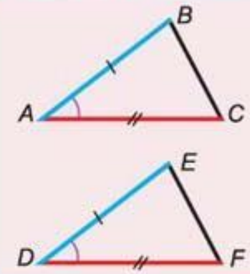
2. $r = S : p = 24 : 16 = 1{,}5$

3. $R = \dfrac{abc}{4S} = \dfrac{4 \cdot 13 \cdot 15}{4 \cdot 24} = \dfrac{45}{8} = 5{,}625$

4. $h_c = 2S : c = 48 : 15 = 3{,}2$

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ТРЕУГОЛЬНИКОВ

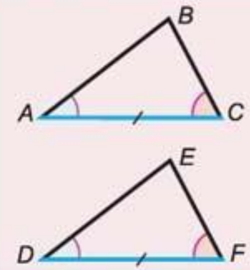
I ПРИЗНАК



$AB = DE$
$AC = DF$
$\angle A = \angle D$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta DEF$ по двум сторонам и углу между ними

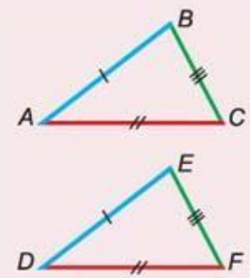
II ПРИЗНАК



$AC = DF$
$\angle A = \angle D$
$\angle C = \angle F$

$\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta DEF$ по стороне и прилежащим к ней углам

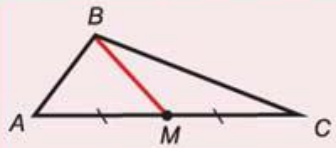
III ПРИЗНАК



$AB = DE$
$AC = DF$
$BC = EF$

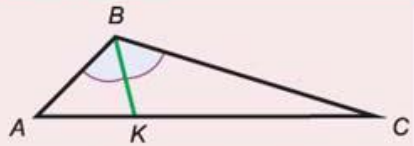
$\Rightarrow$ $\Delta ABC = \Delta DEF$ по трем сторонам

3 ОСНОВНЫЕ ЛИНИИ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ



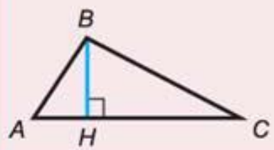
BM – медиана

$AM = MC$



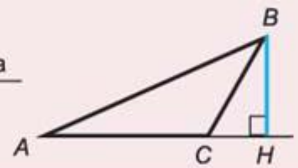
BK – биссектриса

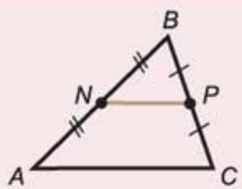
$\angle ABK = \angle CBK$



BH – высота

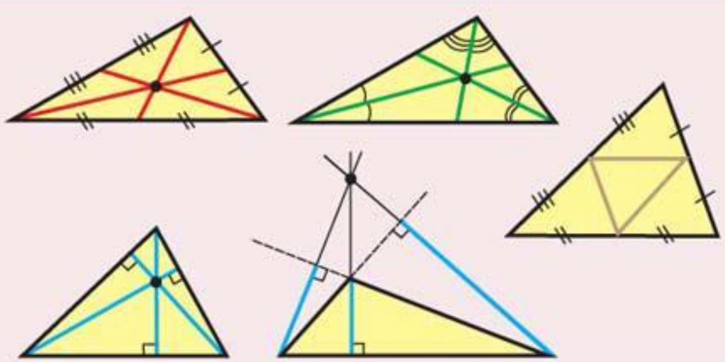
$BH \perp AC$



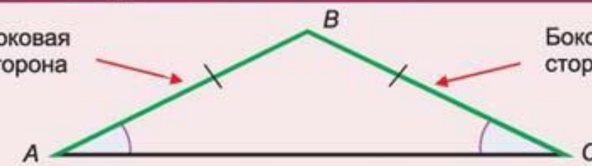


NP – средняя линия

$AN = NB$ и $BP = PC$



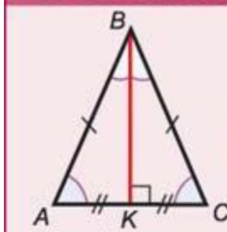
4 РАВНОБЕДРЕННЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК



ПРИЗНАК РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

$\angle A = \angle C \Rightarrow AB = BC$

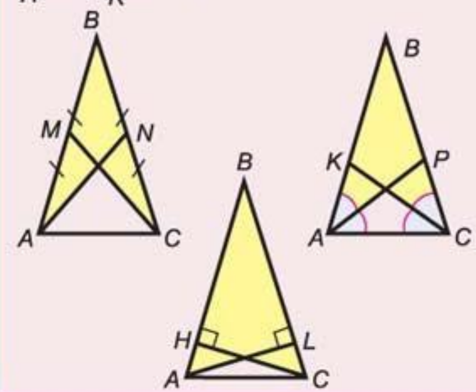
СВОЙСТВА РАВНОБЕДРЕННОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$AB = BC$

$\angle A = \angle C$

Медиана *BK* является высотой и биссектрисой



– Медианы *AN* и *CM* равны

– Биссектрисы *AP* и *CK* равны

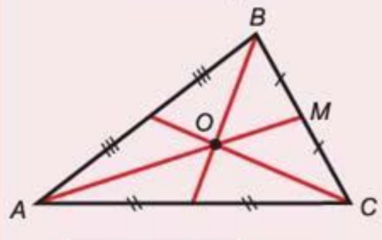
– Высоты *AL* и *CH* равны

5 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

ОТНОШЕНИЯ ОТРЕЗКОВ В ТРЕУГОЛЬНИКЕ

СВОЙСТВА МЕДИАН И БИССЕКТРИС

AM – медиана

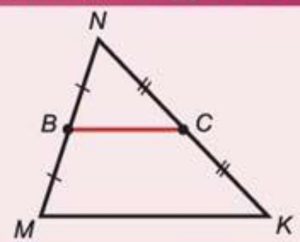


$AO : OM = 2 : 1$

EN – биссектриса

$$\frac{DN}{NF} = \frac{DE}{EF}$$

СВОЙСТВО СРЕДНЕЙ ЛИНИИ ТРЕУГОЛЬНИКА

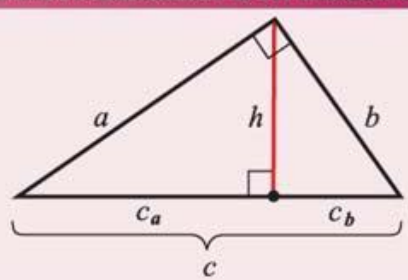


BC – средняя линия

$BC \parallel MK$

$$BC = \frac{1}{2}MK$$

СООТНОШЕНИЯ В ПРЯМОУГОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



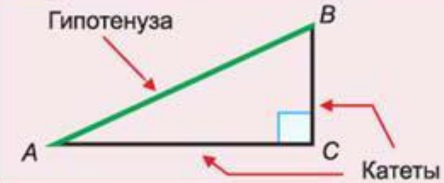
$$a^2 = c \cdot c_a$$

$$b^2 = c \cdot c_b$$

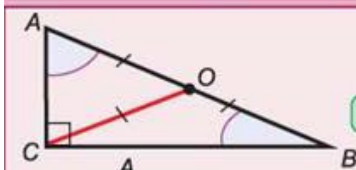
$$h^2 = c_a \cdot c_b$$

6 ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

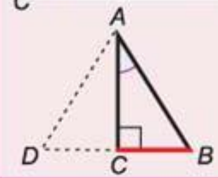


$\angle A + \angle B = 90°$



В прямоугольном треугольнике ABC с гипотенузой AB :

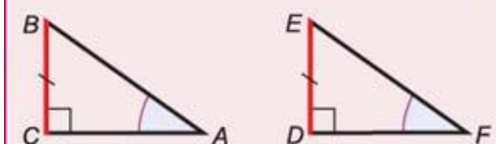
CO – медиана $\Rightarrow$ $CO = \frac{1}{2}AB$



$\angle A = 30°$ $\Leftrightarrow$ $BC = \frac{1}{2}AB$

ПРИЗНАКИ РАВЕНСТВА ПРЯМОУГОЛЬНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

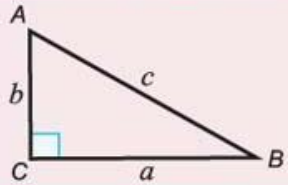
$\Delta ABC = \Delta FED$
по гипотенузе
и острому углу



$\Delta ABC = \Delta FED$
по катету
и острому углу

$\Delta ABC = \Delta FED$
по гипотенузе
и катету

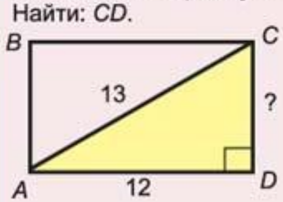
ТЕОРЕМА ПИФАГОРА



$\angle C = 90°$ $\Leftrightarrow$ $c^2 = a^2 + b^2$

ПРИМЕР

Дано: $ABCD$ – прямоугольник, $AC = 13$, $AD = 12$.
Найти: CD.



Решение:

ΔACD – прямоугольный, $\angle D = 90°$

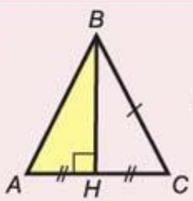
По теореме Пифагора:

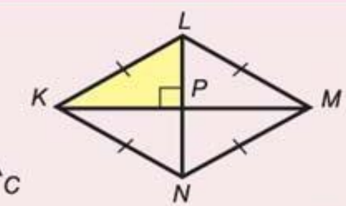
$AC^2 = AD^2 + CD^2$

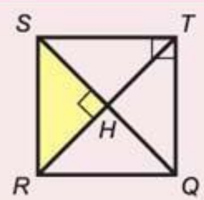
$13^2 = 12^2 + CD^2$

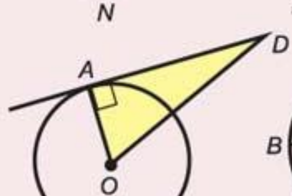
$CD^2 = 25$

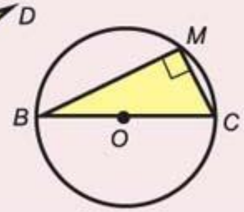
$CD = 5$





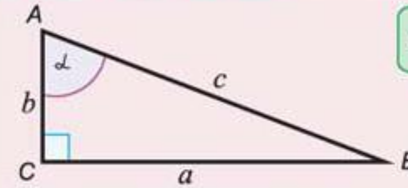






СИНУС, КОСИНУС, ТАНГЕНС ОСТРОГО УГЛА ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

ОПРЕДЕЛЕНИЯ



(Катет a противолежит углу α,
катет b прилежит к углу α)

$\sin \alpha = \frac{a}{c}$

$\cos \alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg} \alpha = \frac{a}{b}$

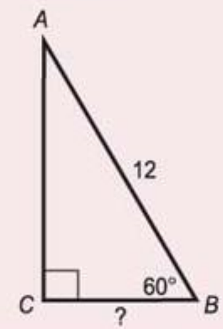
ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭЛЕМЕНТОВ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

При решении задач необходимо:

1) ВЫБРАТЬ НУЖНУЮ ФОРМУЛУ
2) ПОДСТАВИТЬ ИЗВЕСТНЫЕ ВЕЛИЧИНЫ
3) ВЫЧИСЛИТЬ НЕИЗВЕСТНУЮ ВЕЛИЧИНУ

ПРИМЕР

Дано: ΔABC, $\angle C = 90°$, $\angle B = 60°$, $AB = 12$.
Найти: BC.



Решение:

1. Так как BC прилежит к углу B, то

$\cos B = \frac{BC}{AB}$

2. Подставим известные величины:

$\frac{1}{2} = \frac{BC}{12}$

3. $BC = \frac{12}{2} = 6$

Ответ: $BC = 6$

9

ПЛАНИМЕТРИЯ. ТРЕУГОЛЬНИКИ

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПОДОБНЫХ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ $\Rightarrow$ $\angle A = \angle D,\ \angle B = \angle E,\ \angle C = \angle F$

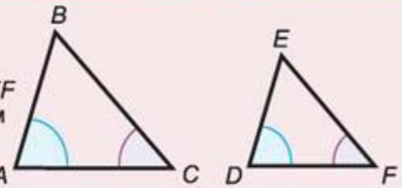
$\Delta ABC \backsim \Delta DEF$ $\Rightarrow$ $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF} = k$

k – коэффициент подобия

I ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\\ \angle C = \angle F\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF$

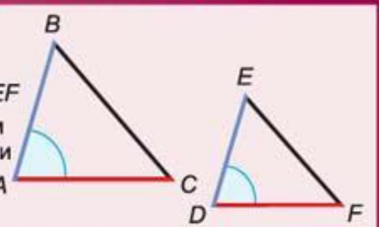
по двум углам



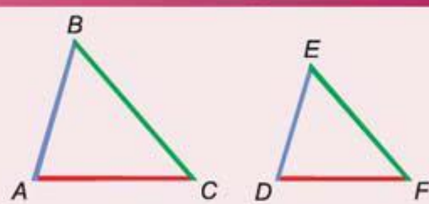
II ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ

$\left.\begin{array}{l}\angle A = \angle D\\ \dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF}\end{array}\right\} \Rightarrow \Delta ABC \backsim \Delta DEF$

по двум сторонам и углу между ними



III ПРИЗНАК ПОДОБИЯ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



$\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{AC}{DF} = \dfrac{BC}{EF}$

$\Downarrow$

$\Delta ABC \backsim \Delta DEF$

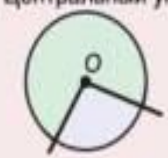
по трем сторонам

4

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

ЦЕНТРАЛЬНЫЕ И ВПИСАННЫЕ УГЛЫ

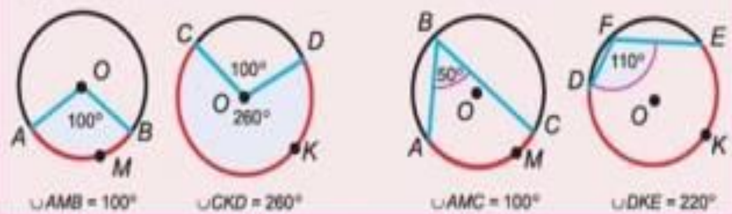
Центральный угол

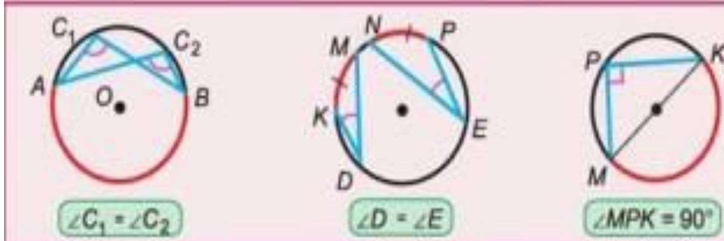


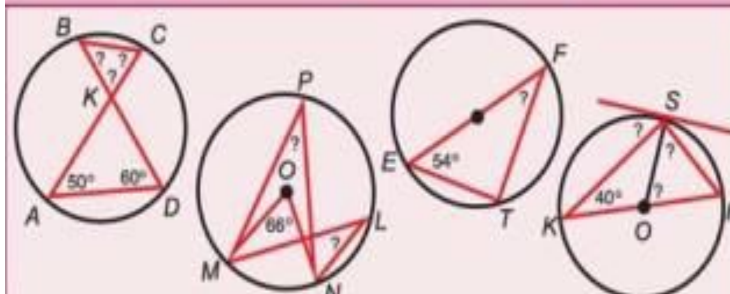
Величина центрального угла равна величине соответствующей дуги окружности

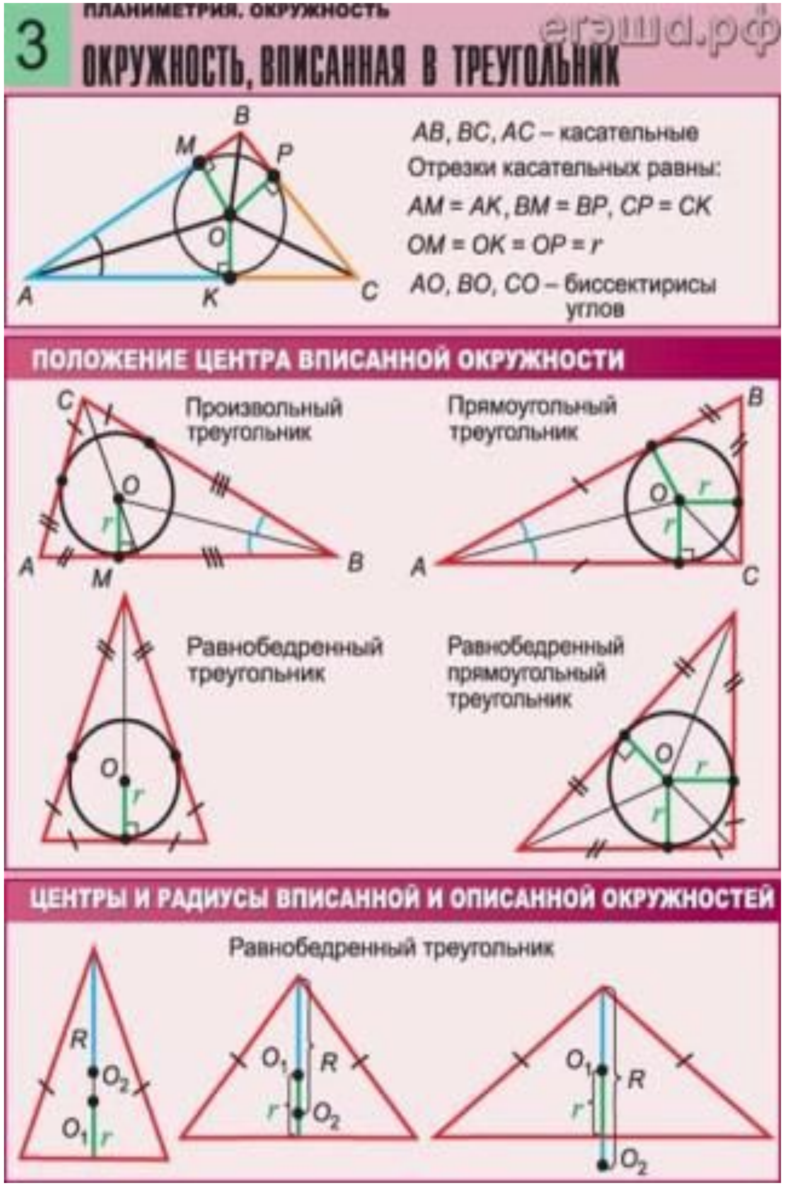
Вписанный угол

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается





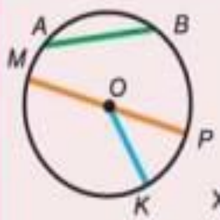



ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ
3
ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК
егэша.рф
AB, BC, AC – касательные
Отрезки касательных равны:
AM = AK, BM = BP, CP = CK
OM = OK = OP = r
AO, BO, CO – биссектрисы углов
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
Произвольный треугольник
Прямоугольный треугольник
Равнобедренный треугольник
Равнобедренный прямоугольный треугольник
ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЕЙ
Равнобедренный треугольник


ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ
2
ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА
егэша.рф
Стороны AB, BC, AC – хорды
OA = OB = OC = R
∠ABC, ∠BAC, ∠ACB – вписанные
OH, OM, ON – серединные перпендикуляры к сторонам
ПОЛОЖЕНИЕ ЦЕНТРА ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
Остроугольный треугольник
Тупоугольный треугольник
Прямоугольный треугольник
Равнобедренный треугольник
ЦЕНТРЫ И РАДИУСЫ ВПИСАННОЙ И ОПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТИ
Разносторонний треугольник
Равносторонний треугольник

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

1 ОКРУЖНОСТЬ. ХОРДЫ И КАСАТЕЛЬНЫЕ



Хорда AB

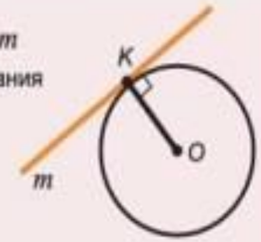
Диаметр MP

Радиус OK

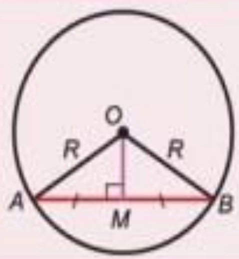
Касательная m

K – точка касания

$OK \perp m$



СВОЙСТВО ОТРЕЗКА РАДИУСА, ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОГО ХОРДЕ

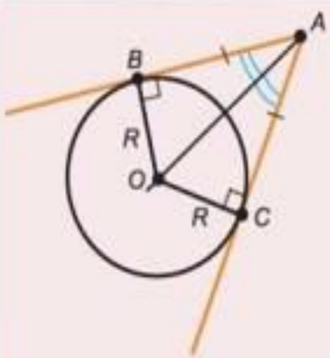


M – середина хорды AB

$\Updownarrow$

$OM \perp AB$

СВОЙСТВО КАСАТЕЛЬНЫХ, ПРОВЕДЕННЫХ ИЗ ОБЩЕЙ ТОЧКИ



B и C – точки касания

$\Updownarrow$

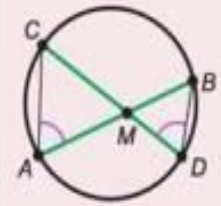
$AB = AC$,

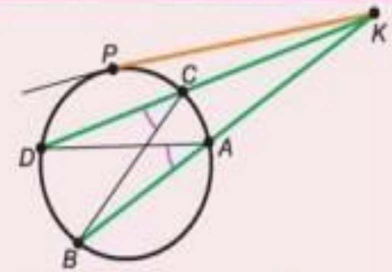
AO – биссектриса угла BAC

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

5 СВОЙСТВА ХОРД И СЕКУЩИХ

ПРОИЗВЕДЕНИЕ ОТРЕЗКОВ ХОРД И СЕКУЩИХ ОКРУЖНОСТИ

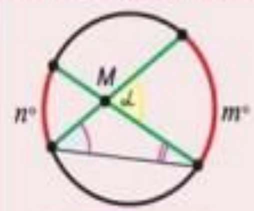


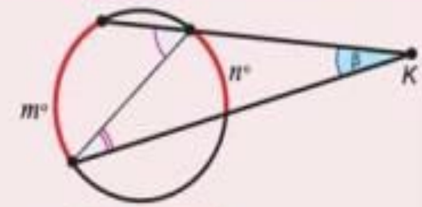


$MA \cdot MB = MC \cdot MD$

$KA \cdot KB = KC \cdot KD = KP^2$

УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ ПЕРЕСЕКАЮЩИМИСЯ ХОРДАМИ И СЕКУЩИМИ ОКРУЖНОСТИ

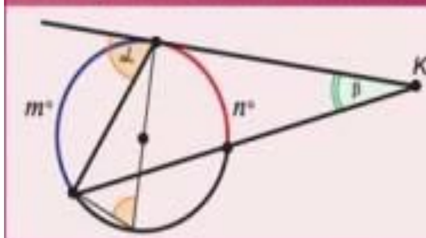




$\angle = \frac{1}{2}(n^\circ + m^\circ)$

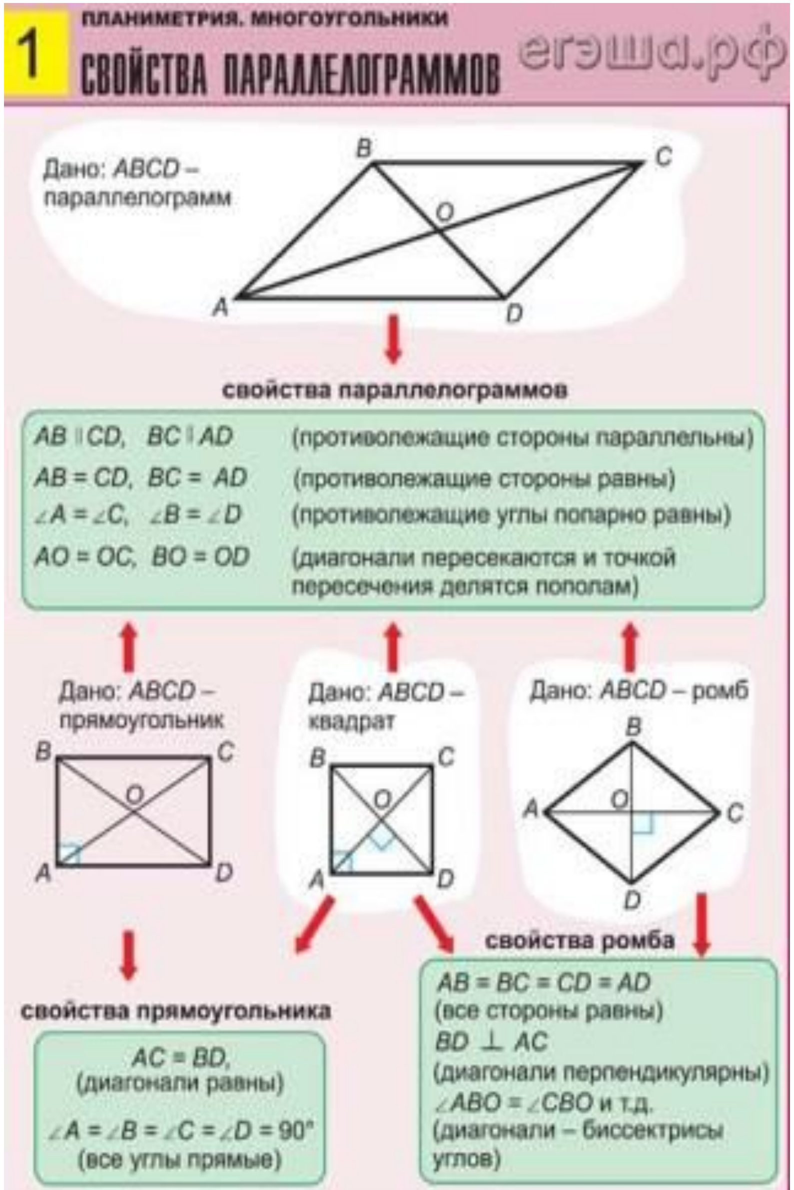
$\beta = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$

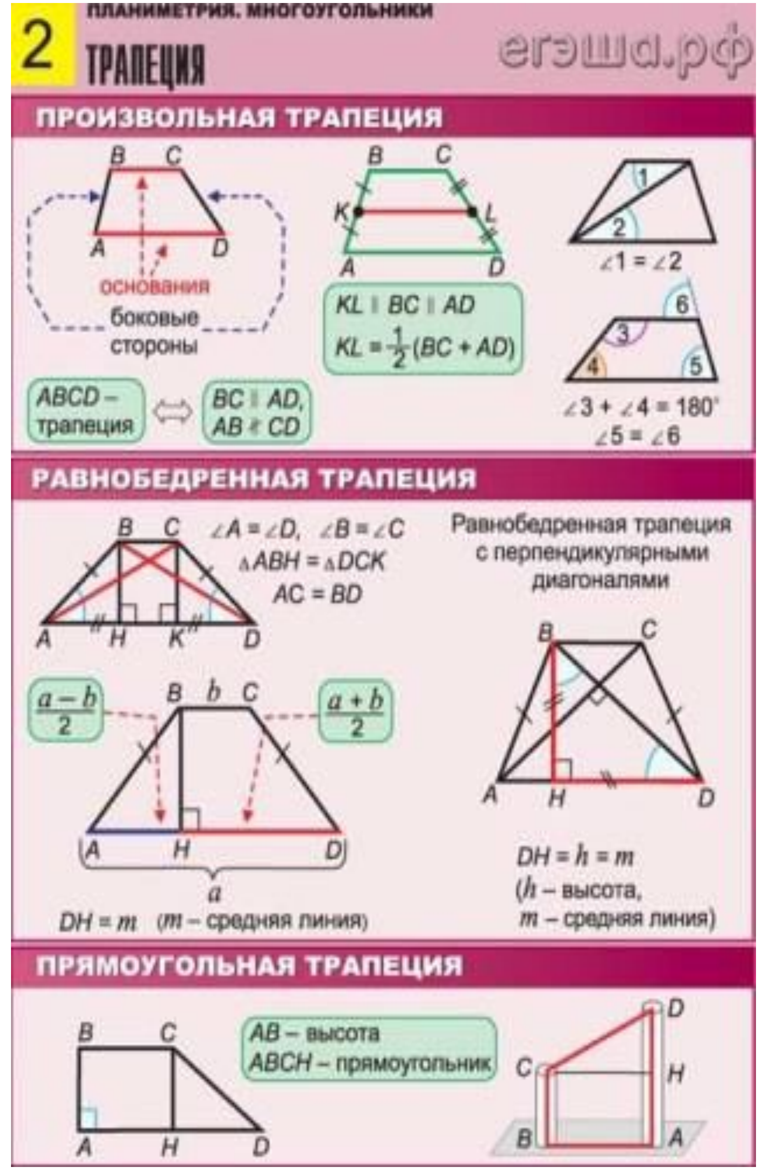
УГЛЫ, ОБРАЗОВАННЫЕ КАСАТЕЛЬНОЙ С ХОРДОЙ И СЕКУЩЕЙ



$\angle = \frac{1}{2} m^\circ$

$\beta = \frac{1}{2}(m^\circ - n^\circ)$


1
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
СВОЙСТВА ПАРАЛЛЕЛОГРАММОВ
егэша.рф
Дано: ABCD – параллелограмм
свойства параллелограммов
AB ∥ CD, BC ∥ AD (противолежащие стороны параллельны)
AB = CD, BC = AD (противолежащие стороны равны)
∠A = ∠C, ∠B = ∠D (противолежащие углы попарно равны)
AO = OC, BO = OD (диагонали пересекаются и точкой пересечения делятся пополам)
Дано: ABCD – прямоугольник
Дано: ABCD – квадрат
Дано: ABCD – ромб
свойства прямоугольника
AC = BD, (диагонали равны)
∠A = ∠B = ∠C = ∠D = 90° (все углы прямые)
свойства ромба
AB = BC = CD = AD (все стороны равны)
BD ⊥ AC (диагонали перпендикулярны)
∠ABO = ∠CBO и т.д. (диагонали – биссектрисы углов)


2
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ТРАПЕЦИЯ
егэша.рф
ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ
основания
боковые стороны
ABCD – трапеция ⇔ BC ∥ AD, AB ∦ CD
KL ∥ BC ∥ AD
KL = 1/2 (BC + AD)
∠1 = ∠2
∠3 + ∠4 = 180°
∠5 = ∠6
РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ
∠A = ∠D, ∠B = ∠C
△ABH = △DCK
AC = BD
Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями
(a − b)/2
(a + b)/2
DH = m (m – средняя линия)
DH = h = m
(h – высота, m – средняя линия)
ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ
AB – высота
ABCH – прямоугольник

ПЛАНИМЕТРИЯ. ОКРУЖНОСТЬ

6 ВПИСАННЫЕ И ОПИСАННЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

ПРОИЗВОЛЬНЫЕ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ

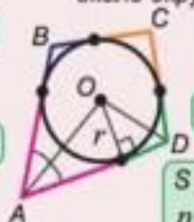
Четырехугольник, вписанный в окружность

стороны – хорды

углы – вписанные

$\angle 1 + \angle 3 = 180^\circ$
$\angle 2 + \angle 4 = 180^\circ$

Четырехугольник, описанный около окружности



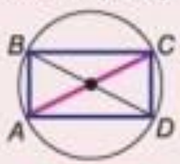
стороны лежат на касательных

$AB + CD = BC + AD$

$S_{ABCD} = p \cdot r$,
p – полупериметр,
r – радиус вписанной окружности

ПАРАЛЛЕЛОГРАММЫ

Параллелограмм, вписанный в окружность, – прямоугольник



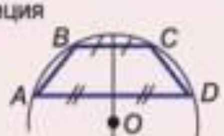
$AC = 2R$

Параллелограмм, описанный около окружности, – ромб

$h = PN = 2r$

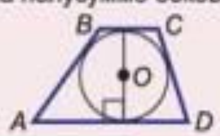
ТРАПЕЦИИ

Трапеция, вписанная в окружность, – равнобедренная трапеция



Центр O лежит на серединном перпендикуляре к основаниям

В трапеции, описанной около окружности, средняя линия равна полусумме боковых сторон



$P_{ABCD} = 4m$
(m – средняя линия)

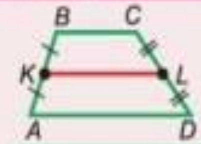
$h = 2r$

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

2 ТРАПЕЦИЯ

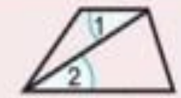
ПРОИЗВОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ

ABCD – трапеция $\Leftrightarrow$ $BC \parallel AD$, $AB \nparallel CD$

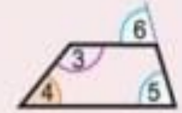


$KL \parallel BC \parallel AD$

$KL = \frac{1}{2}(BC + AD)$

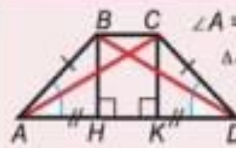


$\angle 1 = \angle 2$

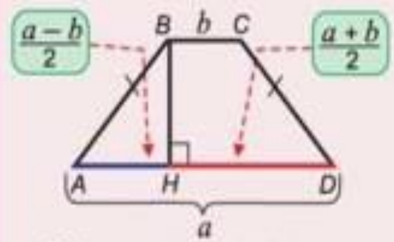


$\angle 3 + \angle 4 = 180^\circ$
$\angle 5 = \angle 6$

РАВНОБЕДРЕННАЯ ТРАПЕЦИЯ

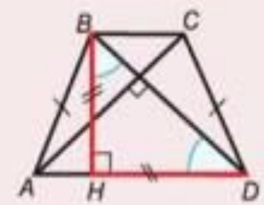


$\angle A = \angle D$, $\angle B = \angle C$
$\triangle ABH = \triangle DCK$
$AC = BD$



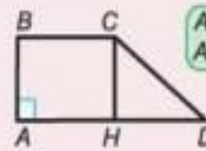
$DH = m$ (m – средняя линия)

Равнобедренная трапеция с перпендикулярными диагоналями

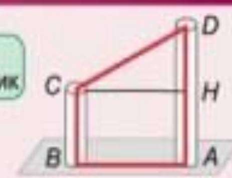


$DH = h = m$
(h – высота,
m – средняя линия)

ПРЯМОУГОЛЬНАЯ ТРАПЕЦИЯ



AB – высота
ABCH – прямоугольник

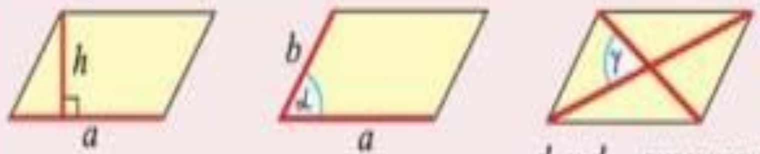



3
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА И ЕГО ВИДОВ
егэша.рф
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛОГРАММА
Если в выпуклом четырехугольнике ABCD:
AB ∥ CD, BC ∥ AD
AB = CD, BC = AD
AB ∥ CD, AB = CD
AO = OC, BO = OD, O ∈ AC, O ∈ BD
то
ABCD – параллелограмм
ПРИЗНАКИ ПРЯМОУГОЛЬНИКА
Если в параллелограмме ABCD:
∠A = 90°
AC = BD
то
ABCD – прямоугольник
ПРИЗНАКИ КВАДРАТА
Если в прямоугольнике ABCD:
AB = BC
∠ABO = ∠CBO
AC ⊥ BD
то
ABCD – квадрат
Если в ромбе ABCD:
AC = BD
∠A = 90°
ПРИЗНАКИ РОМБА
Если в четырехугольнике ABCD:
AB = BC = CD = AD
Если в параллелограмме ABCD:
AB = BC
AC ⊥ BD
∠ABO = ∠CBO
то
ABCD – ромб


7
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК
егэша.рф
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК
$a = R, \quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2}, \quad S_{AOF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК
$r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$
$S_{COD} = R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

8 ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (1)

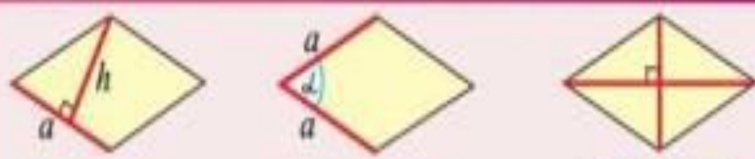
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ



d_1 и d_2 – диагонали

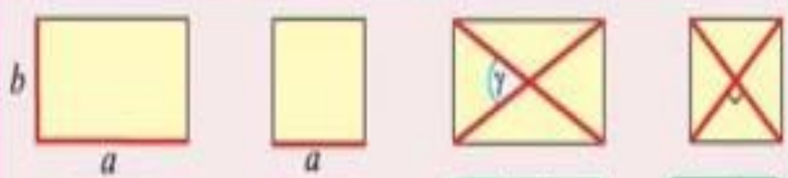
$S = ah$ $\quad$ $S = ab\sin\alpha$ $\quad$ $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$

РОМБ



$S = ah$ $\quad$ $S = a^2\sin\alpha$ $\quad$ $S = \frac{1}{2}d_1d_2$

ПРЯМОУГОЛЬНИК И КВАДРАТ



$S = ab$ $\quad$ $S = a^2$ $\quad$ $S = \frac{1}{2}d^2\sin\gamma$ $\quad$ $S = \frac{1}{2}d^2$

9 ПЛОЩАДЬ МНОГОУГОЛЬНИКА (2)

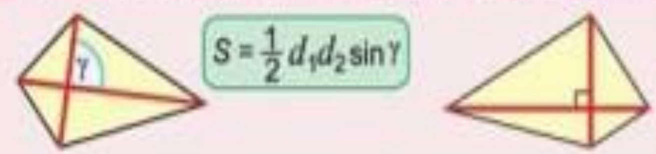
ТРАПЕЦИЯ

a и b – основания $\quad$ m – средняя линия $\quad$ d_1 и d_2 – диагонали

h – высота

$S = \frac{1}{2}(a+b)\cdot h$ $\quad$ $S = m \cdot h$ $\quad$ $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$

ПРОИЗВОЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК



$S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\gamma$

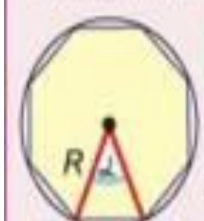
$d_1 \perp d_2$

$S = \frac{1}{2}d_1d_2$

МНОГОУГОЛЬНИКИ

Правильный n-угольник

$S = \frac{n}{2}R^2\sin\alpha$



R – радиус описанной окружности

Выпуклый многоугольник, описанный около окружности

$S = p \cdot r$

p – половина периметра

r – радиус вписанной окружности

4 ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

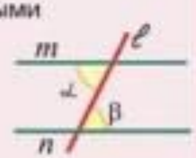
УГЛЫ ПРИ ПЕРЕСЕЧЕНИИ ДВУХ ПРЯМЫХ СЕКУЩЕЙ

Внутренние накрест лежащие углы | Внутренние односторонние углы | Соответственные углы

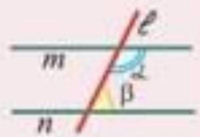
ПРИЗНАКИ ПАРАЛЛЕЛЬНОСТИ ПРЯМЫХ

Пусть даны прямые m и n и секущая ℓ,
$\angle$ и β – углы, образованные этими прямыми

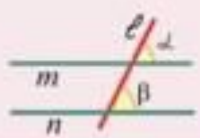
$\angle, \beta$ – внутренние накрест лежащие, $\angle = \beta$ ⇨ $m \parallel n$



$\angle, \beta$ – внутренние односторонние, $\angle + \beta = 180°$ ⇨ $m \parallel n$



$\angle, \beta$ – соответственные, $\angle = \beta$ ⇨ $m \parallel n$



$m \parallel \ell,\ n \parallel \ell$ ⇨ $m \parallel n$

$m \perp \ell,\ n \perp \ell$ ⇨ $m \parallel n$

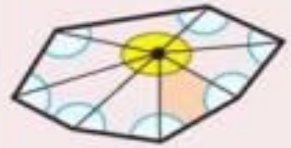
4 ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

СВОЙСТВА МНОГОУГОЛЬНИКОВ

ВЫПУКЛЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК

Сумма внутренних углов n-угольника

$180° \cdot (n-2)$

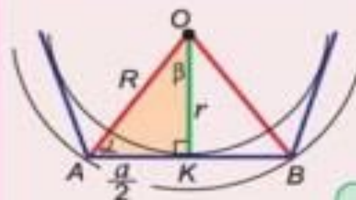


Площадь n-угольника, описанная около окружности

$S = p \cdot r$

r – радиус вписанной окружности
p – половина периметра многоугольника

ПРАВИЛЬНЫЙ МНОГОУГОЛЬНИК



$\triangle AOK$:
AK – половина стороны
$\angle = \angle OAK$ – половина внутреннего угла
$\beta = \angle AOK$ – половина центрального угла

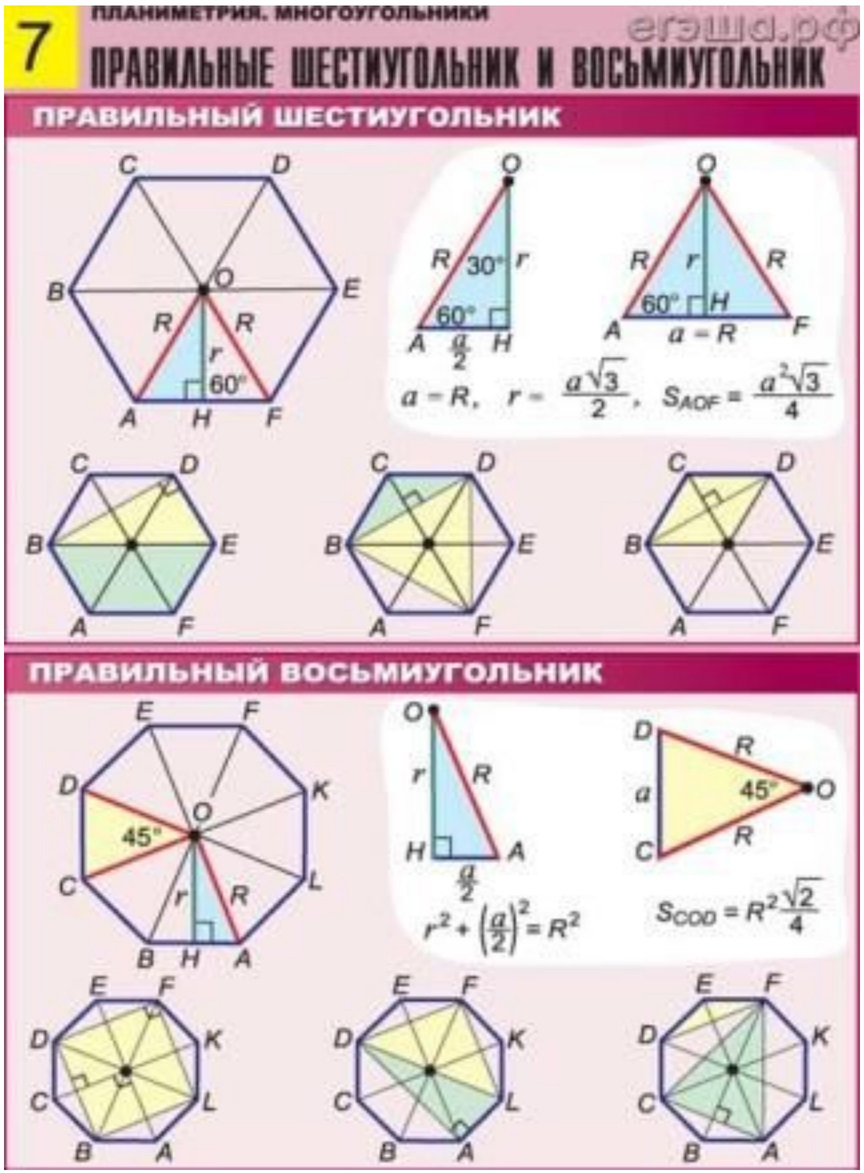
$$R^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + r^2, \quad \sin\angle = \frac{r}{R}, \quad \sin\beta = \frac{a}{2R}$$

ЗАДАЧА

Найти внутренний, внешний и центральный углы правильного пятиугольника.

Решение:

1. $n = 5$, сумма внутренних углов равна $180° \cdot (5-2) = 540°$
2. внутренний угол: $\angle 1 = 540° : 5 = 108°$
3. внешний угол: $\angle 2 = 180° - 108° = 72°$
4. центральный угол: $\angle 3 = 360° : 5 = 72°$


7
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
егэша.рф
ПРАВИЛЬНЫЕ ШЕСТИУГОЛЬНИК И ВОСЬМИУГОЛЬНИК
ПРАВИЛЬНЫЙ ШЕСТИУГОЛЬНИК
$a = R,\quad r = \frac{a\sqrt{3}}{2},\quad S_{AOF} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$
ПРАВИЛЬНЫЙ ВОСЬМИУГОЛЬНИК
$r^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = R^2$
$S_{COD} = R^2\frac{\sqrt{2}}{4}$

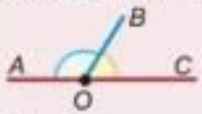

6
ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ
егэша.рф
ПРАВИЛЬНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИК И ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК
ПРАВИЛЬНЫЙ (РАВНОСТОРОННИЙ) ТРЕУГОЛЬНИК
$h = \frac{a\sqrt{3}}{2},\quad S_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4},$
$R = 2r,\quad r = \frac{1}{3}h,\quad R = \frac{2}{3}h$
ПРАВИЛЬНЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИК (КВАДРАТ)
$AC = a\sqrt{2},\quad S_{ABCD} = a^2$
$a = 2r,\quad R = r\sqrt{2},\quad a = R\sqrt{2}$

2 ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

СМЕЖНЫЕ И ВЕРТИКАЛЬНЫЕ УГЛЫ

ОПРЕДЕЛЕНИЯ

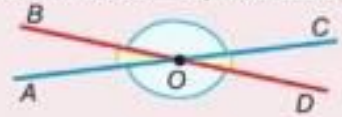
$\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные углы



OB – общая сторона

OA, OC – дополнительные лучи

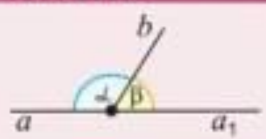
$\angle AOB$ и $\angle COD$ – вертикальные углы



OA, OC – дополнительные лучи

OB, OD – дополнительные лучи

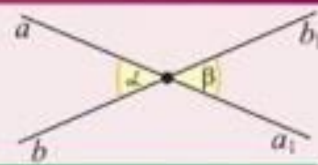
СВОЙСТВА



α и β – смежные углы

⇩

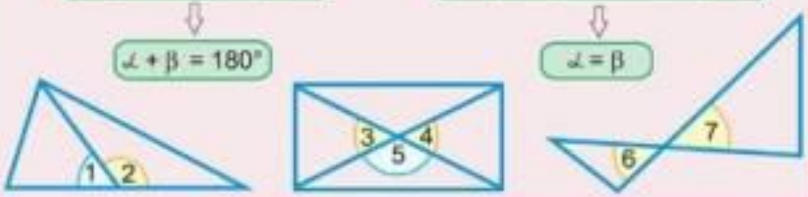
$\alpha + \beta = 180°$



α и β – вертикальные углы

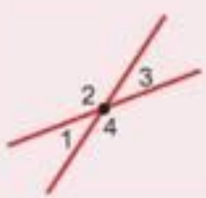
⇩

$\alpha = \beta$



ЗАДАЧА

Найти углы, образующиеся при пересечении двух прямых, если один из них равен 32°.



Решение:

1) Пусть $\angle 1 = 32°$.

2) $\angle 1 + \angle 2 = 180°$ как смежные углы, тогда $\angle 2 = 180° - 32° = 148°$.

3) $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 2 = \angle 4$ как вертикальные углы, тогда $\angle 3 = 32°$, $\angle 4 = 148°$.

Ответ: 32°, 148°, 32°, 148°.

3 ПЛАНИМЕТРИЯ. ПРЯМЫЕ. ОТРЕЗКИ. УГЛЫ

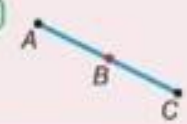
БИССЕКТРИСА УГЛА. ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

СЕРЕДИНА ОТРЕЗКА, БИССЕКТРИСА УГЛА

Точка B – середина отрезка AC

⇩

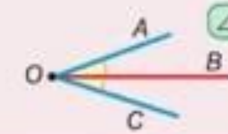
$AB = BC$



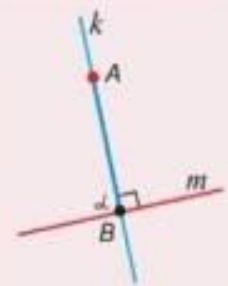
Луч OB – биссектриса угла AOC

⇩

$\angle AOB = \angle BOC$



ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ



Прямые k и m перпендикулярны, если $\alpha = 90°$

AB – перпендикуляр к прямой m, если AB – отрезок прямой k, $k \perp m$, $B \in m$

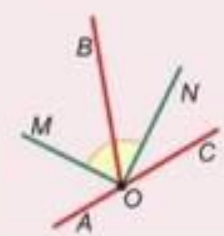
Расстояние от точки A до прямой m – длина перпендикуляра AB

ЗАДАЧА

Дано: OM – биссектриса угла AOB, ON – биссектриса угла BOC, $\angle AOB$ и $\angle BOC$ – смежные.

Найти: $\angle MON$.

Решение:



1) Пусть $\angle AOB = \alpha$, $\angle BOC = \beta$.
Т.к. α и β – смежные, то $\alpha + \beta = 180°$.

2) Т.к. OM и ON – биссектрисы углов α и β, то $\angle MOB = \frac{\alpha}{2}$, $\angle BON = \frac{\beta}{2}$.

3) $\angle MON = \angle MOB + \angle BON = \frac{\alpha + \beta}{2} = 90°$.

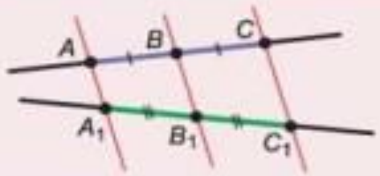
Ответ: $\angle MON = 90°$, $OM \perp ON$.

ПЛАНИМЕТРИЯ. МНОГОУГОЛЬНИКИ

5

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА

ТЕОРЕМА ФАЛЕСА



$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1$
$AB = BC$

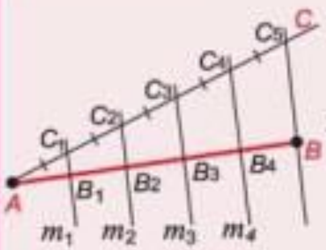
$\Updownarrow$

$A_1B_1 = B_1C_1$

ЗАДАЧА 1

Дано: отрезок AB.

Разделить отрезок AB на 5 равных частей.



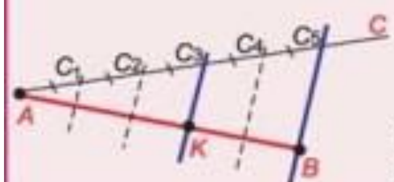
Решение:

1. На произвольном луче AC отложить $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести C_5B, затем прямые $m_1 \parallel m_2 \parallel m_3 \parallel m_4 \parallel C_5B$
   B_1, B_2, B_3, B_4 – точки пересечения прямых m_i с прямой AB
3. $AB_1 = B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_4 = B_4B = \frac{1}{5}AB$

ЗАДАЧА 2

Дано: отрезок AB.

Разделить отрезок AB в отношени 3 : 2.



Решение:

1. На луче AC отложить $AC_1 = C_1C_2 = C_2C_3 = C_3C_4 = C_4C_5$
2. Провести C_5B и $C_3K \parallel C_5B$
3. $AK : KB = 3 : 2$